

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Институт Физико-технический

Направление подготовки Прикладная математика и информатика

Кафедра Высшей математики и математической физики

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема работы
Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок

УДК 658.7:005.956.4:519.876

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
ОВМ41	Ставчук Людмила Георгиевна		

Руководитель

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор	Мицель А. А.	Д.т.н		

КОНСУЛЬТАНТЫ:

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Верховская М. В.	К.э.н.		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент	Гоголева Т. С.	К.ф.-м.н.		

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:

Зав. кафедрой	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор	Трифонов А. Ю.	Д.ф.-м.н.		

ЗАПЛАНИРОВАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ПРОГРАММЕ

Код результата	Результат обучения
<i>Профессиональные компетенции</i>	
P1	способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива
P2	способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач
P3	способностью углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности
P4	способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности
P5	способностью управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта
P6	способностью организовывать процессы корпоративного обучения на основе технологий и развития корпоративных баз знаний
P7	способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов
P8	способностью разрабатывать корпоративные стандарты и профили функциональной стандартизации приложений, систем, информационной инфраструктуры
P9	способностью к преподаванию математических дисциплин и информатики в образовательных организациях основного общего, среднего общего, среднего профессионального и высшего образования
P10	способностью разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного и мобильного обучения
P11	способностью разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий
P12	способностью к взаимодействию в рамках международных проектов и сетевых сообществ
P13	способностью осознавать корпоративную политику в области повышения социальной ответственности бизнеса перед обществом, принимать участие в ее развитии
<i>Универсальные компетенции</i>	
P14	готовностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности
P15	готовностью руководить коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия
P16	способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе, в новых областях

	знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять своё научное мировоззрение
P17	способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики
P18	способностью использовать углублённые знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Институт Физико-технический

Направление подготовки Прикладная математика и информатика

Кафедра Высшей математики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ:

Зав. кафедрой

(Подпись) (Дата) (Ф.И.О.)

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

В форме:

Магистерской диссертации

Студенту:

Группа	ФИО
0BM41	Ставчук Людмиле Георгиевне

Тема работы:

Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок	
Утверждена приказом директора (дата, номер)	

Срок сдачи студентом выполненной работы:	
--	--

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:

Исходные данные к работе <i>(наименование объекта исследования или проектирования; производительность или нагрузка; режим работы (непрерывный, периодический, циклический и т. д.); вид сырья или материал изделия; требования к продукту, изделию или процессу; особые требования к особенностям функционирования (эксплуатации) объекта или изделия в плане безопасности эксплуатации, влияния на окружающую среду, энергозатратам; экономический анализ и т. д.).</i>	Объект исследования – системы управления товарными запасами при условии стохастичности спроса.
---	---

Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов <i>(аналитический обзор по литературным источникам с целью выяснения достижений мировой науки техники в рассматриваемой области; постановка задачи исследования, проектирования, конструирования; содержание процедуры исследования, проектирования, конструирования; обсуждение результатов выполненной работы; наименование дополнительных разделов, подлежащих разработке; заключение по работе).</i>	Стохастические модели управления запасами Случайный спрос Винеровские процессы Характеристики случайных величин
Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы <i>(с указанием разделов)</i>	
Раздел	Консультант
Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	Верховская М. В.
Социальная ответственность	Гоголева Т. С.
Названия разделов, которые должны быть написаны на русском и иностранном языках:	
Двухпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом	
Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом	

Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику	
--	--

Задание выдал руководитель:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор	Мицель А. А.	Д.Т.Н.		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0ВМ41	Ставчук Л. Г.		

ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА «ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ»

Студенту:

Группа	ФИО
0BM41	Ставчук Людмиле Георгиевне

Институт	ФТИ	Кафедра	ВММФ
Уровень образования	Магистратура	Направление/специальность	Прикладная математика и информатика

Исходные данные к разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»:

1. Стоимость ресурсов научного исследования (НИ): материально-технических, энергетических, финансовых, информационных и человеческих	Выполнен расчет материальных затрат, плановой себестоимости, основной заработной платы.
--	---

Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:

1. Оценка коммерческого и инновационного потенциала НТИ	Потенциальные потребители – производственные и торговые предприятия
2. Планирование процесса управления НТИ: структура и график проведения, бюджет, риски и организация закупок	При планировании бюджета научного исследования обеспечено полное и достоверное отражение всех видов планируемых расходов. Риски представлены в матрице SWOT
3. Определение ресурсной, финансовой, экономической эффективности	Проведена оценка сравнительной эффективности проекта с учетом разработок конкурентов. Выдвинуты экономические критерии оценки эффективности. Определение интегрального показателя эффективности произведено на основе финансовой эффективности и ресурсоэффективности

Перечень графического материала

1. Сегментирование рынка
2. Оценка конкурентоспособности технических решений
3. Матрица SWOT
4. График проведения и бюджет НТИ
5. Оценка ресурсной, финансовой и экономической эффективности НТИ

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Верховская М. В.	К. Э. Н.		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM41	Ставчук Л. Г.		

ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА «СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ»

Студенту:

Группа	ФИО
0BM41	Ставчук Людмиле Георгиевне

Институт	ФТИ	Кафедра	ВММФ
Уровень образования	Магистратура	Направление/специальность	Прикладная математика и информатика

Исходные данные к разделу «Социальная ответственность»:

1. Описание рабочего места (рабочей зоны, технологического процесса, механического оборудования) на предмет возникновения:	– вредных проявлений факторов производственной среды (метеоусловия, освещение, шумы, вибрации, электромагнитные поля, ионизирующие излучения) – опасных проявлений факторов производственной среды (электрической, пожарной и взрывной природы)
2. Знакомство и отбор законодательных и нормативных документов по темам:	– Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы. «Гигиенические требования к ПЭВМ и организация работы» – Электробезопасность – Пожаровзрывобезопасность

Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:

1. Анализ выявленных вредных факторов проектируемой производственной среды в следующей последовательности:	– действие фактора на организм человека; – приведение допустимых норм; – предлагаемые средства защиты (коллективной защиты и индивидуальные защитные средства)
2. Анализ выявленных опасных факторов проектируемой производственной среды в следующей последовательности:	– электробезопасность (в т.ч. статическое электричество, средства защиты); – пожаровзрывобезопасность (причины, профилактические мероприятия, первичные средства пожаротушения)

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	
--	--

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент	Гоголева Т. С.	к. ф.-м. н.		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM41	Ставчук Л. Г.		

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа содержит 99 страниц, 49 таблиц, 69 формул, 3 рисунка, 17 источников.

Ключевые слова: ЛОГИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, СЛУЧАЙНЫЙ СПРОС.

Объектом исследования являются системы управления товарными запасами при условии стохастичности спроса.

Цель работы – получение трехпродуктовой модели управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок с минимальным оборотным капиталом.

В процессе исследования были построены двухпродуктовая и трехпродуктовая модели управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок. Проведено моделирование на реальных данных предприятия ТОО «СП ВГ-Пласт».

Методология: При построении модели предполагается, что в начальный момент времени первый продукт закупается полностью, а остальные продукты закупаются частично, и в последующем докупаются в течение всего цикла. Объем поставок произвольный, периодичность поставок всех ресурсов одинакова, но при этом спрос на продукцию является случайной величиной

Экономическая эффективность/значимость работы заключается в возможности значительной экономии средств на создание запасов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Реферат	8
Введение.....	10
Обзор литературы.....	12
1 Двухпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом.....	16
2 Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом	22
3 Моделирование на реальных данных	45
4 Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение ...	48
5 Социальная ответственность	56
6 Социальная ответственность	67
Заключение	79
Список использованных источников	81
Приложение А	83
Приложение Б	88

ВВЕДЕНИЕ

Система управления запасами – это сложный комплекс мероприятий по созданию и пополнению запасов, организации непрерывного контроля и оперативного планирования поставок, который направлен на обеспечение бесперебойного процесса производства и реализации продукции при минимизации издержек на обслуживание запасов.

В данной выпускной квалификационной работе описывается разработка стохастической модели, которая предполагает значительную экономию средств на создание запасов за счет того, что докупка необходимых ресурсов осуществляется в объеме их дефицита. Этот факт позволяет сократить расходы на хранение неиспользованных ресурсов.

В нашей работе ставится целью построить трехпродуктовую модель со случайным спросом с равной периодичностью поставок, при условии, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса. При построении модели предполагается, что в начальный момент времени первый продукт закупается полностью, а остальные продукты закупаются частично, и в последующем докупаются в течение всего цикла. Объем поставок произвольный, периодичность поставок всех ресурсов одинакова, но при этом спрос на продукцию является случайной величиной. Данная модель не является универсальной, так как может быть построена либо с использованием численных методов, либо аналитически, но с некоторыми погрешностями.

Таким образом, для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Построить двухпродуктовую модель со случайным спросом с равной периодичностью поставок;
- Вычислить характеристики случайных величин;

- Построить трехпродуктовую модель по аналогии двухпродуктовой модели и вычислить характеристики.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Главной задачей управления запасами является минимизация издержек, что позволяет вести предприятиям наиболее эффективную и выгодную деятельность. Уже создано множество различных стохастических моделей управления запасами, которые в той или иной мере позволяют оптимизировать деятельность предприятия.

В работе [1] авторы условно разделяют модели управления запасами на одноэтапные и многоэтапные модели. Одноэтапные модели применяются, в основном, в торговых предприятиях, функционирование которых имеет сезонный характер, и поэтому одна закупка товара производится один раз у единственного поставщика с определенными условиями поставки, другая же закупка – у другого конкретного поставщика. Многоэтапные модели используются при точно противоположных ситуациях, когда на каждом этапе закупается каждый товар с разными условиями покупки. Поэтому многоэтапные модели более актуальны в современных рыночных условиях, так как один и тот же товар предлагается множеством поставщиков. Однако модель, предложенная в работе [1] ограничивается тем, что товар нельзя заказать у нескольких поставщиков одновременно на одном этапе. Также стоит отметить, что для повышения оперативности принятия решения, необходим многократный запуск процедуры поиска эффективного решения.

В работах [1, 2, 4, 5] выделяют следующую структуру затрат:

затраты на приобретение запасов;

затраты на размещение заказа;

затраты на хранения запасов;

потери от дефицита запасов.

Также стоит отметить, что выделяют несколько видов решения поставленной задачи, и связано это, прежде всего, наличием случайного спроса.

Наиболее популярными являются модели с прогнозируемым спросом [3, 4, 6, 7].

О.А. Косоруков и О.А. Свиридова в своих работах [2, 3] предлагают стохастическую модель, которая основана на принципе сбалансированности издержек компании различного характера. Здесь также учитывается неопределенность не только относительно спроса, но и времени доставки товара. Работа [3] нацелена на определение момента времени поставки заказа, что позволит поддерживать запасы на оптимальном уровне и снизить затраты на хранение и потери от дефицита товара. Данная модель учитывает неопределенность спроса, при этом рассматривается случай, когда заказ приходит точно в срок без задержки.

Отдельный вид модели управления запасами, который основывается на предположении о получении дополнительной прибыли с помощью оптимизации ассортиментного набора товаров, сформулирован в работе [7]: Спрос и остатки товарных запасов здесь также являются случайными величинами. Стоит также отметить, что в случае нестационарности спроса, производится разделение прогнозируемого периода времени на несколько интервалов, в которых выполняется условие стационарности.

Когда нет достаточного количества данных о спросе, для построения прогноза используется другой метод. В таком случае прогноз формируется в рамках экспертно-статистического подхода, т.е. эксперты за неимением значительной базы данных строят прогнозы, основываясь на имеющихся представлениях об аналогичных процессах и объектах.

В работе [4] авторами используется база данных по истории продаж нескольких тысяч видов товаров, многие из которых относятся к группе товаров ажиотажного спроса. Для прогноза значений временного ряда в данной работе предлагается адаптивный метод.

Нельзя не рассмотреть работу [8, 9], которая состоит из двух частей. Она описывает задачу управления многономенклатурными запасами в условиях возможной нестационарности спроса, при этом неизвестны его статистические характеристики. В то же время есть информация о наблюдениях за изменением уровня спроса на товары. В первую очередь автор предлагает выделить тренды изменения спроса, затем классифицировать товары по ABC-методу. Для прогнозирования автор использует экспертно-статистический подход (метод аналогов). В конечном итоге решается детерминированная многономенклатурная задача управления запасами.

В части 2 исследуется проблема формирования дополнительных заказов на пополнение запасов. Автор предлагает на этапе создания страховых запасов использовать критерии, связанные с обеспечением заданного уровня обслуживания потребителей на каждом шаге периода планирования.

Работа [10] интересна тем, что схема решения строится для случайного времени задержки и случайного спроса в рамках (s, S) -стратегии. Суть стратегии состоит в том, что величина запаса u после удовлетворения требования каждый раз сравнивается с уровнем s и при $s > u$ производится заказ в размере $S - u$. Таким образом, ставится задача определения оптимальных уровней s, S для случайной задержки и случайного спроса. Решение задачи производится на основе адаптивного метода, а оптимальные уровни s, S определяются из условия минимума среднеквадратичного отклонения текущих затрат от искомых оптимальных. Также такой метод используется и в зарубежных источниках [11, 12].

Еще один критерий оптимизации предлагают авторы работы [13]. В качестве критерия оптимизации здесь используется средняя прибыль компании от реализации закупленного товара в зависимости от изменения спроса на товар. Таким образом, для решения задачи многономенклатурного заказа необходимо максимизировать среднюю чистую прибыль. Данный критерий отличается от традиционных тем, что необходимо минимизировать не потери, а

максимизировать среднюю прибыль с учетом издержек предприятия на создание запаса.

Ю. А. Козак и Р. В. Колчин в своей работе [5] предлагают модель, которая учитывает стохастичность спроса, однако здесь предполагается, что за период работы системы спрос у потребителя удовлетворяется разово. К минусам данной модели можно отнести то, что нельзя учесть наличие нескольких уровней складов, очередность обеспечения потребителей (очерёдность обеспечивается решением установленного лица), а также потери материальных ресурсов при доставке и хранении запасов.

В работе [14] описываются результаты развития теоретических и практических методов решения задачи. Автор работы заостряет внимание на том, что нет какого-либо универсального метода решения задачи в условиях неопределенности спроса, и утверждает, что проблема управления запасами в условиях нестационарности остается актуальной, так как без проведения дополнительных экспериментальных исследований нельзя утверждать, что относительно простые модели и алгоритмы являются достаточно качественными.

В нашей работе ставится целью построить еще один вариант модели со случайным спросом, в которой недостающие ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса. Предполагается, что данная модель позволит значительно сэкономить средства на создание запасов.

1 ДВУХПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ СПРОСОМ

Предприятие закупает два вида ресурсов. Объём первого ресурса составляет q_1 в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 ден. единиц; объём второго ресурса и цена составляют q_2 и d_2 , соответственно. Периоды поставок каждого вида ресурса (цикл) примем одинаковыми и равными $T_1 = T_2 = T$. Объём средств на покупку ресурсов ограничен величиной $Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2$. Будем для определенности полагать, что ресурс 1 закупается в начале периода полностью, а ресурс 2 – частично в объёме $k_2 q_2$, где $k_2 \leq 1$ – доля второго ресурса. Тогда

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 = Y_m. \quad (1)$$

Будем полагать, что расход ресурсов представляют собой случайные процессы и подчиняются стохастическим уравнениям

$$\begin{aligned} dq_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw_1, \\ dq_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ_1, μ_2 – средние значения в единицу времени случайных величин x_1, x_2 , соответственно (средняя скорость расхода $\mu_1 = \frac{q_1}{T}, \mu_2 = \frac{q_2}{T}$); σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии в единицу времени случайных величин x_1, x_2 , соответственно (размерность $\frac{q^2}{T}$); dw_1, dw_2 – стандартные винеровские процессы.

Решения уравнений (2) имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_1, \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – стандартные нормальные случайные величины с параметрами $M(\varepsilon_i) = 0, M(\varepsilon_i^2) = 1; i = 1, 2; M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0; M(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2) = 1$.

При $t_0 = 0$ получим решение: $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$.

Предположим, что оба ресурса расходуются одновременно в одинаковой пропорции, но случайным образом. Тогда вместо (3) имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем момент времени t_2 пополнения второго ресурса до величины $q_2(1 - k_2)$ из условия $d_1 x_1(t_2) + d_2 x_2(t_2) = a_2(1 - k_2)$, где k_2 – доля второго ресурса в начальный момент времени; $a_2(1 - k_2)$ – дефицит второго ресурса в стоимостном выражении. В результате получим следующее уравнение:

$$bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} = a_2(1 - k_2), \quad (5)$$

где $a_1 = d_1 q_1$, $a_2 = d_2 q_2$, $a = a_1 + a_2$;

$b_1 = d_1 \mu_1$, $b_2 = d_2 \mu_2$, $b = b_1 + b_2$;

$c_1 = d_1 \sigma_1$, $c_2 = d_2 \sigma_2$, $c = c_1 + c_2$

Запишем условие бездефицитности второго ресурса $(Y_m - a_1) - d_2 x_2(t_2) = 0$ или $k_2 a_2 = d_2 x_2(t_2)$.

