

УДК 681.5

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАСТРОЕК ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ С ИНТЕРВАЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.А. Гайворонский, М.С. Суходоев

Томский политехнический университет

E-mail: smike@aics.ru

*Определяются настройки робастных ПИ- и ПИД-регуляторов, обеспечивающих апериодический характер переходных процессов в системах при всех возможных значениях интервально-определенных параметров объекта управления. Разработанные процедуры параметрического синтеза регуляторов основаны на задании границ доминирующего вещественного корня характеристического полинома системы, разделении параметров регулятора на зависимые и свободные и применении метода D-разбиения для систем в вершинах многогранника интервальных коэффициентов полинома.*

### Ключевые слова:

*Система автоматического управления, синтез параметров регулятора, корневой метод, интервально-определенные параметры, апериодический переходный процесс, D-разбиение, гарантированные корневые показатели качества.*

### Key words:

*Automatic control system, the synthesis of the controller parameters, the root method, interval-defined parameters, aperiodicity transition, D-partition, guaranteed root quality indicators.*

### Введение

Среди промышленных систем автоматического управления существуют такие (прокатные станы, бумагоделательные машины, антенные установки и т. д.), в которых по технологии функционирования необходимо обеспечивать апериодический характер переходных процессов. В качестве регуляторов в указанных системах обычно используются промышленные ПИ- или ПИД-регуляторы. Главной их задачей является уменьшение колебательности и перерегулирования в системе, приводящее переходные процессы к апериодическому виду.

Объекты управления указанных систем, как правило, имеют характерную особенность, которую необходимо учитывать при параметрическом синтезе регуляторов. Речь идет о наличии у объекта управления интервально-определенных параметров, значения которых точно неизвестны или изменяются в определенных пределах по заранее неизвестным законам в процессе функционирования системы.

В связи с этим актуальна разработка процедур определения настроек ПИ- и ПИД-регуляторов, придающих системе свойство робастной апериодичности [1]. Оно заключается в обеспечении в системе апериодического характера переходных процессов при любых значениях интервально-определенных параметров объекта управления.

### 1. Постановка задачи

Для параметрического синтеза линейных робастных регуляторов указанных типов предлагается использовать подход, основанный на желаемом расположении областей локализации корней характеристического уравнения системы [2, 3]. Известно, что условием апериодического переходного процесса для стационарной системы является такое расположение корней, при котором ближай-

шим к мнимой оси является вещественный корень и выполняется условие его доминирования по отношению ко всем остальным корням [6]. Заметим, что указанный подход хорошо разработан для параметрического синтеза линейных регуляторов стационарных систем. В частности, существуют методики [4, 5] определения параметров регулятора пониженного порядка, обеспечивающих требуемое расположение доминирующих (предписанных) и остальных (свободных) корней уравнения. В качестве доминирующих могут быть заданы как комплексно-сопряженные, так и вещественные корни.

При наличии в объекте управления интервально-определенных параметров каждый корень характеристического уравнения может мигрировать по комплексной плоскости, образуя свою область локализации. Очевидно, что в таком случае для обеспечения в системе апериодического переходного процесса достаточно, чтобы мигрирующий в отрезке вещественный корень оставался доминирующим при любых значениях интервально-определенных параметров системы.

Согласно [6–8], для анализа и синтеза систем с интервально-определенными параметрами можно применять метод корневого годографа. При этом предлагается использовать разработанные в [9, 10] методики, основанные на отображении некоторых проверочных вершин параметрического многогранника полинома на плоскость корней и позволяющие по образам этих вершин находить предельные корневые показатели качества системы (минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности).

Непосредственно для определения параметров регулятора, обеспечивающих выполнение требований к расположению областей локализации корней интервального уравнения, предлагается использовать метод робастного D-разбиения. На его

основе в работе [11] при параметрическом синтезе регулятора для системы с интервально-определенными параметрами проводится построение границ искомой параметрической области по четырем вершинам, соответствующим четырем полиномам Харитонова. В нашем случае для повышения точности при параметрическом синтезе линейного регулятора предлагается применять D-разбиение не для четырех, а для всех проверочных вершин многогранника полинома, определяющих корневые показатели качества системы. Методика выбора таких вершин приведена в [10].