Тогда момент докупки второго ресурса будем искать из решения следующих уравнений

$$\begin{aligned} bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2) \\ k_2 a_2 &= b_2 t_2 + c_2 \varepsilon \sqrt{t_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим из второго уравнения $k_2 a_2$ в первое, получим

$$(b + b_2)t_2 + (c + c_2)\varepsilon\sqrt{t_2} = a_2. \quad (7)$$

Решив это уравнение, найдем

$$t_2 = \frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b+b_2)^2} - \frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}. \quad (8)$$

Далее, подставим (8) во второе уравнение (6) и найдем k_2 . С учетом того,

$$\text{что } \sqrt{t_2} = \frac{-(c+c_2)\varepsilon + \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}}{2(b+b_2)}, \text{ получим}$$

$$k_2 = \frac{b_2}{a_2} \left(\frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b+b_2)^2} - \frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)} \right) + \\ + \frac{c_2}{a_2} \varepsilon \left(\frac{-(c+c_2)\varepsilon + \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}}{2(b+b_2)} \right).$$

После преобразования получим

$$k_2 = \frac{b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)\varepsilon^2}{2a_2(b+b_2)^2} - \\ - \frac{(b_2c-bc_2)\varepsilon}{2a_2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}. \quad (9)$$

Минимально необходимый запас оборотных средств равен

$$Y_m = a_1 + a_2 k_2 = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)\varepsilon^2}{2(b+b_2)^2} - \\ - \frac{(b_2c-bc_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)} \quad (10)$$

Вычислим характеристики случайной величины t_2 и Y_m :

$$M(t_2) = \frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2} = \frac{d_2 q_2}{d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2} + \frac{(d_1 \sigma_1 + 2d_2 \sigma_2)^2}{2(d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2)^2}, \quad (11)$$

$$M(Y_m) = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2(b+b_2)^2}. \quad (12)$$

При проведении усреднения величин t_2 и Y_m по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}$ представляет собой

нечетную функцию по переменной ε , поэтому $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. Здесь $f(\varepsilon)$ – плотность вероятности случайной величины ε . Кроме того, $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

Запишем разность $t_2 - M(t_2)$:

$$t_2 - M(t_2) = \frac{(c + c_2)^2 (\varepsilon^2 - 1)}{2(b + b_2)^2} - \frac{(c + c_2) \varepsilon}{2(b + b_2)^2} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}$$

и возведем в квадрат

$$\begin{aligned} (t_2 - M(t_2))^2 &= \frac{(c + c_2)^4 (\varepsilon^2 - 1)^2 + (c + c_2)^4 \varepsilon^4 + 4a_2(c + c_2)^2(b + b_2)\varepsilon^2}{4(b + b_2)^4} - \\ &- \frac{(c + c_2)^3 (\varepsilon^2 - 1) \varepsilon}{4(b + b_2)^4} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)} \end{aligned}$$

Далее, имеем $M(\varepsilon^2) = 1$, $M(\varepsilon^4) = 3$, $M((\varepsilon^2 - 1)^2) = 2$.

Проведем усреднение, получим

$$D(t_2) = \frac{(c + c_2)^2}{4(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + 4a_2(b + b_2)). \quad (13)$$

При проведении усреднения величины $(t_2 - M(t_2))^2$ по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - 1) \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}$ представляет собой нечетную функцию переменной ε , поэтому, $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$.

Вычислим дисперсию случайной величины Y_m . Запишем разность $(Y_m - M(Y_m))$:

$$(Y_m - M(Y_m)) = \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)(\varepsilon^2 - 1) - (b_2 c - b c_2) \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}}{2(b + b_2)^2},$$

возведем в квадрат и усредним

$$D(Y_m) = \frac{(b_2c - bc_2)^2 (5(c + c_2)^2 + 4a_2(b + b_2))}{4(b + b_2)^4}. \quad (14)$$

Вычислим момент окончания цикла t_c для случая, когда оба ресурса расходуются одновременно в одинаковой пропорции. Уравнение (5) примет вид:

$$bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma, \quad (15)$$

где $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2$ – суммарный запас обоих ресурсов.

Решим его и вычислим характеристики

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma}, \quad (16)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)^2}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D(t_c) &= \frac{c^2}{4b^4} (5c^2 + 4bY_\Sigma) = \\ &= \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)^4} (5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)Y_\Sigma). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, среднее значение и стандартное отклонение момента пополнения второго ресурса равно $M(t_2) = \frac{a_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2}{2(b + b_2)^2},$

$\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{4(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + 4a_2(b + b_2))},$ а среднее значение и стандартное

отклонение момента пополнения запасов обоих ресурсов (момента окончания цикла) равно $M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}, \sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b^2} \sqrt{5c^2 + 4bY_\Sigma}.$

Для среднего значения нормировочного множителя $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$ получим выражение

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a} = \frac{1}{a} \left(a_1 + \frac{a_2 b_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2(b + b_2)^2} \right). \quad (19)$$

2 ТРЕХПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ СО СЛУЧАЙНЫМ СПРОСОМ

Предприятие закупает три вида ресурсов. Объём первого ресурса составляет q_1 в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 ден. единиц; объём второго ресурса и цена составляют q_2 и d_2 , соответственно; объём третьего ресурса и цена составляют q_3 и d_3 , соответственно. Периоды поставок каждого вида ресурса (цикл) примем одинаковыми и равными $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Объём средств на покупку ресурсов ограничен величиной $Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3$. Будем для определенности полагать, что ресурс 1 закупается в начале периода полностью, ресурс 2 – частично в объёме $k_2 q_2$, где $k_2 \leq 1$ – доля второго ресурса, а ресурс 3 – частично в объёме $k_3 q_3$, где $k_3 \leq 1$ – доля третьего ресурса. Тогда

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 + k_3 d_3 q_3 = Y_m. \quad (20)$$

В отличие от модели [3] будем полагать, что расход ресурсов представляют собой случайные процессы и подчиняются стохастическим уравнениям

$$\begin{aligned} dx_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw_1, \\ dx_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw_2, \\ dx_3 &= \mu_3 dt + \sigma_3 dw_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 – средние значения в единицу времени случайных величин x_1, x_2, x_3 , соответственно (средняя скорость расхода $\mu_1 = \frac{q_1}{T}$, $\mu_2 = \frac{q_2}{T}$, $\mu_3 = \frac{q_3}{T}$); $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ – дисперсии в единицу времени случайных величин x_1, x_2, x_3 , соответственно (размерность $\frac{q^2}{T}$); dw_1, dw_2, dw_3 – стандартные винеровские процессы.

Решения уравнений (21) имеют вид [5]:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_1, \\x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_2, \\x_3(t) &= \mu_3 t + \sigma_3 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_3,\end{aligned}\tag{22}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – стандартные нормальные случайные величины с параметрами $M(\varepsilon_i) = 0, M(\varepsilon_i^2) = 1 ; i = \overline{1, 3}$.

При $t_0 = 0$ получим решение: $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, x_3(t_0) = 0$.

Предположим, что ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции, но случайным образом. Тогда вместо (22) имеем

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\x_3(t) &= \mu_3 t + \sigma_3 \sqrt{t} \cdot \varepsilon,\end{aligned}\tag{23}$$

Найдем моменты времени t_2 и t_3 пополнения второго ресурса до величины $q_2(1-k_2)$ и третьего ресурса до величины $q_3(1-k_3)$ из условий $d_1 x_1(t_2) + d_2 x_2(t_2) + d_3 x_3(t_2) = a_2(1-k_2) + a_3(1-k_3)$, $d_1 x_1(t_3) + d_2 x_2(t_3) + d_3 x_3(t_3) = a_3(1-k_3)$, где k_2 – доля второго ресурса в начальный момент времени; k_3 – доля третьего ресурса в начальный момент времени; $a_2(1-k_2)$ – дефицит второго ресурса в стоимостном выражении; $a_3(1-k_3)$ – дефицит третьего ресурса в стоимостном выражении.

В результате получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1-k_2) + a_3(1-k_3), \\bt_3 + c\varepsilon\sqrt{t_3} &= a_3(1-k_3),\end{aligned}\tag{24}$$

где $a_1 = d_1 q_1, a_2 = d_2 q_2, a_3 = d_3 q_3, a = a_1 + a_2 + a_3$;

$b_1 = d_1 \mu_1, b_2 = d_2 \mu_2, b_3 = d_3 \mu_3, b = b_1 + b_2 + b_3$;

$$c_1 = d_1 \sigma_1, c_2 = d_2 \sigma_2, c_3 = d_3 \sigma_3, c = c_1 + c_2 + c_3.$$

Запишем условия бездефицитности второго и третьего ресурсов:
 $k_2 a_2 = d_2 x_2(t_2); k_3 a_3 = d_3 x_3(t_3).$

Тогда моменты докупки второго и третьего ресурсов будем искать из решения следующих уравнений

$$\begin{aligned} bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2) + a_3(1 - k_3), \\ k_2 a_2 &= b_2 t_2 + c_2 \varepsilon \sqrt{t_2}, \\ bt_3 + c\varepsilon\sqrt{t_3} &= a_3(1 - k_3), \\ k_3 a_3 &= b_3 t_3 + c_3 \varepsilon \sqrt{t_3}. \end{aligned} \quad (25)$$

2.1 Определение моментов времени докупки ресурсов 2 и 3 и их долей в начальный момент времени

Найдем момент времени t_3 докупки ресурса 3. Для этого подставим из четвертого уравнения $k_3 a_3$ в третье, получим

$$(b + b_3)t_3 + (c + c_3)\varepsilon\sqrt{t_3} = a_3. \quad (26)$$

Решив это уравнение, найдем

$$t_3 = \frac{a_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_3)^2} - \frac{(c + c_3)\varepsilon}{2(b + b_3)^2} \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}. \quad (27)$$

Далее, подставим (27) в четвертое уравнение системы (25) и найдем k_3 . С

учетом того, что $\sqrt{t_3} = \frac{-(c + c_3)\varepsilon + \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}}{2(b + b_3)}$, получим

$$k_3 = \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_3 c - b c_3}{2a_3(b + b_3)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)} \quad (28)$$

Найдем момент t_2 докупки второго ресурса и его долю в начальный момент времени k_2 из первого и второго уравнений системы (25):

$$t_2 = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_2)^2} - \frac{(c + c_2)\varepsilon}{2(b + b_2)^2} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1-k_3))(b + b_2)}, \quad (29)$$

$$k_2 = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{a_2(b + b_2)} b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1-k_3))(b + b_2)}. \quad (30)$$

Минимально необходимый запас оборотных средств равен

$$Y_m = a_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 = a_1 + \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{(b + b_2)} b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2(b + b_2)^2} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2(b + b_2)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1-k_3))(b + b_2)} + \frac{a_3 b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2(b + b_3)^2} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_3 c - b c_3}{2(b + b_3)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}. \quad (31)$$

2.2 Вычисление характеристик случайных величин

Вычислим характеристики случайной величины t_3 :

$$M(t_3) = \frac{a_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)^2}{2(b + b_3)^2} = \frac{d_3 q_3}{(d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 + 2d_3 \mu_3)} + \frac{(d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2 + 2d_3 \sigma_3)^2}{2(d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 + 2d_3 \mu_3)^2}. \quad (32)$$

При проведении усреднения величины t_3 по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$ представляет собой нечетную функцию по переменной ε , поэтому $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. Здесь $f(\varepsilon)$ – плотность вероятности случайной величины ε . Кроме того, $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

Запишем разность $t_3 - M(t_3)$:

$$t_3 - M(t_3) = \frac{(c + c_3)(\varepsilon^2 - 1)}{2(b + b_3)^2} - \frac{(c + c_3)\varepsilon}{2(b + b_3)^2} \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$$

и возведем в квадрат

$$(t_3 - M(t_3))^2 = \frac{(c + c_3)^4 (\varepsilon^2 - 1)^2 + (c + c_3)^4 \varepsilon^4 + 4(c + c_3)^2 (b + b_3) a_3 \varepsilon^2}{4(b + b_3)^4} -$$

$$- 2 \frac{(c + c_3)^3 (\varepsilon^2 - 1) \varepsilon}{4(b + b_3)^4} \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$$

Далее, имеем $M(\varepsilon^2) = 1$, $M(\varepsilon^4) = 3$, $M((\varepsilon^2 - 1)^2) = 2$.

Проведем усреднение, получим

$$D(t_3) = \frac{(c + c_3)^2}{4(b + b_3)^4} (5(c + c_3)^2 + 4(b + b_3) a_3). \quad (33)$$

При проведении усреднения величины $(t_3 - M(t_3))^2$ по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon^2 - 1) \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$ представляет собой нечетную функцию переменной ε , поэтому, $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$.

К сожалению, характеристики некоторых величин невозможно вычислить аналитически, поэтому для решения данной проблемы есть 2 варианта: численное моделирование характеристик, либо пренебрежение слагаемым, которое оказывает малое влияние на конечный результат.

2.2.1 Численное моделирование характеристик случайных величин

Найдем характеристики случайной величины t_2 . Для того, чтобы смоделировать значение, перейдем к безразмерной величине. Распишем (29) и сделаем замену переменных:

$$t_2 = \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{b_1 + 2b_2 + b_3} + \frac{(c_1 + 2c_2 + c_3)^2 \varepsilon^2}{2(b_1 + 2b_2 + b_3)^2} - \frac{(c_1 + 2c_2 + c_3) \varepsilon}{2(b_1 + 2b_2 + b_3)^2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(c_1 + 2c_2 + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1 - k_3))(b_1 + 2b_2 + b_3)}$$
(34)

Так как $a_i = d_i q_i$, $b_i = d_i \mu_i = \frac{d_i q_i}{T}$, $c_i = d_i \sigma_i = \frac{d_i \sigma_{q_i}}{\sqrt{T}}$, где $i = \overline{1,3}$, получим

$$t_2 = \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3)}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \cdot T + \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})^2 \varepsilon^2}{2(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)^2} \cdot T -$$

$$- \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3}) \varepsilon}{2(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)^2} \cdot T \sqrt{T} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{T} + 4(d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3))(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3) \cdot T}$$
(35)

Сделаем замену: $X = \frac{d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3}}{2(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}$ и $Y = \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3)}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3}$.

Таким образом, получим безразмерную величину, для которой можно смоделировать среднее значение:

$$\tau_2 = \frac{t_2}{T} = Y + X^2 \varepsilon^2 - X \varepsilon \sqrt{2X^2 \varepsilon^2 + 4Y}. \quad (36)$$

Оценим интервалы значений для X и Y . Так для переменной X несложно заметить, что $X \in [0; 0.5]$. Интервал значений Y может быть разным и зависит от значения k_3 . Доля ресурса 3 в начальный момент, как известно, лежит в интервале от 0 до 1. Поэтому необходимо оценить значения переменной Y для каждого k_3 . Для этого интервал значений k_3 разобьем на подынтервалы с шагом 0.2. В результате получим:

- при $k_3 = 0$ $Y = \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.5]$;
- при $k_3 = 0.2$ $Y = \frac{d_2 q_2 + 0.8d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.45]$;
- при $k_3 = 0.4$ $Y = \frac{d_2 q_2 + 0.6d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.4]$;

- при $k_3 = 0.6$ $Y = \frac{d_2 q_2 + 0.4 d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.35]$;
- при $k_3 = 0.8$ $Y = \frac{d_2 q_2 + 0.2 d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.3]$;
- при $k_3 = 0.9$ $Y = \frac{d_2 q_2 + 0.1 d_3 q_3}{d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3} \in [0; 0.275]$.

Теперь получив оценки переменных X , Y и сгенерировав стандартную нормальную случайную величину ε , мы можем получить необходимые характеристики.

Таблица 1 – Средние значения случайной величины τ_2

	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.011	0.044	0.1	0.177	0.277
$Y = 0.1$	0.1	0.114	0.148	0.205	0.283	0.383
$Y = 0.2$	0.2	0.215	0.251	0.308	0.387	0.488
$Y = 0.3$	0.3	0.316	0.353	0.411	0.491	0.592
$Y = 0.4$	0.4	0.417	0.455	0.514	0.594	0.695
$Y = 0.5$	0.5	0.518	0.557	0.616	0.697	0.799

Таблица 2 – Дисперсия случайной величины τ_2

	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.001	0.014	0.072	0.229	0.558
$Y = 0.1$	0	0.005	0.03	0.108	0.293	0.658
$Y = 0.2$	0	0.009	0.046	0.144	0.357	0.759
$Y = 0.3$	0	0.013	0.062	0.18	0.421	0.859
$Y = 0.4$	0	0.017	0.078	0.216	0.485	0.959
$Y = 0.5$	0	0.021	0.094	0.252	0.548	1.058

Таблицы 1-2 позволяют определить характеристики случайной величины τ_2 , а, следовательно, и величины $t_2 = \tau_2 \cdot T$. Выбор значения в таблице зависит от исходных данных. В том случае, если X и/или Y принимают промежуточные

значения, следует воспользоваться методами интерполяции. Также стоит отметить, что длина интервала значений Y зависит от k_3 .

Найдем характеристики случайной величины Y_m :

$$M(Y_m) = a_1 + a_2 M(k_2) + a_3 M(k_3). \quad (37)$$

Из (37) видно, что для получения характеристик случайной величины Y_m необходимо найти характеристики величин k_2 и k_3 .

$$M(k_3) = \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2}. \quad (38)$$

При проведении усреднения величины k_3 по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$ представляет собой нечетную функцию по переменной ε , поэтому $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. Здесь $f(\varepsilon)$ – плотность вероятности случайной величины ε . Кроме того, $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

Среднее значение величины k_2 нельзя вычислить аналитически, поэтому смоделируем его. Для этого преобразуем выражение (30):

$$k_2 = \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{(b + b_2)} \cdot \frac{b_2}{a_2} + \frac{(c + c_2)}{(b + b_2)} \cdot \frac{(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{(c + c_2)^2 \varepsilon^2}{(b + b_2)^2} + \frac{4(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}}, \quad (39)$$

и так как $a_i = d_i q_i$, $b_i = d_i \mu_i = \frac{d_i q_i}{T}$, $c_i = d_i \sigma_i = \frac{d_i \sigma_{q_i}}{\sqrt{T}}$, где $i = \overline{1, 3}$, получим

$$\begin{aligned}
k_2 = & \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3)}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)} + \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)} \cdot \\
& \cdot \frac{(d_2 q_2 (d_1 \sigma_{q_1} + d_3 \sigma_{q_3}) - (d_1 q_1 + d_3 q_3) d_2 \sigma_{q_2})}{2d_2 q_2 (d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)} \varepsilon^2 - \\
& - \left(\frac{d_2 q_2 (d_1 \sigma_{q_1} + d_3 \sigma_{q_3}) - (d_1 q_1 + d_3 q_3) d_2 \sigma_{q_2}}{2d_2 q_2 (d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)} \right) \varepsilon \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})^2 \varepsilon^2}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)^2} + \frac{4(d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3))}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}}
\end{aligned} \tag{40}$$

Сделаем замену переменных: $X = \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3 (1 - k_3)}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}$;

$$Y = \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}; Z = \frac{(d_2 q_2 (d_1 \sigma_{q_1} + d_3 \sigma_{q_3}) - (d_1 q_1 + d_3 q_3) d_2 \sigma_{q_2})}{2d_2 q_2 (d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}.$$

Таким образом, получим выражение:

$$k_2 = X + Y \cdot Z \cdot \varepsilon^2 - Z \cdot \varepsilon \sqrt{Y^2 \cdot \varepsilon^2 + 4X}. \tag{41}$$

Оценим значения переменных X , Y и Z . Так для переменной Y несложно заметить, что $Y \in [0;1]$. Переменная Z лежит в интервале $Y \in [-0.25;0.25]$. Интервал значений X может быть разным и зависит от значения k_3 . Доля ресурса 3 в начальный момент, как известно, лежит в интервале от 0 до 1. Поэтому необходимо оценить значения переменной X для каждого k_3 . Для этого интервал значений k_3 разобьем на подынтервалы с шагом 0.2. В результате получим:

- при $k_3 = 0$ $X \in [0;0.5]$;
- при $k_3 = 0.2$ $X \in [0;0.45]$;
- при $k_3 = 0.4$ $X \in [0;0.4]$;
- при $k_3 = 0.6$ $X \in [0;0.35]$;
- при $k_3 = 0.8$ $X \in [0;0.3]$;
- при $k_3 = 0.9$ $X \in [0;0.275]$;

Теперь получив оценки переменных X , Y , Z и сгенерировав стандартную нормальную случайную величину ε , мы можем получить необходимые характеристики.

Таблица 3 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = -0.25$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.091	0.187	0.284	0.381	0.479
$Y = 0.2$	-0.053	0.041	0.137	0.234	0.332	0.43
$Y = 0.4$	-0.107	-0.011	0.086	0.183	0.281	0.379
$Y = 0.6$	-0.16	-0.064	0.034	0.132	0.23	0.328
$Y = 0.8$	-0.214	-0.116	-0.019	0.08	0.178	0.276
$Y = 1$	-0.267	-0.169	-0.071	0.027	0.125	0.224

Таблица 4 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = -0.15$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.094	0.192	0.29	0.389	0.487
$Y = 0.2$	-0.032	0.064	0.162	0.26	0.359	0.458
$Y = 0.4$	-0.064	0.033	0.131	0.23	0.329	0.427
$Y = 0.6$	-0.096	0.002	0.1	0.199	0.298	0.397
$Y = 0.8$	-0.128	-0.03	0.069	0.168	0.267	0.366
$Y = 1$	-0.16	-0.062	0.037	0.136	0.235	0.334

Таблица 5 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = -0.05$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.098	0.197	0.297	0.396	0.496
$Y = 0.2$	-0.011	0.088	0.187	0.287	0.386	0.486

Продолжение таблицы 5

	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0.4$	-0.021	0.078	0.177	0.277	0.376	0.476
$Y = 0.6$	-0.032	0.067	0.167	0.266	0.366	0.466
$Y = 0.8$	-0.043	0.057	0.156	0.256	0.356	0.455
$Y = 1$	-0.053	0.046	0.146	0.245	0.345	0.445

Таблица 6 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = 0.05$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.102	0.203	0.303	0.404	0.504
$Y = 0.2$	0.011	0.112	0.213	0.313	0.414	0.514
$Y = 0.4$	0.021	0.122	0.223	0.323	0.424	0.524
$Y = 0.6$	0.032	0.133	0.233	0.334	0.434	0.534
$Y = 0.8$	0.043	0.143	0.244	0.344	0.444	0.545
$Y = 1$	0.053	0.154	0.254	0.355	0.455	0.555

Таблица 7 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = 0.15$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.106	0.208	0.31	0.411	0.513
$Y = 0.2$	0.032	0.136	0.238	0.34	0.441	0.542
$Y = 0.4$	0.064	0.167	0.269	0.37	0.471	0.573
$Y = 0.6$	0.096	0.198	0.3	0.401	0.502	0.603
$Y = 0.8$	0.128	0.23	0.331	0.432	0.533	0.634
$Y = 1$	0.16	0.262	0.363	0.464	0.565	0.666

Таблица 8 – Средние значения случайной величины k_2

	$Z = 0.25$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.109	0.213	0.316	0.419	0.521
$Y = 0.2$	0.053	0.159	0.263	0.366	0.468	0.57
$Y = 0.4$	0.107	0.211	0.314	0.417	0.519	0.621
$Y = 0.6$	0.16	0.264	0.366	0.468	0.57	0.672
$Y = 0.8$	0.214	0.316	0.419	0.52	0.622	0.724
$Y = 1$	0.267	0.369	0.471	0.573	0.675	0.776

Таким образом, среднее значение минимально необходимого запаса оборотных средств Y_m равно

$$M(Y_m) = a_1 + a_2 M(k_2) + a_3 \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2(b + b_3)^2}, \quad (42)$$

Где $M(k_2)$ определяется из таблиц 2-8. Выбор значения в таблице зависит от исходных данных. В том случае, если переменные X , Y , Z принимают промежуточные значения, следует воспользоваться методами интерполяции. Также стоит отметить, что длина интервала значений переменной X зависит от k_3 .

Найдем дисперсию Y_m . Для этого вычислим разность:

$$\begin{aligned} Y_m - M(Y_m) &= a_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 - a_1 - a_2 M(k_2) - a_3 M(k_3) = \\ &= a_2 (k_2 - M(k_2)) + a_3 (k_3 - M(k_3)) \end{aligned}, \quad (43)$$

возведем в квадрат:

$$\begin{aligned} (Y_m - M(Y_m))^2 &= a_2^2 (k_2 - M(k_2))^2 + a_3^2 (k_3 - M(k_3))^2 + \\ &+ 2a_2 a_3 (k_2 - M(k_2))(k_3 - M(k_3)) \end{aligned} \quad (44)$$

и усредним

$$D(Y_m) = a_2^2 D(k_2) + a_3^2 D(k_3) + 2a_2 a_3 M \{ (k_2 - M(k_2))(k_3 - M(k_3)) \} = \\ = a_2^2 D(k_2) + a_3^2 D(k_3) + 2a_2 a_3 [M(k_2 k_3) - M(k_2)M(k_3)] \quad (45)$$

Найдем $D(k_3)$:

$$k_3 - M(k_3) = \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} (\varepsilon^2 - 1) - \\ - \left(\frac{b_3 c - b c_3}{2a_3(b + b_3)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)} \quad (46)$$

Возведем в квадрат (46):

$$(k_3 - M(k_3))^2 = \frac{(c + c_3)^2 (b_3 c - b c_3)^2 (\varepsilon^2 - 1)^2}{4a_3^2 (b + b_3)^4} + \\ + \frac{(b_3 c - b c_3)^2 \varepsilon^2 ((c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3))}{4a_3^2 (b + b_3)^4} - \\ - 2 \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)(\varepsilon^2 - 1)(b_3 c - b c_3)}{4a_3^2 (b + b_3)^4} \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)} \quad (47)$$

и усредним

$$D(k_3) = \frac{(b_3 c - b c_3)^2}{4a_3^2 (b + b_3)^4} (5(c + c_3)^2 + 4a_3(b + b_3)) \quad (48)$$

При проведении усреднения величины $(k_3 - M(k_3))^2$ по переменной ε было учтено, что выражение $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon^2 - 1)\sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}$ представляет собой нечетную функцию переменной ε , поэтому, $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. При этом $M(\varepsilon^2) = 1$, $M(\varepsilon^4) = 3$, $M((\varepsilon^2 - 1)^2) = 2$.

Дисперсия величины k_2 определяется из таблиц 9-14:

Таблица 9 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = -0.25$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.024	0.048	0.073	0.097	0.121
$Y = 0.2$	0.014	0.039	0.064	0.089	0.114	0.139
$Y = 0.4$	0.057	0.082	0.107	0.133	0.158	0.183
$Y = 0.6$	0.128	0.153	0.179	0.204	0.229	0.254
$Y = 0.8$	0.227	0.253	0.278	0.304	0.329	0.354
$Y = 1$	0.355	0.381	0.406	0.432	0.457	0.482

Таблица 10 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = -0.15$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.009	0.017	0.026	0.035	0.044
$Y = 0.2$	0.005	0.014	0.023	0.032	0.041	0.05
$Y = 0.4$	0.02	0.03	0.039	0.048	0.057	0.066
$Y = 0.6$	0.046	0.055	0.064	0.073	0.083	0.092
$Y = 0.8$	0.082	0.091	0.1	0.109	0.118	0.128
$Y = 1$	0.128	0.137	0.146	0.155	0.165	0.174

Таблица 11 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = -0.05$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
$Y = 0.2$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006
$Y = 0.4$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007
$Y = 0.6$	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01
$Y = 0.8$	0.009	0.01	0.011	0.012	0.013	0.014
$Y = 1$	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.019

Таблица 12 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = 0.05$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
$Y = 0.2$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006
$Y = 0.4$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007
$Y = 0.6$	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01
$Y = 0.8$	0.009	0.01	0.011	0.012	0.013	0.014
$Y = 1$	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.019

Таблица 13 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = 0.15$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.009	0.017	0.026	0.035	0.044
$Y = 0.2$	0.005	0.014	0.023	0.032	0.041	0.05
$Y = 0.4$	0.02	0.03	0.039	0.048	0.057	0.066
$Y = 0.6$	0.046	0.055	0.064	0.073	0.083	0.092
$Y = 0.8$	0.082	0.091	0.1	0.109	0.118	0.128
$Y = 1$	0.128	0.137	0.146	0.155	0.165	0.174

Таблица 14 – Дисперсия случайной величины k_2

	$Z = 0.25$					
	$X = 0$	$X = 0.1$	$X = 0.2$	$X = 0.3$	$X = 0.4$	$X = 0.5$
$Y = 0$	0	0.024	0.048	0.073	0.097	0.121
$Y = 0.2$	0.014	0.039	0.064	0.089	0.114	0.139
$Y = 0.4$	0.057	0.082	0.107	0.133	0.158	0.183
$Y = 0.6$	0.128	0.153	0.179	0.204	0.229	0.254
$Y = 0.8$	0.227	0.253	0.278	0.304	0.329	0.354
$Y = 1$	0.355	0.381	0.406	0.432	0.457	0.482

Выбор значения в таблице зависит от исходных данных. В том случае, если переменные X , Y , Z принимают промежуточные значения, следует воспользоваться методами интерполяции. Также стоит отметить, что длина интервала значений переменной X зависит от k_3 .

Найдем $M(k_2 k_3)$

$$\begin{aligned}
 M(k_2 k_3) = & \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{a_2(b + b_2)} \cdot \frac{b_2 b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{b_3}{b + b_3} + \\
 & + \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{a_2(b + b_2)} b_2 \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} + 3 \cdot \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \\
 & \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} - \\
 & - \frac{b_3}{b + b_3} \cdot \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) M \left[\varepsilon \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}} \right] + \\
 & - \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} \cdot \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) \cdot \\
 & \cdot M \left[\varepsilon^3 \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}} \right] + \\
 & + \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) \cdot \left(\frac{b_3 c - b c_3}{2a_3(b + b_3)} \right) M \left[\begin{aligned} & \varepsilon^2 \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}} \cdot \\ & \cdot \sqrt{\frac{(c + c_3)^2}{(b + b_3)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{a_3}{(b + b_3)}} \end{aligned} \right]. \quad (49)
 \end{aligned}$$

Таким образом, сделав некоторую замену переменных, получим выражение (50), содержащее величины, средние значения которых не поддаются аналитическому вычислению и которые впоследствии в данной работе были смоделированы:

$$\begin{aligned}
M(k_2 k_3) = & \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{a_2(b + b_2)} \cdot \frac{b_2 b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{b_3}{b + b_3} + \\
& + \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{a_2(b + b_2)} b_2 \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} + 3 \cdot \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \\
& \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} - \frac{b_3}{b + b_3} \cdot \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) M[A] + \\
& - \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} \cdot \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) \cdot M[B] + \\
& + \left(\frac{b_2 c - b c_2}{2a_2(b + b_2)} \right) \cdot \left(\frac{b_3 c - b c_3}{2a_3(b + b_3)} \right) M[C]
\end{aligned} \tag{50}$$

где $A = \varepsilon \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}}$;

$$B = \varepsilon^3 \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}}$$

$$C = \varepsilon^2 \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{(b + b_2)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{(a_2 + a_3(1 - k_3))}{(b + b_2)}} \cdot \sqrt{\frac{(c + c_3)^2}{(b + b_3)^2} \varepsilon^2 + 4 \frac{a_3}{(b + b_3)}}.$$

Если принять $X_1 = \frac{d_2 q_2 + d_3 q_3(1 - k_3)}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}$; $X_2 = \frac{d_3 q_3}{(d_1 q_1 + d_2 q_2 + 2d_3 q_3)}$,

$$Y_1 = \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + 2d_2 \sigma_{q_2} + d_3 \sigma_{q_3})}{(d_1 q_1 + 2d_2 q_2 + d_3 q_3)}, \quad Y_2 = \frac{(d_1 \sigma_{q_1} + d_2 \sigma_{q_2} + 2d_3 \sigma_{q_3})}{(d_1 q_1 + d_2 q_2 + 2d_3 q_3)} \quad \text{и учесть, что}$$

$X_2 \in [0; 0.25]$, $Y_1 \in [0; 1]$, $Y_2 \in [0; 1]$, а X_1 принимает разные значения в зависимости от k_3 , т.е.

- при $k_3 = 0$ $X_1 \in [0; 0.5]$;
- при $k_3 = 0.2$ $X_1 \in [0; 0.45]$;
- при $k_3 = 0.4$ $X_1 \in [0; 0.4]$;
- при $k_3 = 0.6$ $X_1 \in [0; 0.35]$;
- при $k_3 = 0.8$ $X_1 \in [0; 0.3]$;

– при $k_3 = 0.9$ $X_1 \in [0; 0.275]$,

можно смоделировать случайные величины A , B и C (таблицы 15-17):

Таблица 15 – Средние значения случайной величины A

	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	-0.019	-0.038	-0.057	-0.076	-0.095
$Y_1 = 0.2$	-0.038	-0.043	-0.055	-0.071	-0.087	-0.104
$Y_1 = 0.4$	-0.053	-0.058	-0.068	-0.081	-0.096	-0.112
$Y_1 = 0.6$	-0.065	-0.069	-0.078	-0.09	-0.104	-0.119
$Y_1 = 0.8$	-0.076	-0.079	-0.087	-0.098	-0.111	-0.126
$Y_1 = 1$	-0.085	-0.087	-0.094	-0.105	-0.118	-0.132

Таблица 16 – Средние значения случайной величины B

	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	-0.095	-0.191	-0.286	-0.382	-0.477
$Y_1 = 0.2$	-0.124	-0.159	-0.231	-0.315	-0.404	-0.495
$Y_1 = 0.4$	-0.175	-0.202	-0.263	-0.34	-0.424	-0.512
$Y_1 = 0.6$	-0.215	-0.237	-0.291	-0.363	-0.443	-0.529
$Y_1 = 0.8$	-0.248	-0.267	-0.317	-0.384	-0.461	-0.544
$Y_1 = 1$	-0.277	-0.295	-0.341	-0.404	-0.479	-0.559

Таблица 17 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.615	0.87	1.066	1.23	1.376
$Y_1 = 0.2$	0.31	0.699	0.932	1.117	1.275	1.416

Продолжение таблицы 17

$Y_1 = 0.4$	0.62	0.893	1.09	1.254	1.398	1.528
$Y_1 = 0.6$	0.929	1.138	1.303	1.446	1.574	1.693
$Y_1 = 0.8$	1.239	1.407	1.547	1.672	1.787	1.894
$Y_1 = 1$	1.549	1.688	1.81	1.92	2.023	2.12

Таким образом дисперсия Y_m находится путем подстановки формул 38, 48 и выбора значений из таблиц 9-17 и А.1-А.11 приложения А.

Вычислим момент окончания цикла t_c для случая, когда все ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции. Уравнение (24) примет вид

$$bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma, \quad (51)$$

где $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2 + d_3q_3$ – суммарный запас ресурсов.

Решим его и вычислим характеристики:

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2}\sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2}\sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma}, \quad (52)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^2}, \quad (53)$$

$$D(t_c) = \frac{c^2}{4b^4}(5c^2 + 4bY_\Sigma) = \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^4} \cdot (5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)Y_\Sigma) \quad (54)$$

Таким образом, получены аналитически среднее значение и стандартное отклонение момента пополнения третьего ресурса : $M(t_3) = \frac{a_3}{b+b_3} + \frac{(c+c_3)^2}{2(b+b_3)^2}$,

$$\sqrt{D(t_3)} = \sqrt{\frac{(c+c_3)^2}{4(b+b_3)^4}(5(c+c_3)^2 + 4(b+b_3)a_3)}, \text{ и среднее значение и стандартное}$$

отклонение момента пополнения запасов ресурсов (момента окончания цикла):

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}, \quad \sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b^2} \sqrt{(5c^2 + 4bY_\Sigma)}.$$

Среднее значение нормировочного множителя $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$:

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a}. \quad (55)$$

2.2.2 Определение характеристик случайных величин путем пренебрежения слагаемого

Найдем характеристики случайной величины t_2 :

$$M(t_2) = \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2}{2(b + b_2)^2} = \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{b_1 + 2b_2 + b_3} + \frac{(c_1 + 2c_2 + c_3)^2}{2(b_1 + 2b_2 + b_3)^2}. \quad (56)$$

В связи с необходимостью построения полностью аналитической модели, было принято решение о пренебрежении слагаемого

$$- \frac{(c + c_2)\epsilon}{2(b + b_2)^2} \cdot \sqrt{(c + c_2)^2 \epsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1 - k_3))(b + b_2)} \quad \text{при проведении операции}$$

усреднения. В таком случае нам не потребуется использовать численные методы, однако погрешность вычислений может колебаться в интервале от 0 до 0,066.

Дисперсия случайной величины t_2 равна:

$$D(t_2) = \frac{(c + c_2)^2}{4(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + (a_2 + a_3(1 - M(k_3)))(b + b_2)). \quad (57)$$

В данном случае при проведении операции усреднения также было исключено слагаемое, для которого невозможно вычислить среднее значение

аналитически. В результате полученное решение имеет погрешность, колеблющуюся в интервале от 0 до 0,211.

Найдем характеристики случайной величины Y_m :

$$M(Y_m) = a_1 + a_2 M(k_2) + a_3 M(k_3). \quad (58)$$

Из (16) видно, что для получения характеристик случайной величины Y_m необходимо найти характеристики величин k_2 и k_3 :

$$M(k_3) = \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2}, \quad (59)$$

$$M(k_2) = \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{a_2(b + b_2)} b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2}. \quad (60)$$

Таким образом, среднее значение минимально необходимого запаса оборотных средств Y_m равно

$$\begin{aligned} M(Y_m) = & a_1 + \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{(b + b_2)} \cdot b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2(b + b_2)^2} + \\ & + a_3 \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2(b + b_3)^2}, \end{aligned} \quad (61)$$

Однако в данном случае стоит учитывать погрешность, полученную в результате операции усреднения случайной величины k_2 , которая может колебаться в интервале от 0 до 0,033.

Найдем дисперсию Y_m :

$$D(Y_m) = a_2^2 D(k_2) + a_3^2 D(k_3) + 2a_2 a_3 [M(k_2 k_3) - M(k_2)M(k_3)], \quad (62)$$

$$\text{где } D(k_3) = \frac{(b_3 c - b c_3)^2}{4a_3^2(b + b_3)^4} (5(c + c_3)^2 + 4a_3(b + b_3));$$

$$D(k_2) = \frac{(b_2c - bc_2)^2}{4a_2^2(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + 4(a_2 + a_3(1 - M(k_3)))(b + b_2));$$

$$M(k_2k_3) = \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{a_2(b + b_2)} \cdot \frac{b_2b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_2)(b_2c - bc_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{b_3}{b + b_3} +$$

$$+ \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{a_2(b + b_2)} b_2 \cdot \frac{(c + c_3)(b_3c - bc_3)}{2a_3(b + b_3)^2} + 3 \cdot \frac{(c + c_2)(b_2c - bc_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{(c + c_3)(b_3c - bc_3)}{2a_3(b + b_3)^2}$$

Погрешность вычислений в результате составит 0,102 в худшем случае.

Вычислим момент окончания цикла t_c для случая, когда все ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции. Уравнение (24) примет вид

$$bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma, \quad (63)$$

где $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2 + d_3q_3$ – суммарный запас ресурсов.

Решим его и вычислим характеристики:

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma}, \quad (64)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^2}, \quad (65)$$

$$D(t_c) = \frac{c^2}{4b^4} (5c^2 + 4bY_\Sigma) = \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^4} \cdot$$

$$\cdot (5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)Y_\Sigma) \quad (66)$$

Таким образом, получены аналитически средние значения и стандартные отклонения моментов пополнения второго и третьего ресурсов :

$$M(t_2) = \frac{a_2 + a_3(1 - M(k_3))}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2}{2(b + b_2)^2}, M(t_3) = \frac{a_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)^2}{2(b + b_3)^2},$$

$$\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c + c_2)^2}{4(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + (a_2 + a_3(1 - M(k_3)))(b + b_2))},$$

$$\sqrt{D(t_3)} = \sqrt{\frac{(c + c_3)^2}{4(b + b_3)^4} (5(c + c_3)^2 + 4(b + b_3)a_3)}, \text{ и среднее значение и стандартное}$$

отклонение момента пополнения запасов ресурсов (момента окончания цикла):

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}, \quad \sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b^2} \sqrt{5c^2 + 4bY_\Sigma}.$$

Среднее значение нормировочного множителя $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$:

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a}. \quad (67)$$

3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В качестве исходных данных использованы данные по приходу сырья и материалов на предприятии ТОО "СП ВГ-Пласт" за июнь 2014 г. Выпускаемая продукция: ПВХ- подоконная доска, ПВХ- стеновые панели, прочее.

В таблице 18 приведены данные по запасам сырья и материалов в июне 2014 года.

Таблица 18 – Данные по приходу сырья и материалов

№	Наименование	ед. измерения	Июнь 2014	
			количество	сумма в тенге
1	Аддетивы	кг	17900	11827160
2	ПВХ микросуспензионный	кг	58000	10234204
3	Мел гидрофобный	кг	201915	7505878

3.1 Двухпродуктовая модель

Рассчитаем затрачиваемые оборотные средства для случая, когда закупается два вида ресурсов из таблицы 1. Для удобства выберем первые два наименования. Полагаем, что в начале цикла первый ресурс закупается полностью, а второй ресурс – частично, кроме того, считаем $a_1 > a_2$. Предположим, что оба ресурса расходуются одновременно в одинаковой пропорции, но случайным образом/

В табл. 19 приведены реальные оборотные средства на создание запасов и минимально-необходимые средства. Здесь же приведена выгода в % на создание запаса оборотных средств.

Таблица 19 – Оборотные средства на создание запасов

Реально затраченные средства, тенге	Минимально-необходимые средства, тенге	Выгода, %
22061364	15070296	31.7

Таким образом, согласно модели 1 ресурс следует закупить в полном объеме в начале периода, а второй ресурс в объеме $k_2 = 0.317$. Тогда момент времени докупки ресурса 2 при условии дефицита оборотных средств в начале цикла $t_2 = 9.5$ дней.

3.2 Трехпродуктовая модель

Рассчитаем затрачиваемые оборотные средства для случая, когда закупаются три вида ресурсов из таблицы 1. Полагаем, что в начале цикла первый ресурс закупается полностью, а второй и третий ресурсы – частично, кроме того, считаем $a_1 > a_2 > a_3$. Предположим, что все ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции, но случайным образом.

В табл. 20 приведены реальные оборотные средства на создание запасов и минимально-необходимые средства. Здесь же приведена выгода в % на создание запаса оборотных средств

Таблица 20 – Оборотные средства на создание запасов

Реально затраченные средства, тенге	Минимально-необходимые средства, тенге	Выгода, %
29567242	17517594	40.8

Таким образом, согласно модели 1 ресурс следует закупить в полном объеме в начале периода, а второй и третий ресурсы в объемах $k_2 = 0.408$ и

$k_3 = 0.202$, соответственно. Тогда момент времени докупки ресурса 2 при условии дефицита оборотных средств в начале цикла $t_2 = 12.2$ дней, а момент времени докупки ресурса 3 – $t_3 = 6.1$ дней. Следует отметить, что при моделировании на реальных данных были использованы оба варианта построения модели. При сравнении полученных результатов, было выявлено, что разница между ними незначительна.

4 ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ

4.1 Предпроектный анализ

4.1.1 Потенциальные потребители результатов исследования

Создание запасов, их хранение, распределение и пополнение характерны для всех видов хозяйственной деятельности. Готовую модель управления запасами могут использовать:

- Индивидуальные предприниматели;
- Предприятия малого бизнеса;
- Средние предприятия;
- Крупные предприятия.

		Вид предоставляемых услуг			
		Мониторинг наличия ресурсов на складе	Определение минимально необходимого оборотного капитала	Определение времени докупки недостающих ресурсов	Продажа готового продукта
Размер компании	Крупные				
	Средние				
	Мелкие				

Рис. 1. Карта сегментирования рынка услуг по разработке математической модели

- Фирма А
 - Фирма Б
 - Фирма В

Продукт: трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок с минимальным оборотным капиталом.

4.1.2 Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения

Главной задачей управления запасами является минимизация издержек, что позволяет вести предприятиям наиболее эффективную и выгодную деятельность. Уже создано множество различных стохастических моделей управления запасами, которые в той или иной мере позволяют оптимизировать деятельность предприятия.

Ниже представлена оценочная карта для сравнения конкурентных методологий (таблица 21):

Таблица 21 – Оценочная карта для сравнения конкурентных методологий

Критерии оценки	Вес критерия	Баллы			Конкурентоспособность		
		Б _ф	Б _{к1}	Б _{к2}	К _ф	К _{к1}	К _{к2}
1	2	3	4	5	6	7	8
Технические критерии оценки ресурсоэффективности							
1. Повышение производительности труда пользователя	0,046	4	4	3	0,184	0,184	0,138
2. Удобство в эксплуатации (соответствует требованиям потребителей)	0,15	4	4	4	0,6	0,6	0,6
3. Помехоустойчивость	0,01	5	5	4	0,05	0,05	0,04
4. Энергоэкономичность	0,05	5	4	4	0,25	0,2	0,2
5. Надежность	0,12	5	4	3	0,6	0,48	0,36
6. Уровень шума	0,001	1	1	1	0,001	0,001	0,001
7. Безопасность	0,005	5	5	5	0,025	0,025	0,025
8. Потребность в ресурсах памяти	0,09	4	4	4	0,36	0,36	0,36
9. Функциональная мощность (предоставляемые возможности)	0,05	5	4	3	0,25	0,2	0,15
10. Простота эксплуатации	0,15	4	3	2	0,6	0,45	0,3
11. Качество интеллектуального интерфейса	0,09	4	4	4	0,36	0,36	0,36
12. Возможность подключения в сеть ЭВМ	0,05	5	5	5	0,25	0,25	0,25
Экономические критерии оценки эффективности							
1. Конкурентоспособность продукта	0,02	5	4	4	0,1	0,08	0,08
2. Уровень проникновения на рынок	0,02	4	3	2	0,08	0,06	0,04
3. Цена	0,04	4	3	2	0,16	0,12	0,08
4. Предполагаемый срок эксплуатации	0,01	5	5	5	0,05	0,05	0,05
5. Послепродажное обслуживание	0,01	5	4	2	0,05	0,04	0,02

Продолжение таблицы 21

6. Финансирование научной разработки	0,008	1	2	1	0,008	0,016	0,008
7. Срок выхода на рынок	0,06	3	3	3	0,18	0,18	0,18
8. Наличие сертификации разработки	0,02	4	3	4	0,08	0,06	0,08
Итого	1	82	74	65	4,238	3,766	3,322

Критерии для сравнения и оценки ресурсоэффективности и ресурсосбережения, приведенные в табл. 1, подбираются, исходя из выбранных объектов сравнения с учетом их технических и экономических особенностей разработки, создания и эксплуатации.

Позиция разработки и конкурентов оценивается по каждому показателю экспертным путем по пятибалльной шкале, где 1 – наиболее слабая позиция, а 5 – наиболее сильная. Веса показателей, определяемые экспертным путем, в сумме должны составлять 1.

Анализ конкурентных технических решений определяется по формуле:

$$K = \sum V_i \cdot B_i, \quad (68)$$

где K – конкурентоспособность конкурента;

V_i – вес показателя (в долях единицы);

B_i – балл i -го показателя.

Основываясь на знаниях о конкурентах, можно объяснить следующее:

- Данная модель позволяет добиться большей выгоды за счет того, что недостающие ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса.

- Уязвимость позиции конкурентов обусловлена тем, что недостающие ресурсы восполняются в большем объеме, чем требуется. В результате появляется необходимость в трате дополнительных оборотных средств, а также появляются затраты на хранение остатков.

4.2 SWOT-анализ

SWOT – Strengths (сильные стороны), Weaknesses (слабые стороны), Opportunities (возможности) и Threats (угрозы) – представляет собой

комплексный анализ научно-исследовательского проекта. SWOT-анализ применяют для исследования внешней и внутренней среды проекта.

Таблица 22 – Матрица SWOT

Внутренняя среда Внешняя среда	Сильные стороны научно-исследовательского проекта: С1. Более низкая стоимость производства по сравнению с другими технологиями. С2. Наличие бюджетного финансирования. С3. Квалифицированный персонал. С4. Возможность экономии времени	Слабые стороны научно-исследовательского проекта: Сл1. Наличие множества схожих разработок Сл2. Ограниченное количество продуктов, которые можно включить в модель Сл3. Наличие некоторых погрешностей Сл4. Необходимость проведения дополнительных исследований
Возможности: В1. Появление дополнительного спроса на продукт В2. Привлечение новых клиентов В3. Появление партнеров, заинтересованных в разработке и внедрении нового продукта В4. Повышение стоимости конкурентных разработок	Разработка математической модели для определения времени докупки недостающих ресурсов, которая позволяет поддерживать безостановочный график поставок предприятиями-поставщиками	1. Совершенствование программного продукта 2. Предоставление услуги 3. Расширение круга клиентов за счет повышения удобства эксплуатации
Угрозы: У1. Отсутствие спроса на новые технологии производства У2. Развитая конкуренция технологий производства	1. Продвижение новой технологии с целью появления спроса 2. Сертификация продукта 3. Укрепление конкурентных преимуществ продукта.	1. Продвижение новой методологии 2. Укрепление конкурентных преимуществ продукта

4.3 Оценка готовности проекта к коммерциализации

На какой бы стадии жизненного цикла не находилась научная разработка полезно оценить степень ее готовности к коммерциализации и выяснить уровень собственных знаний для ее проведения (или завершения). Для этого необходимо заполнить специальную форму, содержащую показатели о степени

проработанности проекта с позиции коммерциализации и компетенциям разработчика научного проекта.

Таблица 23 – Бланк оценки степени готовности научного проекта к коммерциализации

№ п/п	Наименование	Степень проработанности научного проекта	Уровень имеющихся знаний у разработчика
1	Определен имеющийся научно-технический задел	5	5
2	Определены перспективные направления коммерциализации научно-технического задела	5	5
3	Определены отрасли и технологии (товары, услуги) для предложения на рынке	5	5
4	Определена товарная форма научно-технического задела для представления на рынок	3	4
5	Определены авторы и осуществлена охрана их прав	3	3
6	Проведена оценка стоимости интеллектуальной собственности	1	3
7	Проведены маркетинговые исследования рынков сбыта	1	4
8	Разработан бизнес-план коммерциализации научной разработки	1	1
9	Определены пути продвижения научной разработки на рынок	2	4
10	Разработана стратегия (форма) реализации научной разработки	1	3
11	Проработаны вопросы международного сотрудничества и выхода на зарубежный рынок	1	1
12	Проработаны вопросы использования услуг инфраструктуры поддержки, получения льгот	1	1
13	Проработаны вопросы финансирования коммерциализации научной разработки	1	1
14	Имеется команда для коммерциализации научной разработки	2	3
15	Проработан механизм реализации научного проекта	3	4
ИТОГО БАЛЛОВ		35	47

Оценка готовности научного проекта к коммерциализации (или уровень имеющихся знаний у разработчика) определяется по формуле:

$$B_{\text{сум}} = \sum B_i$$

где $B_{\text{сум}}$ – суммарное количество баллов по каждому направлению;

B_i – балл по i -му показателю.

Значение $B_{\text{сум}}$ позволяет говорить о мере готовности научной разработки и ее разработчика к коммерциализации. Так, в нашем случае значение $B_{\text{сум}}$ для готовности проекта к коммерциализации получилось равным 35, следовательно, по этому показателю данный проект имеет среднюю перспективность, но относительно уровня имеющихся знаний – перспективность выше среднего.

4.4 Инициация проекта

Группа процессов инициации состоит из процессов, которые выполняются для определения нового проекта или новой фазы существующего. В рамках процессов инициации определяются изначальные цели и содержание и фиксируются изначальные финансовые ресурсы. Определяются внутренние и внешние заинтересованные стороны проекта, которые будут взаимодействовать и влиять на общий результат научного проекта. Данная информация закрепляется в Уставе проекта.

Устав проекта документирует бизнес-потребности, текущее понимание потребностей заказчика проекта, а также новый продукт, услугу или результат, который планируется создать.

Устав научного проекта магистерской работы имеет следующую структуру:

1. Цели и результат проекта. В данном разделе необходимо привести информацию о заинтересованных сторонах проекта, иерархии целей проекта и критериях достижения целей.

Под заинтересованными сторонами проекта понимаются лица или организации, которые активно участвуют в проекте или интересы которых могут быть затронуты как положительно, так и отрицательно в ходе исполнения или в результате завершения проекта. Это могут быть заказчики, спонсоры,

общественность и т.п. Информация по заинтересованным сторонам проекта представлена в таблице 24.

Таблица 24 – Заинтересованные стороны проекта

Заинтересованные стороны проекта	Ожидания заинтересованных сторон
Торговые предприятия	Оптимизация управления запасами, позволяющая сократить издержки на хранение ресурсов
Производственные предприятия	

В таблице 25 представлена информация о иерархии целей проекта и критериях достижения целей.

Таблица 25 – Цели и результат проекта

Цели проекта:	1. Разработать трехпродуктовую модель управления запасами со случайным спросом с равной периодичностью поставок с минимальным оборотным капиталом; 2. Вычислить характеристики случайных величин.
Ожидаемые результаты проекта:	1. Двухпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом; 2. Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом при условии, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса.
Критерии приемки результата проекта:	
Требования к результату проекта:	Требование:
	Адекватность моделей;
	Возможность применения модели в торговых предприятиях;
	Минимальные трудозатраты при использовании модели.

2. Организационная структура проекта. На данном этапе работы необходимо решить следующие вопросы: кто будет входить в рабочую группу данного проекта, определить роль каждого участника в данном проекте, а также

прописать функции, выполняемые каждым из участников и их трудозатраты в проекте (таблица 26).

Таблица 26 – Рабочая группа проекта

№ п/п	ФИО, основное место работы, должность	Роль в проекте	Функции	Трудо-затраты, час.		
				Исп.1	Исп.2	Исп.3
1	Мицель А. А.	Научный руководитель проекта	1. Обеспечение проекта ресурсами со стороны исполнителя; 2. Руководство и координация работы рабочей группы проекта со стороны исполнителя и контроль выполнения поставленных перед ними задач; 3. Контроль статуса проекта, сроков и бюджета; 4. Регулярный анализ хода выполнения проекта; 5. Обеспечение взаимного соответствия выполняемых работ.	727,65	1200	895,54
2	Ставчук Л. Г.	Специалист по проекту	1. Выполнение расчётов по проекту; 2. Выполнение работ по адаптации полученной модели; 3. Подготовка отчетов о текущем статусе проекта.	989,05	5368	1032,2
ИТОГО:				1716,7	6568	1927,74

5 СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ

5.1 Планирование научно-исследовательских работ

5.1.1 Иерархическая структура работ проекта

Иерархическая структура работ (ИСР) – детализация укрупненной структуры работ. В процессе создания ИСР структурируется и определяется содержание всего проекта. На рис. 2 представлена иерархическая структура работ по проекту.

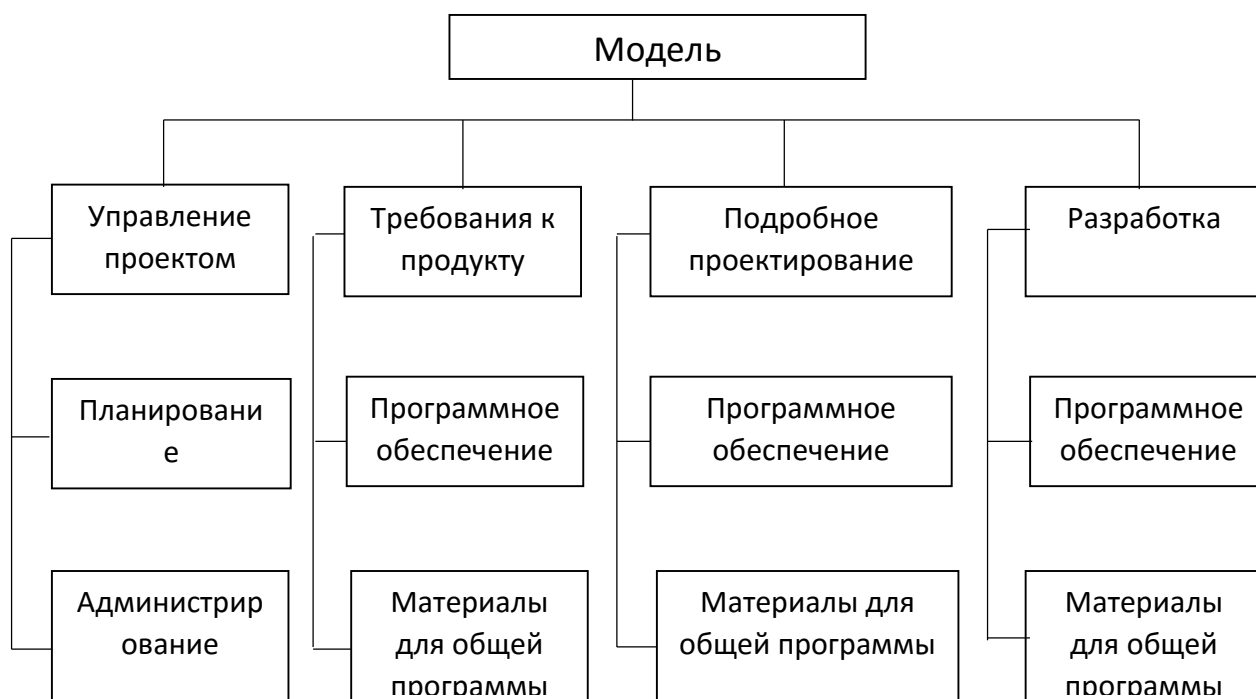


Рис. 2. Иерархическая структура работы

5.1.2 Контрольные события проекта

В рамках данного раздела необходимо определить ключевые события проекта, определить их даты и результаты, которые должны быть получены по состоянию на эти даты.

Таблица 27 – Контрольные события проекта

Основные этапы	№ раб	Содержание работ
Разработка технического задания	1	Составление и утверждение технического задания
Выбор направления исследований	2	Подбор и изучение материалов по теме
	3	Проведение патентных исследований
	4	Выбор направления исследований
	5	Календарное планирование работ по теме
Теоретические и экспериментальные исследования	6	Проведение теоретических расчетов и обоснований
	7	Построение макетов (моделей) и проведение экспериментов
	8	Сопоставление результатов экспериментов с теоретическими исследованиями
Обобщение и оценка результатов	9	Оценка эффективности полученных результатов
	10	Определение целесообразности проведения ОКР
<i>Проведение ОКР</i>		
Разработка технической документации и проектирование	11	Выбор и расчет конструкции
	12	Оценка эффективности производства и применения проектируемого изделия
Изготовление и испытание макета (опытного образца)	13	Конструирование и изготовление макета (опытного образца)
	14	Лабораторные испытания макета
Оформление отчета по НИР (комплекта документации по ОКР)	15	Составление пояснительной записки (эксплуатационно-технической документации)
	16	Оформление патента

5.1.3 План проекта

В рамках планирования научного проекта необходимо построить календарный и сетевой графики проекта.

Линейный график проекта представляется в виде таблицы (таблица 28):

Таблица 28 – Календарный план проекта

Код работ ы (из ИСР)	Название	Длительность, дни	Дата начала работ	Дата окончания работ	Состав участников (ФИО ответственных исполнителей)
1	Разработка технического задания	30	01.09.2015	01.10.201 5	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.
2	Изучение литературы	30	01.09.2014	01.10.201 5	Ставчук Л. Г.
3	Перевод иностранной литературы	20	11.09.2015	01.10.201 5	Ставчук Л. Г.
4	Календарное планирование работ по теме	10	01.10.2015	11.10.201 5	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.
5	Реализация теоретических расчетов и обоснований	120	11.10.2015	11.02.201 6	Ставчук Л. Г.
6	Непосредственное построение модели	60	11.02.2016	11.04.201 6	Ставчук Л. Г.
7	Оценка эффективности полученных результатов	30	11.04.2016	11.05.201 6	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.
8	Составление пояснительной записки	28	11.05.2016	01.06.201 6	Ставчук Л. Г.
И т о г о:		328			

Диаграмма Ганта – это тип столбчатых диаграмм (гистограмм), который используется для иллюстрации календарного плана проекта, на котором работы по теме представляются протяженными во времени отрезками, характеризующимися датами начала и окончания выполнения данных работ.

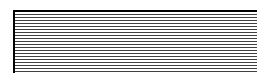
Диаграмма Ганта представлена в виде таблицы 29.

Таблица 29 – Календарный план-график проведения НИОКР по теме.

Код рабо ты	Название	Исполнитель	Т, кале ндар ные дни	2015				2016				
				9	10	11	12	1	2	3	4	5
1	Разработка технического задания	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.	30									
2	Изучение литературы	Ставчук Л. Г.	30									
3	Перевод иностранной литературы	Ставчук Л. Г.	20									
4	Календарное планирование работ по теме	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.	10									
5	Реализация теоретических расчетов и обоснований	Ставчук Л. Г.	120									
6	Непосредственное построение модели	Ставчук Л. Г.	60									
7	Оценка эффективности полученных результатов	Мицель А. А., Ставчук Л. Г.	30									
8	Составление пояснительной записки	Ставчук Л. Г.	28									



– Научный руководитель



– Студент

5.1.4 Бюджет научного исследования

При планировании бюджета научного исследования обеспечено полное и достоверное отражение всех видов планируемых расходов, необходимых для его выполнения. Планируемые затраты представлены в таблице .

Таблица 30. – Группировка затрат по статьям

	Статьи										
Вид работ	Сырье, материалы (за вычетом возвратных отходов), покупные изделия и полуфабрикаты	Специальное оборудование для научных (экспериментальных) работ	Основная заработная плата			Оплата работ, выполняемых сторонними организациями и предприятиями	Прочие прямые расходы	Накладные расходы	Итого плановая себестоимость		
			Исп.1	Исп.2	Исп.3				Исп.1	Исп.2	Исп.3
1. Обеспечение проекта ресурсами со стороны исполнителя	-	101000	545467,3 1	909100	677279,5	-	-	-	1343300,87	3546313	1570569,9
2. Выполнение работ по программированию	-		470466	1317304	564559,2	-	-				
3. Выполнение технологических расчётов по проекту	-		226367,5 6	1218309	227731,2	-	-				

Таблица 31 – Расчет затрат по статье «Спецоборудование для научных работ»

№ п/п	Наименование оборудования	Кол-во единиц оборудования	Цена единицы оборудования, тыс.руб.	Общая стоимость оборудования, тыс.руб.
1.	Персональный компьютер	2	20	40
2.	Лицензия на программный пакет MathCAD 14 Full	1	11	11

Статья включает основную заработную плату работников, непосредственно занятых выполнением проекта, (включая премии, доплаты) и дополнительную заработную плату.

$$C_{зп} = Z_{осн} + Z_{доп},$$

где $Z_{осн}$ – основная заработная плата;

$Z_{доп}$ – дополнительная заработная плата.

Основная заработная плата ($Z_{осн}$) руководителя (лаборанта, инженера) от предприятия (при наличии руководителя от предприятия) рассчитывается по следующей формуле:

$$Z_{осн} = Z_{дн} \cdot T_{раб},$$

где $Z_{осн}$ – основная заработная плата одного работника;

T_p – продолжительность работ, выполняемых научно-техническим работником, раб. дн. (таблица 32);

$Z_{дн}$ – среднедневная заработная плата работника, руб.

Среднедневная заработная плата рассчитывается по формуле:

$$Z_{дн} = \frac{Z_m \cdot M}{F_d},$$

где Z_m – месячный должностной оклад работника, руб.;

M – количество месяцев работы без отпуска в течение года:

при отпуске в 24 раб. дня $M = 11,2$ месяца, 5-дневная неделя;

при отпуске в 48 раб. дней $M = 10,4$ месяца, 6-дневная неделя;

F_d – действительный годовой фонд рабочего времени научно-технического персонала, раб. дн. (таблица 32).

Таблица 32 – Баланс рабочего времени

Показатели рабочего времени	Научный руководитель проекта	Специалист по проекту
Календарное число дней	365	365
Количество нерабочих дней - выходные дни - праздничные дни	118	118
Потери рабочего времени - отпуск - невыходы по болезни	42	42
Действительный годовой фонд рабочего времени	205	205

Месячный должностной оклад работника:

$$З_m = З_{tc} \cdot (1 + k_{пр} + k_d) \cdot k_p,$$

где $З_{tc}$ – базовый оклад, руб.;

$k_{пр}$ – премиальный коэффициент, (определяется Положением об оплате труда);

k_d – коэффициент доплат и надбавок (в НИИ и на промышленных предприятиях – за расширение сфер обслуживания, за профессиональное мастерство, за вредные условия: определяется Положением об оплате труда);

k_p – районный коэффициент, равный 1,3 (для Томска).

Расчёт основной заработной платы приведён в табл 33.

Таблица 33 – Расчёт основной заработной платы

Исполнители	З _{тс} , руб.	k _{пр}	k _д	k _р	З _м , руб.	З _{дн} , руб.	Т _р , раб. дн.			З _{осн} , руб.		
							Исп.1	Исп.2	Исп.3	Исп.1	Исп.2	Исп.3
Научный руководитель проекта	40000,00	0,6	0,0	1,3	83200	4545,5	120	200	149	545467,3	909100	677279,5
Студент	6000,00	0,6	0,0	1,3	12480	681,83	332	1789	334	226367,5	1218309	227731,2

Таблица 34 – Заработная плата исполнителей НТИ

Заработная плата		Научный руководитель проекта	Специалист по проекту
Основная зарплата	Исп.1	545467,31	226367,56
	Исп.2	909100	1218309
	Исп.3	677279,5	227731,2
Итого по статье С_{зп}			
Исполнение 1		Исполнение 2	Исполнение 3
771834,87		2127409	905010,7

5.1.5 Оценка сравнительной эффективности проекта

Определение эффективности происходит на основе расчета интегрального показателя эффективности научного исследования. Его нахождение связано с определением двух средневзвешенных величин: финансовой эффективности и ресурсоэффективности.

Интегральный финансовый показатель разработки определяется как:

$$I_{\text{финр}}^{\text{исп.}i} = \frac{\Phi_{\text{pi}}}{\Phi_{\text{max}}} \quad (69)$$

где $I_{\text{финр}}^{\text{исп.}i}$ - интегральный финансовый показатель разработки;

Φ_{pi} – стоимость i-го варианта исполнения;

Φ_{max} – максимальная стоимость исполнения научно-исследовательского проекта (в т.ч. аналоги).

$$I_{\phi}^{исп.1} = \frac{771834,87}{3000000} = 0,27$$

$$I_{\phi}^{исп.2} = \frac{2127409}{3000000} = 0,71$$

$$I_{\phi}^{исп.1} = \frac{905010,7}{3000000} = 0,30$$

Таблица 35 – Сравнительная оценка характеристик вариантов исполнения проекта

Критерии	Весовой коэффициент параметра	Исп.1	Исп.2	Исп.3
1. Способствует росту производительности труда пользователя	0,1	5	4	4
2. Удобство в эксплуатации (соответствует требованиям потребителей)	0,15	5	4	3
3. Помехоустойчивость	0,15	4	5	3
4. Энергосбережение	0,2	4	5	3
5. Надежность	0,25	4	5	4
6. Материалоемкость	0,15	4	4	4
ИТОГО	1	4,25	4,6	3,5

Интегральный показатель эффективности разработки ($I_{финр}^P$) и аналога ($I_{финр}^a$) определяется на основании интегрального показателя ресурсоэффективности и интегрального финансового показателя по формуле:

$$I_{исп1} = \frac{4,25}{0,27} = 15,74$$

$$I_{исп2} = \frac{4,6}{0,71} = 6,48$$

$$I_{исп2} = \frac{3,5}{0,30} = 11,67$$

Сравнение интегрального показателя эффективности Исполнения 1 и Исполнений 2 и 3 позволит определить сравнительную эффективность проекта. Сравнительная эффективность проекта:

$$\mathcal{E}_{cp} = \frac{I_{исп.1}}{I_{исп.2}} = \frac{15,74}{6,48} = 2,43$$

$$\mathcal{E}_{cp} = \frac{I_{исп.1}}{I_{исп.3}} = \frac{15,74}{11,67} = 1,35$$

Таблица 36 – Сравнительная эффективность разработки

№ п/п	Показатели	Испытание 1	Испытание 2	Испытание 3
1	Интегральный финансовый показатель разработки	0,27	0,71	0,30
2	Интегральный показатель ресурсоэффективности разработки	4,25	4,6	3,5
3	Интегральный показатель эффективности	15,74	6,48	11,67
4	Сравнительная эффективность вариантов исполнения		2,43	1,35

Сравнение значений интегральных показателей эффективности позволило определить, что существующий вариант решения поставленной в магистерской диссертации технической задачи с позиции финансовой и ресурсной эффективности является наиболее приемлемым.

6 СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ

Проблемы охраны труда затрагивают многие стороны жизни и деятельности трудовых коллективов, организации производства и труда, организации управления производством, носит разносторонний многоплановый характер.

Охрана труда – это система законодательных, социально-экономических, организационных, технологических, гигиенических и лечебно-профилактических мероприятий и средств, обеспечивающих безопасность, сохранение здоровья и работоспособности человека в процессе труда [15].

В настоящее время в производстве, научно-исследовательских и конструкторских работах, сфере управления и образования персональные ЭВМ (ПЭВМ) находят все большее применение. Компьютеры завоевывают свое место на предприятии, в организации, офисе и даже в домашних условиях. Однако компьютер – не только квалифицированный помощник, но и источник вредного воздействия на организм человека, а, следовательно, источник профессиональных заболеваний. Это предъявляет к каждому пользователю персонального компьютера требование – знать о вредном воздействии ПЭВМ на организм человека и необходимых мерах защиты от этих воздействий.

Опасным производственным фактором, согласно [15], называется такой производственный фактор, воздействие которого в определенных условиях приводят к травме или другому внезапному, резкому ухудшению здоровья.

Вредным производственным фактором называется такой производственный фактор, воздействие которого на работающего, в определенных условиях, приводит к заболеванию или снижению трудоспособности.

6.1 Анализ опасных и вредных производственных факторов

Таблица 37 – Основные элементы производственного процесса, формирующие опасные и вредные факторы

Наименование видов работ и параметров производственного процесса	ФАКТОРЫ ГОСТ 12.0.003-74 ССБТ		Нормативные документы
	Вредные	Опасные	
Работа на ПЭВМ	Повышенный уровень ионизирующих излучений в рабочей зоне		Нормы радиационной безопасности (НРБ-99/2009). СП 2.6.1.2523-09.
Работа на ПЭВМ		Электрический ток	ГОСТ 12.1.038-82 ССБТ. Электробезопасность
Работа на ПЭВМ	Воздействие радиации (ВЧ,УВЧ,СВЧ и т.д.)		СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы. «Гигиенические требования к ПЭВМ и организация работы»

Производственные условия на рабочем месте характеризуются наличием опасных и вредных факторов, которые классифицируются по группам элементов: физические, химические, биологические, психофизиологические.

На инженера, работа которого связана с моделированием на компьютере, воздействуют следующие факторы:

- физические:
 - температура и влажность воздуха;
 - шум;
 - статическое электричество;
 - электромагнитное поле низкой чистоты;

- освещённость;
- наличие излучения;
- психофизиологические:
 - физические перегрузки (статические, динамические);
 - нервно-психические перегрузки (умственное перенапряжение, монотонность труда, эмоциональные перегрузки).

6.2 Обоснование и разработка мероприятий по снижению уровней опасного и вредного воздействия и устранению их влияния на работающих.

6.2.1 Требования к ПЭВМ и организация работы.

Организационные мероприятия

Весь персонал обязан знать и строго соблюдать правила техники безопасности. Обучение персонала технике безопасности и производственной санитарии состоит из вводного инструктажа и инструктажа на рабочем месте ответственным лицом.

Проверка знаний правил техники безопасности проводится квалификационной комиссией после обучения на рабочем месте. Проверяемому, присваивается соответствующая его знаниям и опыту работы квалификационная группа по технике безопасности и выдается специальная удостоверение.

Лица, обслуживающие электроустановки не должны иметь увечий и болезней, мешающих производственной работе. Состояние здоровья устанавливается медицинским освидетельствованием.

ТЕХНИЧЕСКИЕ МЕРОПРИЯТИЯ

Рациональная планировка рабочего места предусматривает четкий порядок и постоянство размещения предметов, средств труда и документации. То, что требуется для выполнения работ чаще должно располагаться в зоне легкой досягаемости рабочего пространства.

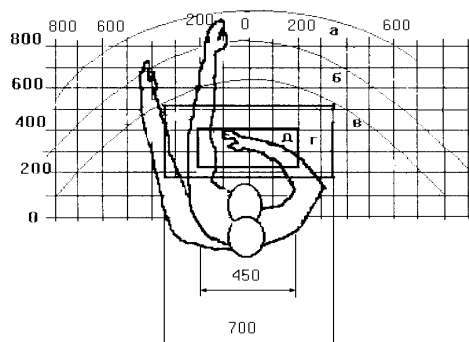


Рис. 3. Зоны досягаемости рук в горизонтальной плоскости

- а – зона максимальной досягаемости рук;
- б – зона досягаемости пальцев при вытянутой руке;
- в – зона легкой досягаемости ладони;
- г – оптимальное пространство для грубой ручной работы;
- д – оптимальное пространство для тонкой ручной работы.

Оптимальное размещение предметов труда и документации в зонах досягаемости рук: дисплей размещается в зоне а (в центре); клавиатура – в зоне г/д; системный блок размещается в зоне б (слева); принтер находится в зоне а (справа); документация: в зоне легкой досягаемости ладони – в (слева) – литература и документация, необходимая при работе; в выдвижных ящиках стола – литература, не используемая постоянно.

При проектировании письменного стола должны быть учтены следующие требования.

Высота рабочей поверхности стола рекомендуется в пределах 680-800 мм. Высота рабочей поверхности, на которую устанавливается клавиатура, должна быть 650 мм. Рабочий стол должен быть шириной не менее 700 мм и длиной не менее 1400 мм. Должно иметься пространство для ног высотой не менее 600 мм, шириной – не менее 500 мм, глубиной на уровне колен – не менее 450 мм и на уровне вытянутых ног – не менее 650 мм.

Рабочее кресло должно быть подъёмно-поворотным и регулируемым по

высоте и углам наклона сиденья и спинки, а также расстоянию спинки до переднего края сиденья. Рекомендуется высота сиденья над уровнем пола 420-550 мм. Конструкция рабочего кресла должна обеспечивать: ширину и глубину поверхности сиденья не менее 400 мм; поверхность сиденья с заглублённым передним краем.

Монитор должен быть расположен на уровне глаз оператора на расстоянии 500-600 мм. Согласно нормам, угол наблюдения в горизонтальной плоскости должен быть не более 45 D к нормали экрана. Лучше если угол обзора будет составлять 30 D. Кроме того должна быть возможность выбирать уровень контрастности и яркости изображения на экране.

Должна предусматриваться возможность регулирования экрана:

- по высоте +3 см;
- по наклону от 10 до 20 градусов относительно вертикали;
- в левом и правом направлениях.

Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100-300 мм от края. Нормальным положением клавиатуры является её размещение на уровне локтя оператора с углом наклона к горизонтальной плоскости 15 D. Более удобно работать с клавишами, имеющими вогнутую поверхность, четырёхугольную форму с закруглёнными углами. Конструкция клавиши должна обеспечивать оператору ощущение щелчка. Цвет клавиш должен контрастировать с цветом панели.

При однообразной умственной работе, требующей значительного нервного напряжения и большого сосредоточения, рекомендуется выбирать неяркие, малоконтрастные цветочные оттенки, которые не рассеивают внимание (малонасыщенные оттенки холодного зеленого или голубого цветов). При работе, требующей интенсивной умственной или физической напряженности, рекомендуются оттенки тёплых тонов, которые возбуждают активность человека.

УСЛОВИЯ БЕЗОПАСНОЙ РАБОТЫ

Основные параметры, характеризующие условия труда это: микроклимат, шум, вибрация, электромагнитное поле, излучение, освещённость.

Воздух рабочей зоны (микроклимат) производственных помещений определяют следующие параметры: температура, относительная влажность, скорость движения воздуха. Оптимальные и допустимые значения характеристик микроклимата устанавливаются в соответствии с СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 и приведены в таблице 2.

Таблица 38 – Оптимальные и допустимые параметры микроклимата

Период года	Температура, °С	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха, м/с
Холодный и переходный	23-25	40-60	0,1
Тёплый	23-25	40	0,1

К мероприятиям по оздоровлению воздушной среды в производственном помещении относятся: правильная организация вентиляции и кондиционирования воздуха, отопление помещений. Вентиляция может осуществляться естественным и механическим путём. В помещение должны подаваться следующие объёмы наружного воздуха: при объёме помещения до 20 м³ на человека - не менее 30 м³ в час на человека; при объёме помещения более 40 м³ на человека и отсутствии выделения вредных веществ допускается естественная вентиляция.

Система отопления должна обеспечивать достаточное, постоянное и равномерное нагревание воздуха. В помещениях с повышенными требованиями к чистоте воздуха должно использоваться водяное отопление. Параметры микроклимата в используемой лаборатории регулируются системой центрального отопления, и имеют следующие значения: влажность - 40%, скорость движения воздуха – 0,1 м/с, температура летом – 20...25 °С, зимой – 13...15 °С. В лаборатории осуществляется естественная вентиляция. Воздух

поступает и удаляется через щели, окна, двери. Основным недостатком такой вентиляции в том, что приточный воздух поступает в помещение без предварительной очистки и нагрева.

Шум и вибрация ухудшают условия труда, оказывают вредное воздействие на организм человека, а именно, на органы слуха и на весь организм через центральную нервную систему. В результате этого ослабляется внимание, ухудшается память, снижается реакция, увеличивается число ошибок при работе. Шум может создаваться работающим оборудованием, установками кондиционирования воздуха, осветительными приборами дневного света, а также проникать извне. При выполнении работы на ПЭВМ уровень шума на рабочем месте не должен превышать 50 дБ.

Экран и системные блоки производят электромагнитное излучение. Основная его часть происходит от системного блока и видео-кабеля. Согласно СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 напряженность электромагнитного поля на расстоянии 50 см вокруг экрана по электрической составляющей должна быть не более:

- в диапазоне частот 5Гц-2кГц – 25В/м;
- в диапазоне частот 2кГц-400кГц – 2,5В/м.

Плотность магнитного потока должна быть не более:

- в диапазоне частот 5Гц-2кГц – 250нТл;
- в диапазоне частот 2кГц-400кГц – 25нТл.

Существуют следующие способы защиты от ЭМП:

- - увеличение расстояния от источника (экран должен находиться на расстоянии не менее 50 см от пользователя);
- - применение приэкранных фильтров, специальных экранов и других средств индивидуальной защиты.

При работе с компьютером источником ионизирующего излучения является дисплей. Под влиянием ионизирующего излучения в организме может происходить нарушение нормальной свертываемости крови, увеличение

хрупкости кровеносных сосудов, снижение иммунитета и др. Доза облучения при расстоянии до дисплея 20 см составляет 50мкбэр/час. По нормам СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 конструкция ЭВМ должна обеспечивать мощность экспозиционной дозы рентгеновского излучения в любой точке на расстоянии 0,05м от экрана не более $7,7 \cdot 10^{-4}$ А/кг, что соответствует эквивалентной дозе, равной 100 мкР/час.

Утомляемость органов зрения может быть связана как с недостаточной освещенностью, так и с чрезмерной освещенностью, а также с неправильным направлением света.

6.3 Электробезопасность

В связи с тем, что для работы ПЭВМ и периферийных устройств используется электрическая энергия, их эксплуатация должна соответствовать «Правилам технической эксплуатации электроустановок потребителей» и «Правилам техники безопасности при эксплуатации электроустановок потребителей».

Все производственные помещения по опасности поражения электрическим током разделяются на три категории: помещения с повышенной опасностью, особо опасные помещения и помещения без повышенной опасности. К опасным производственным факторам на рабочем месте относится возможность поражения электрическим током.

Комната, в которой выполнялась работа, относится к категории помещений без повышенной опасности, поскольку она характеризуется следующими признаками: температура воздуха и влажность в норме, отсутствие сырости, химически активной среды, токопроводящих пыли и полов.

С целью обеспечения безопасной и надежной работы, снижения вероятности возникновения аварийных (чрезвычайных) ситуаций, таких, например, как поражение электрическим током, пожарная опасность, сбои в работе ПЭВМ и т.п. необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

1) Перед включением ЭВМ в сеть должна быть визуально проверена ее электропроводка на отсутствие возможных видимых нарушений изоляции, а также на отсутствие замыкания токопроводящих частей на корпус компьютера.

2) При появлении признаков замыкания необходимо немедленно отключить от электрической сети ЭВМ и устранить неисправность.

3) Запрещается при включенной ЭВМ одновременно прикасаться к приборам, имеющим естественное заземление.

К защитным мерам от опасности прикосновения к токоведущим частям электроустановок относятся: изоляция, ограждение, блокировка, пониженные напряжения, электрозащитные средства.

Среди распространенных способов защиты от поражения электрическим током при работе с электроустановками различают:

1) Защитное заземление – предназначено для превращения «замыкания на корпус» в «замыкание на землю», с тем, чтобы уменьшить напряжение прикосновения и напряжение шага до безопасных величин (выравнивание, как самый распространенный способ защиты от поражения электрическим током).

2) Защитное зануление – замыкание на корпус электроустановок.

3) Системы защитного отключения – отключение электроустановок в случае проявления опасности пробоя на корпус.

4) Защитное разделение сетей.

5) Предохранительные устройства.

В дальнейшем при эксплуатации ПЭВМ необходимо соблюдать следующие рекомендации:

- Постоянно контролировать надежность соединения контактов трехпроводных розеток.

- Подключать дисплей (при наличии только двухпроводной однофазной сети) рекомендуется через согласующее устройство. При этом сетевые фильтры и все кабели питания должны находиться как можно дальше от оператора в компактном положении с тыльной стороны рабочего места.

- Не ставить системный блок в зоне повышенной влажности и повышенного содержания пыли, на пол, у ног оператора.
- Нельзя касаться одновременно экрана монитора и клавиатуры (возможен повышенный электростатический потенциал).
- Во избежание поражения электрическим током запрещается прикасаться к задней панели системного блока и переключать разъемы периферийных устройств работающего компьютера.
- Необходимо устанавливать ПЭВМ (ПК) только на жестко закрепленной подставке, исключающей даже случайное сотрясение системного блока.
- Не рекомендуется установка ПЭВМ и его клавиатуры на поверхности, накапливающие статическое электричество (органическое стекло и полированные лаковые поверхности).
- Температура воздуха в помещении допускается в пределах 20-25 °С при относительной влажности до 75 %; резкие перепады температуры не допускаются.
- Не допускается излишняя запыленность воздуха в помещении (не более 1 мг/м³ при максимальном размере частиц 3 мкм); обязательна влажная ежедневная уборка помещения.
- Необходимо ежедневно протирать влажной салфеткой экран, приэкранный фильтр, клавиатуру и другие части ПЭВМ.

6.4 Пожарная и взрывная безопасность

Согласно ГОСТ Р12.1.004-85 ССБТ, в зависимости от характеристики используемых в производстве веществ и их количества, по пожарной и взрывной опасности помещения подразделяются на категории А, Б, В, Г, Д. Так как помещение по степени пожаровзрывоопасности относится к категории В, т.е. к помещениям с твердыми сгорающими веществами, необходимо предусмотреть ряд профилактических мероприятий.

Причиной возникновения пожара при использовании электрооборудования является: электрические искры, дуги, короткое замыкание, перегрев приборов. В помещении для предотвращения пожара согласно ГОСТ 12.1.004-74 предусматривает следующие меры:

1. Организационные мероприятия: предусматривают правильную эксплуатацию машин и внутризаводского транспорта, правильное содержание зданий, территории, противопожарный инструктаж, наличие плана эвакуации.

2. Технические мероприятия: соблюдение противопожарных правил и норм при проектировании зданий, устройстве электропроводов и оборудования, отопления, вентиляции, освещения, правильное размещение оборудования.

3. Режимные мероприятия: запрещение сварочных и других огневых работ в пожароопасных помещениях и тому подобное.

4. Эксплуатационные мероприятия: своевременная профилактика, ремонты и испытание технологического оборудования.

Для предупреждения возникновения пожара от коротких замыканий, перегрузок и т. д. необходимо соблюдение следующих правил пожарной безопасности:

- исключение образования горючей среды (герметизация оборудования, контроль воздушной среды, рабочая и аварийная вентиляция);
- применение при строительстве и отделке зданий негорючих или трудно сгораемых материалов;
- правильная эксплуатация оборудования (правильное включение оборудования в сеть электрического питания, контроль нагрева оборудования);
- правильное содержание зданий и территорий (исключение образования источника воспламенения - предупреждение самовозгорания веществ, ограничение огневых работ);
- обучение производственного персонала правилам противопожарной безопасности;

- издание инструкций, плакатов, наличие плана эвакуации;
- соблюдение противопожарных правил, норм при проектировании зданий, при устройстве электропроводов и оборудования, отопления, вентиляции, освещения;
- правильное размещение оборудования;
- своевременный профилактический осмотр, ремонт и испытание оборудования.

При возникновении аварийной ситуации необходимо:

1. Сообщить руководству (дежурному).
2. Позвонить в соответствующую аварийную службу или МЧС – тел. 112.
3. Принять меры по ликвидации аварии в соответствии с инструкцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе было построено две модели: двухпродуктовая и трехпродуктовая. При построении моделей было учтено, что ресурсы пополняются в размере дефицита данного ресурса, кроме того спрос на продукцию имеет случайный характер, а периодичность поставок всех ресурсов одинакова.

По полученным моделям можно сделать следующие выводы:

- Двухпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом является полностью аналитической, т.е. получено точное решение системы уравнений в виде формул для объема закупок товаров в начале цикла и моментов времени их докупки в течение цикла.

- При построении трехпродуктовой модели было выявлено, что ее нельзя представить полностью в аналитическом виде. Данный факт является, несомненно, минусом модели, так как получить характеристики случайных величин можно только двумя вариантами, а именно смоделировав их, либо путем пренебрежения слагаемых, средние значения которых не поддаются аналитическим вычислениям. Вторым вариантом, естественно, подразумевает наличие некоторых погрешностей.

- Следствием второго пункта является то, что нельзя построить универсальную многопродуктовую модель, так как нельзя автоматизировать процесс оценки переменных для последующего моделирования при первом варианте вычисления, а при втором варианте увеличение числа ресурсов ведет к накоплению ошибок. Кроме того, при численном моделировании результаты получаются громоздкие и неудобные в использовании.

- При моделировании на реальных данных было выявлено, что выгода при использовании построенных моделей составляет 31,7 % для двумерного случая и 40,8 %, когда закупаются три вида ресурсов. Также сравнение результатов, полученных при моделировании трехпродуктовой модели,

позволяет сделать выбор в сторону второго варианта, так как он является полностью аналитическим, и вследствие чего более простым в использовании.

Однако положительным моментом является то, что данные модели позволяют поддерживать безостановочный график поставок предприятиями – поставщиками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кузнецов Д.Н., Толстых, С.С. Стохастическая модель многоэтапного управления многопродуктовыми запасами / С.С. Толстых // Упр. обществ. и экон. системами. – 2007. – № 1. – С. 1–6.
2. Свиридова О. А. Детерминированная и стохастическая модели минимизации издержек в системах управления запасами // Логистика. – 2011. – № 4 (57).
3. Косоруков О.А., Свиридова О.А. Учет неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами // Логистика. – 2012, №6. – С.12-13
4. Беляков А.Г., Лапин А.В., Мандель А.С. Управление запасами товаров ажиотажного спроса // Проблемы управления. – 2005. – №6.
5. Козак. Ю.А., Колчин Р.В. Математическое обеспечение АСУ запасами материальных ресурсов в двухуровневой логистической системе со случайным спросом. // Труды Одесского политехнического университета. – 2004. – вып. 1(21).
6. В.В. Домбровский, Е.В. Чаусова. Математическая модель управления запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках. – М.: Экзамен, 2008
7. Петренко С.В., Карлова М.Ю. Обеспечение оптимального управления запасами торгового предприятия при решении проблемы планирования ассортимента с помощью кластерного подхода. // Перспективы науки. – №5 (07). – 2010. – с.120-124.
8. Мандель А.С. Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. I. Нормативная модель // Проблемы управления. – 2011. – №6. – с. 47-51.

9. Мандель А.С. Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. II. Создание страховых запасов // Проблемы управления. – 2012. – №1. – с. 42-46.
10. Антипенко В.С., Кац Г.Б. Задачи управления запасами со случайным спросом и случайным временем задержки // Автомат. и телемех., 1974, № 7, 178–182
11. Xin Chen, David Simchi-Levi. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Infinite Horizon Case // Mathematics of operations research. – 2004, Volume 29, Issue 3, Pages 698-723.
12. Antonio Arreola-Risa, Gregory A. DeCroix. Inventory Management Under Random Supply Disruptions and Partial Backorders // Naval Research Logistics (NRL). – 1998, Volume 45, Issue 7, pages 687–703,
13. Серая О.В., Клименко Т.А., Самородов В.Б. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами. // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2009. – №45.
14. Дзензелюк Н.С. Методология адаптивного управления производственными запасами в условиях нестационарного рынка. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. – №21 (238). – 2011. – с.27-31.
15. Федеральный закон «Об основах охраны труда» от 17.07.1999 г. № 181-ФЗ.
16. Сибаров Ю.Г. Охрана труда в вычислительных центрах: Учебник для средних специальных учебных заведений. – М.: Машиностроение, 1990. – 190 с.
17. Раздорожный А.А. Безопасность производственной деятельности: Учеб. пособ. – М.: ИНФРА – М, 2003.-208с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(Обязательное)

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ C

Таблица А.1 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0
$Y_1 = 0.2$	0	0	0	0	0	0
$Y_1 = 0.4$	0	0	0	0	0	0
$Y_1 = 0.6$	0	0	0	0	0	0
$Y_1 = 0.8$	0	0	0	0	0	0
$Y_1 = 1$	0	0	0	0	0	0

Таблица А.2 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.2; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.196	0.277	0.339	0.392	0.438
$Y_1 = 0.2$	0.117	0.231	0.304	0.361	0.411	0.456
$Y_1 = 0.4$	0.235	0.311	0.369	0.419	0.463	0.503
$Y_1 = 0.6$	0.352	0.409	0.456	0.498	0.536	0.571
$Y_1 = 0.8$	0.47	0.514	0.553	0.589	0.622	0.654
$Y_1 = 1$	0.587	0.624	0.657	0.688	0.717	0.745

Таблица А.3 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.2; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.651	0.92	1.127	1.301	1.455
$Y_1 = 0.2$	0.334	0.742	0.988	1.183	1.351	1.499
$Y_1 = 0.4$	0.668	0.954	1.16	1.333	1.484	1.622
$Y_1 = 0.6$	1.001	1.219	1.392	1.542	1.677	1.801
$Y_1 = 0.8$	1.335	1.51	1.656	1.787	1.908	2.02
$Y_1 = 1$	1.669	1.814	1.941	2.056	2.164	2.265

Таблица А.4 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.4; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.392	0.554	0.679	0.784	0.876
$Y_1 = 0.2$	0.235	0.463	0.607	0.723	0.822	0.911
$Y_1 = 0.4$	0.47	0.622	0.739	0.838	0.926	1.006
$Y_1 = 0.6$	0.705	0.818	0.912	0.996	1.072	1.143
$Y_1 = 0.8$	0.94	1.029	1.107	1.178	1.245	1.307
$Y_1 = 1$	1.175	1.248	1.314	1.376	1.434	1.49

Таблица 5. Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.4; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.743	1.051	1.287	1.486	1.661
$Y_1 = 0.2$	0.395	0.854	1.133	1.356	1.546	1.716
$Y_1 = 0.4$	0.79	1.109	1.342	1.537	1.709	1.864

Продолжение таблицы А.5

	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0.6$	1.185	1.426	1.62	1.788	1.941	2.081
$Y_1 = 0.8$	1.58	1.773	1.936	2.083	2.218	2.344
$Y_1 = 1$	1.975	2.135	2.276	2.405	2.525	2.639

Таблица А.6 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.6; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.588	0.831	1.018	1.176	1.314
$Y_1 = 0.2$	0.352	0.694	0.911	1.084	1.234	1.367
$Y_1 = 0.4$	0.705	0.934	1.108	1.257	1.389	1.509
$Y_1 = 0.6$	1.057	1.226	1.368	1.493	1.608	1.714
$Y_1 = 0.8$	1.41	1.543	1.66	1.767	1.867	1.961
$Y_1 = 1$	1.762	1.871	1.971	2.064	2.152	2.235

Таблица А.7 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.6; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.87	1.231	1.508	1.741	1.946
$Y_1 = 0.2$	0.477	1.008	1.333	1.593	1.815	2.013
$Y_1 = 0.4$	0.955	1.32	1.589	1.816	2.016	2.197
$Y_1 = 0.6$	1.432	1.707	1.93	2.125	2.301	2.464
$Y_1 = 0.8$	1.91	2.129	2.316	2.485	2.641	2.786
$Y_1 = 1$	2.387	2.569	2.73	2.878	3.016	3.147

Таблица А.8 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.8; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.784	1.108	1.357	1.567	1.752
$Y_1 = 0.2$	0.47	0.926	1.214	1.446	1.645	1.822
$Y_1 = 0.4$	0.94	1.245	1.478	1.676	1.852	2.012
$Y_1 = 0.6$	1.41	1.635	1.824	1.991	2.144	2.286
$Y_1 = 0.8$	1.88	2.057	2.213	2.357	2.49	2.615
$Y_1 = 1$	2.349	2.495	2.628	2.752	2.869	2.98

Таблица А.9 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 0.8; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	1.019	1.441	1.765	2.038	2.278
$Y_1 = 0.2$	0.572	1.186	1.565	1.868	2.128	2.36
$Y_1 = 0.4$	1.143	1.564	1.875	2.139	2.371	2.583
$Y_1 = 0.6$	1.715	2.03	2.287	2.512	2.717	2.906
$Y_1 = 0.8$	2.286	2.537	2.753	2.947	3.127	3.296
$Y_1 = 1$	2.858	3.066	3.25	3.42	3.58	3.731

Таблица 10 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 1; X_2 = 0$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	0.98	1.385	1.697	1.959	2.191
$Y_1 = 0.2$	0.587	1.157	1.518	1.807	2.056	2.278

Продолжение таблицы А.10

	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0.4$	1.175	1.556	1.847	2.095	2.315	2.515
$Y_1 = 0.6$	1.762	2.044	2.28	2.489	2.68	2.857
$Y_1 = 0.8$	2.349	2.571	2.767	2.946	3.112	3.268
$Y_1 = 1$	2.937	3.119	3.285	3.44	3.586	3.725

Таблица А.11 – Средние значения случайной величины C

	$Y_2 = 1; X_2 = 0.25$					
	$X_1 = 0$	$X_1 = 0.1$	$X_1 = 0.2$	$X_1 = 0.3$	$X_1 = 0.4$	$X_1 = 0.5$
$Y_1 = 0$	0	1.18	1.669	2.044	2.36	2.639
$Y_1 = 0.2$	0.673	1.378	1.817	2.167	2.468	2.736
$Y_1 = 0.4$	1.345	1.826	2.185	2.488	2.757	3.001
$Y_1 = 0.6$	2.018	2.378	2.672	2.931	3.167	3.384
$Y_1 = 0.8$	2.691	2.976	3.223	3.446	3.653	3.846
$Y_1 = 1$	3.364	3.6	3.81	4.005	4.188	4.361

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ)

Раздел 1. Двухпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом
Раздел 2. Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом

Студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM41	Ставчук Л. Г.		

Консультант кафедры: ВММФ

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Профессор	Мицель А. А.	д.т.н.		

Консультант – лингвист кафедры: ИЯФТ

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Старший преподаватель	Демьяненко Н. В.			

B.1 Two-product inventory model with random demand

Task definition

The company buys two kinds of resources. The volume of the first resource is q_1 natural units, the cost of the resource per unit is d_1 monetary units; the volume of the second resource and its cost per unit are q_2 and d_2 , respectively. Supply periods of each type of resource (cycle) are taken as the same and equal to $T_1 = T_2 = T$. The volume of funds for the purchase of resources is limited to $Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2$. For certainty, we assume that the resource 1 is fully purchased at the beginning of the period, and resource 2 is partially purchased in the volume $k_2 q_2$, where $k_2 \leq 1$ is the proportion of the second resource. Then

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 = Y_m. \quad (1)$$

We assume that the consumption of resources is a random process, which is the subject of stochastic equations

$$\begin{aligned} dq_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw_1, \\ dq_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Here μ_1, μ_2 are the average values of random variables x_1, x_2 per time unit, respectively (the average flow rates are $\mu_1 = \frac{q_1}{T}, \mu_2 = \frac{q_2}{T}$); σ_1^2, σ_2^2 - dispersions of random variables x_1, x_2 per time unit, respectively (the dimension is $\frac{q^2}{T}$); dw_1, dw_2 - standard Wiener processes.

The solutions of equations (2) have the form [5]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_1, \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3)$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - standard normal random variables with parameters $M(\varepsilon_i) = 0$, $M(\varepsilon_i^2) = 1$; $i = 1, 2$; $M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0$; $M(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2) = 1$.

For $t_0 = 0$ we obtain a solution: $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0$.

Assume that both resources are consumed at the same time and in the same proportion but randomly. Then, instead of (3), we have

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon,\end{aligned}\tag{4}$$

Let us find the time point t_2 of the second resource refill to the value $q_2(1 - k_2)$ from the condition $d_1 x_1(t_2) + d_2 x_2(t_2) = a_2(1 - k_2)$, in which k_2 – proportion of the second resource at the initial time moment; $a_2(1 - k_2)$ – deficit of the second resource in value terms. As a result, we obtain the following equation:

$$bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} = a_2(1 - k_2),\tag{5}$$

where $a_1 = d_1 q_1$, $a_2 = d_2 q_2$, $a = a_1 + a_2$;

$b_1 = d_1 \mu_1$, $b_2 = d_2 \mu_2$, $b = b_1 + b_2$;

$c_1 = d_1 \sigma_1$, $c_2 = d_2 \sigma_2$, $c = c_1 + c_2$

The condition for the second resource to be deficit-free is $(Y_m - a_1) - d_2 x_2(t_2) = 0$ or $k_2 a_2 = d_2 x_2(t_2)$.

Then the time of the second resource additional purchase can be found from the following equations:

$$\begin{aligned}bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2) \\k_2 a_2 &= b_2 t_2 + c_2 \varepsilon \sqrt{t_2}\end{aligned}\tag{6}$$

Substituting $k_2 a_2$ from the second equation into the first equation, we obtain

$$(b + b_2)t_2 + (c + c_2)\varepsilon\sqrt{t_2} = a_2.\tag{7}$$

Solving this equation, we find

$$t_2 = \frac{a_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_2)^2} - \frac{(c + c_2)\varepsilon}{2(b + b_2)^2} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}.\tag{8}$$

Next, we put (8) in the second equation of (6) and find k_2 . Considering

$$\sqrt{t_2} = \frac{-(c + c_2)\varepsilon + \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}}{2(b + b_2)}, \text{ we obtain}$$

$$k_2 = \frac{b_2}{a_2} \left(\frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b+b_2)^2} - \frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)} \right) + \frac{c_2}{a_2} \varepsilon \left(\frac{-(c+c_2)\varepsilon + \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}}{2(b+b_2)} \right)$$

After conversion, we get

$$k_2 = \frac{b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)\varepsilon^2}{2a_2(b+b_2)^2} - \frac{(b_2c-bc_2)\varepsilon}{2a_2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}. \quad (9)$$

The minimum required reserve of current assets equals to

$$Y_m = a_1 + a_2 k_2 = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)\varepsilon^2}{2(b+b_2)^2} - \frac{(b_2c-bc_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)} \quad (10)$$

Let us calculate the characteristics of a random variables t_2 and Y_m :

$$M(t_2) = \frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2} = \frac{d_2 q_2}{d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2} + \frac{(d_1 \sigma_1 + 2d_2 \sigma_2)^2}{2(d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2)^2}, \quad (9)$$

$$M(Y_m) = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2(b+b_2)^2}. \quad (11)$$

During the averaging of values t_2 and Y_m over the variable ε , there was considered that the expression $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}$ is an odd function over the variable ε , so $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$. Here $f(\varepsilon)$ is the density of the random variable probability ε . Besides, $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

Let us write a residual $t_2 - M(t_2)$:

$$t_2 - M(t_2) = \frac{(c+c_2)^2(\varepsilon^2 - 1)}{2(b+b_2)^2} - \frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \sqrt{(c+c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b+b_2)}$$

and raise it to the square

$$(t_2 - M(t_2))^2 = \frac{(c + c_2)^4 (\varepsilon^2 - 1)^2 + (c + c_2)^4 \varepsilon^4 + 4a_2 (c + c_2)^2 (b + b_2) \varepsilon^2}{4(b + b_2)^4} -$$

$$- \frac{(c + c_2)^3 (\varepsilon^2 - 1) \varepsilon}{4(b + b_2)^4} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2 (b + b_2)}$$

Next, we have $M(\varepsilon^2) = 1$, $M(\varepsilon^4) = 3$, $M((\varepsilon^2 - 1)^2) = 2$.

Conducting the averaging, we get

$$D(t_2) = \frac{(c + c_2)^2}{4(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + 4a_2(b + b_2)). \quad (12)$$

During the averaging of value $(t_2 - M(t_2))^2$ over the variable ε , there was considered that the expression $\varphi(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - 1)\varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}$ is an odd function over the variable ε , so $\int \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = 0$.

Then we calculate dispersion of the random variable Y_m and write a residual $(Y_m - M(Y_m))$:

$$(Y_m - M(Y_m)) = \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)(\varepsilon^2 - 1) - (b_2 c - b c_2) \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}}{2(b + b_2)^2},$$

which we raise to the square and average.

$$D(Y_m) = \frac{(b_2 c - b c_2)^2 (5(c + c_2)^2 + 4a_2(b + b_2))}{4(b + b_2)^4}. \quad (13)$$

Let us calculate the end time t_c of the cycle for the case when both resources are consumed at the same time and in the same proportion. The equation (5) takes the form:

$$b t_c + c \varepsilon \sqrt{t_c} = Y_\Sigma, \quad (14)$$

where $Y_\Sigma = d_1 q_1 + d_2 q_2$ – the total reserve of both resources.

Then we solve it and calculate the characteristics

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2 \varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c \varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2 \varepsilon^2 + 4b Y_\Sigma} = T + \frac{c^2 \varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c \varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2 \varepsilon^2 + 4b Y_\Sigma}, \quad (15)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2)^2}{2(d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2)^2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
D(t_c) &= \frac{c^2}{4b^4} (5c^2 + 4bY_\Sigma) = \\
&= \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)^4} (5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)Y_\Sigma) .
\end{aligned} \tag{17}$$

Thus, the mean and standard deviation of the second resource refill time equal to $M(t_2) = \frac{a_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2}$, $\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^4} (5(c+c_2)^2 + 4a_2(b+b_2))}$, and the mean and standard deviation of both resources refill time (end time of the cycle) equal to $M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}$, $\sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b} \sqrt{(5c^2 + 4bY_\Sigma)}$.

For an average value of the normalization factor $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$ we obtain expression

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a} = \frac{1}{a} \left(a_1 + \frac{a_2 b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2 c - b c_2)}{2(b+b_2)^2} \right). \tag{18}$$

B.2 Three-product inventory model with random demand

Task definition

The company buys three kinds of resources. The volume of the first resource is q_1 natural units, the cost of the resource per unit is d_1 monetary units; the volume of the second resource and its cost per unit are q_2 and d_2 , respectively; the volume of the third resource and its cost per unit are q_3 and d_3 , respectively. Supply periods of each type of resource (cycle) are taken as the same and equal to $T_1 = T_2 = T_3 = T$. The volume of funds for the purchase of resources is limited to $Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3$. For certainty, we assume that the resource 1 is fully purchased at the beginning of the period, resource 2 is partially purchased in the volume $k_2 q_2$, where $k_2 \leq 1$ is the proportion of the second resource, and resource 3 is partially purchased in the volume $k_3 q_3$, where $k_3 \leq 1$ is the proportion of the third resource. Then

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 + k_3 d_3 q_3 = Y_m. \tag{19}$$

In contrast to the model [3], we assume that the consumption of resources is a random process, which is the subject of stochastic equations

$$\begin{aligned} dq_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw_1, \\ dq_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw_2, \\ dq_3 &= \mu_3 dt + \sigma_3 dw_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Here μ_1, μ_2, μ_3 are the average values of random variables x_1, x_2, x_3 per time unit, respectively (the average flow rates are $\mu_1 = \frac{q_1}{T}, \mu_2 = \frac{q_2}{T}, \mu_3 = \frac{q_3}{T}$); $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ – dispersions of random variables x_1, x_2, x_3 per time unit, respectively (the dimension is $\frac{q^2}{T}$); dw_1, dw_2, dw_3 – standard Wiener processes.

On condition that all resources are consumed at the same time and in the same proportion but randomly, the solutions of equations (20) have the form [5]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\ x_3(t) &= \mu_3 t + \sigma_3 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \end{aligned} \quad (21)$$

where ε – standard normal random variable with parameters $M(\varepsilon) = 0, M(\varepsilon^2) = 1$.

For $t_0 = 0$ we obtain a solution: $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, x_3(t_0) = 0$.

Let us find the time points t_2 of the second resource refill to the value $q_2(1 - k_2)$ and t_3 of the third resource refill to the value $q_3(1 - k_3)$ from the conditions (22):

$$\begin{aligned} d_1 x_1(t_2) + d_2 x_2(t_2) + d_3 x_3(t_2) &= a_2(1 - k_2) + a_3(1 - k_3); \\ d_1 x_1(t_3) + d_2 x_2(t_3) + d_3 x_3(t_3) &= a_3(1 - k_3), \end{aligned} \quad (22)$$

in which k_2 – proportion of the second resource in the initial time moment; k_3 – proportion of the third resource in the initial time moment; $a_2(1 - k_2)$ – deficit of the second resource in value terms; $a_3(1 - k_3)$ – deficit of the third resource in value terms.

As a result, we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2) + a_3(1 - k_3), \\ bt_3 + c\varepsilon\sqrt{t_3} &= a_3(1 - k_3), \end{aligned} \quad (23)$$

where $a_1 = d_1 q_1, a_2 = d_2 q_2, a_3 = d_3 q_3, a = a_1 + a_2 + a_3$;

$$b_1 = d_1 \mu_1, b_2 = d_2 \mu_2, b_3 = d_3 \mu_3, b = b_1 + b_2 + b_3;$$

$$c_1 = d_1 \sigma_1, c_2 = d_2 \sigma_2, c_3 = d_3 \sigma_3, c = c_1 + c_2 + c_3.$$

The conditions for the second and the third resources to be deficit-free are $k_2 a_2 = d_2 x_2(t_2); k_3 a_3 = d_3 x_3(t_3)$.

Then the time moments of additional purchase of the second and the third resources can be found from the following equations:

$$\begin{aligned} bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2) + a_3(1 - k_3), \\ k_2 a_2 &= b_2 t_2 + c_2 \varepsilon \sqrt{t_2}, \\ bt_3 + c\varepsilon\sqrt{t_3} &= a_3(1 - k_3), \\ k_3 a_3 &= b_3 t_3 + c_3 \varepsilon \sqrt{t_3}. \end{aligned} \tag{24}$$

Determination of the time moments for additional purchase of resources 2 and 3 and of their proportions at the initial time moment

We find the time t_3 of the third resource additional purchase and its proportion k_3 at the initial time moment from third and fourth equations of system (24):

$$t_3 = \frac{a_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_3)^2} - \frac{(c + c_3)\varepsilon}{2(b + b_3)^2} \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)}. \tag{25}$$

$$k_3 = \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - bc_3)}{2a_3(b + b_3)^2} \varepsilon^2 - \left(\frac{b_3 c - bc_3}{2a_3(b + b_3)^2} \right) \varepsilon \sqrt{(c + c_3)^2 \varepsilon^2 + 4a_3(b + b_3)} \tag{26}$$

We find the time t_2 of the second resource additional purchase and its proportion k_2 at the initial time moment from first and second equations of system (24):

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_2)^2} - \\ &- \frac{(c + c_2)\varepsilon}{2(b + b_2)^2} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4(a_2 + a_3(1 - k_3))(b + b_2)} \end{aligned} \tag{27}$$

$$k_2 = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{a_2(b+b_2)}b_2 + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2a_2(b+b_2)^2}\varepsilon^2 - \left(\frac{b_2c-bc_2}{2a_2(b+b_2)^2}\right)\varepsilon\sqrt{(c+c_2)^2\varepsilon^2 + 4(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)} \quad (28)$$

The minimum required reserve of current assets equals to

$$Y_m = a_1 + a_2k_2 + a_3k_3 = a_1 + \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{(b+b_2)}b_2 + \frac{(c+c_2)(b_2c-bc_2)}{2(b+b_2)^2}\varepsilon^2 - \left(\frac{b_2c-bc_2}{2(b+b_2)^2}\right)\varepsilon\sqrt{(c+c_2)^2\varepsilon^2 + 4(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)} + \frac{a_3b_3}{b+b_3} + \frac{(c+c_3)(b_3c-bc_3)}{2(b+b_3)^2}\varepsilon^2 - \left(\frac{b_3c-bc_3}{2(b+b_3)^2}\right)\varepsilon\sqrt{(c+c_3)^2\varepsilon^2 + 4a_3(b+b_3)} \quad (29)$$

Calculation of random variables characteristics

Let us calculate the characteristics of a random variable t_3 :

$$M(t_3) = \frac{a_3}{b+b_3} + \frac{(c+c_3)^2}{2(b+b_3)^2} = \frac{d_3q_3}{(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + 2d_3\mu_3)} + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + 2d_3\sigma_3)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + 2d_3\mu_3)^2} \quad (30)$$

A dispersion of random variable t_3 equals to:

$$D(t_3) = \frac{(c+c_3)^2}{4(b+b_3)^4} (5(c+c_3)^2 + 4(b+b_3)a_3). \quad (31)$$

Also we calculate the characteristics of a random variable t_2 :

$$M(t_2) = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2} = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{b_1 + 2b_2 + b_3} + \frac{(c_1 + 2c_2 + c_3)^2}{2(b_1 + 2b_2 + b_3)^2}. \quad (32)$$

Due to the necessity of building a fully analytical model, it was decided to neglect the summand $-\frac{(c+c_2)\varepsilon}{2(b+b_2)^2} \cdot \sqrt{(c+c_2)^2\varepsilon^2 + 4(a_2+a_3(1-k_3))(b+b_2)}$ during the averaging operation. In this case, we do not need to use numerical methods, but the calculation error may range from 0 to 0,066.

A dispersion of random variable t_2 equals to:

$$D(t_2) = \frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^2} (5(c+c_2)^2 + (a_2 + a_3(1-k_3))(b+b_2)). \quad (33)$$

In this case, during the averaging operation there is also neglected the summand, for which it is impossible to calculate the average value analytically. As a result, the obtained solution has an error that may range from 0 to 0,211.

Next, we find the characteristics of a random variable Y_m :

$$M(Y_m) = a_1 + a_2 M(k_2) + a_3 M(k_3). \quad (34)$$

One can see from (16), it is necessary to find the characteristics of the values k_2 and k_3 to get the characteristics of random variable Y_m :

$$M(k_3) = \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2}, \quad (35)$$

$$M(k_2) = \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{a_2(b + b_2)} b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2}. \quad (36)$$

Thus, the average value of the minimum necessary reserve of current assets Y_m equals to

$$M(Y_m) = a_1 + \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{(b + b_2)} \cdot b_2 + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2(b + b_2)^2} + \\ + a_3 \frac{b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2(b + b_3)^2}, \quad (37)$$

But in this case it is necessary to consider the error resulting from the averaging operation of random variable k_2 . This error may range from 0 to 0,033.

We find a dispersion of Y_m :

$$D(Y_m) = a_2^2 D(k_2) + a_3^2 D(k_3) + 2a_2 a_3 [M(k_2 k_3) - M(k_2)M(k_3)], \quad (38)$$

$$\text{where } D(k_3) = \frac{(b_3 c - b c_3)^2}{4a_3^2(b + b_3)^4} (5(c + c_3)^2 + 4a_3(b + b_3));$$

$$D(k_2) = \frac{(b_2 c - b c_2)^2}{4a_2^2(b + b_2)^4} (5(c + c_2)^2 + 4(a_2 + a_3(1 - k_3))(b + b_2));$$

$$M(k_2 k_3) = \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{a_2(b + b_2)} \cdot \frac{b_2 b_3}{b + b_3} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{b_3}{b + b_3} + \\ + \frac{a_2 + a_3(1 - k_3)}{a_2(b + b_2)} b_2 \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2} + 3 \cdot \frac{(c + c_2)(b_2 c - b c_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \cdot \frac{(c + c_3)(b_3 c - b c_3)}{2a_3(b + b_3)^2}.$$

As a result, the calculation error equals to 0,102 at worst.

Let us calculate the end time t_c of the cycle for the case when all resources are consumed at the same time and in the same proportion. The equation (23) takes the form:

$$bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma, \quad (39)$$

where $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2 + d_3q_3$ – the total reserve of all resources.

Then we solve it and calculate the characteristics:

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma}, \quad (40)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^2}, \quad (41)$$

$$D(t_c) = \frac{c^2}{4b^4} (5c^2 + 4bY_\Sigma) = \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)^4} \cdot \left(5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + d_3\mu_3)Y_\Sigma \right). \quad (42)$$

Thus, there are analytically obtained the means and standard deviations of the second and third resources' refill time:

$$M(t_2) = \frac{a_2 + a_3(1-k_3)}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2}, M(t_3) = \frac{a_3}{b+b_3} + \frac{(c+c_3)^2}{2(b+b_3)^2},$$

$$\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^2} (5(c+c_2)^2 + (a_2 + a_3(1-k_3))(b+b_2))},$$

$$\sqrt{D(t_3)} = \sqrt{\frac{(c+c_3)^2}{4(b+b_3)^4} (5(c+c_3)^2 + 4(b+b_3)a_3)};$$

and the mean and standard deviation of all resources' refill time (end time of the cycle):

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}, \sqrt{D(t_c)} = \frac{c}{2b^2} \sqrt{5c^2 + 4bY_\Sigma}.$$

The average value of the normalization factor $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$:

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{M(Y_m)}{a}. \quad (43)$$