Таким образом, для параметрического синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов, гарантирующих апериодический характер переходных процессов в системе при интервальной определенности параметров объекта управления, необходимо разработать процедуры на основе комбинирования метода D-разбиения и вершинного анализа определения границ областей локализации корней интервального уравнения. При этом предлагается разделять параметры регулятора на 2 группы. Параметры первой группы должны гарантировать желаемое расположение отрезка доминирующего вещественного корня, а параметры второй группы — обеспечивать расположение остальных корней характеристического уравнения в заданной области.

## 2. Прообразы границ отрезка доминирующего вещественного корня

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\sum_{i=0}^n c_i \cdot s^i = 0, \quad (1)$$

где  $\underline{c}_i \leq c_i \leq \bar{c}_i$ ;  $\underline{c}_i$  — минимальное значение  $i$ -го коэффициента;  $\bar{c}_i$  — его максимальное значение. Допустим, что в коэффициенты  $c_i$ ,  $i=0, n$  линейно входят параметры регулятора и интервально-определенные параметры объекта. При этом  $c_i$  образуют параметрический многогранник  $P$ , вершины которого определяются крайними значениями коэффициентов. Данный многогранник отображается на плоскость корней в виде областей их локализации. Пусть для обеспечения апериодического переходного процесса границы областей локализации корней интервального уравнения имеют вид, показанный на рис. 1.

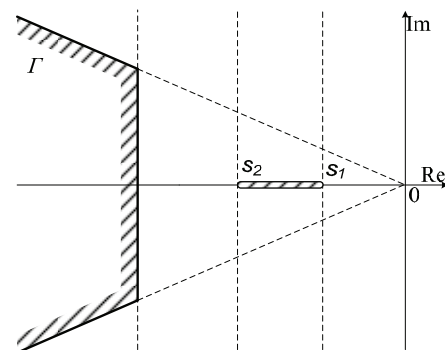


Рис. 1. Границы областей локализации корней

Из рис. 1 видно, что доминирующий вещественный корень  $s^*$  должен быть локализован на заданном отрезке  $[s_1, s_2]$  вещественной оси, а остальные свободные корни локализованы в определенной области  $G$ . Границы этой области задают максимально допустимую степень колебательности и обеспечивают выполнение принципа доминирования. Для параметрического синтеза регулятора представляется целесообразным найти соотношения, связывающие его параметры с границами отрезка корня  $s^*$ . Для этого установлено, что если областью локализации одного из корней интервального уравнения является отрезок вещественной оси и правее него нет других вещественных корней, то правая граница отрезка является отображением вершины с коэффициентами  $\underline{c}_0 \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \dots$ , а левая граница — отображением вершины с коэффициентами  $\bar{c}_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2 \underline{c}_3 \dots$ .

## 3. Основные соотношения для определения настроек ПИ-регулятора

Пусть линейный регулятор описывается передаточной функцией ПИ-регулятора

$$W_{PEГ}(s) = \frac{k_1 + k_2 \cdot s}{s},$$

где  $k_1, k_2$  — параметры регулятора, а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{OY}(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$ ;  $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j s^j$ ,  $\underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j$ ,  $n \geq m$ .

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде

$$D(s) = (k_1 + k_2 s) \cdot A(s) + s \cdot B(s). \quad (2)$$

Пусть набору коэффициентов  $\underline{b}_0 \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \dots$  соответствует вершина  $V_1$ . При данных пределах интервальных коэффициентов имеем вершинный полином  $B^{V_1}(s)$ . Приравняв (2) к нулю и подставив значение вещественного корня  $s_1$  (рис. 1) и координаты  $V_1$ , получим соотношение

$$(k_1 + k_2 s_1) \cdot A(s_1) + s_1 \cdot B^{V_1}(s_1) = 0, \quad (3)$$

связывающее настраиваемые параметры ПИ-регулятора с задаваемым корнем  $s_1$ . Разделим параметры регулятора на зависимый  $k_1$  и свободный  $k_2$  и на основании (3) выразим  $k_1$  через  $k_2$

$$k_1 = (-s_1 \cdot B^{V_1}(s_1) - A(s_1) \cdot k_2 s_1) / A(s_1). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получаем характеристический полином с одним варьируемым параметром  $k_2$

$$A(s) \frac{-s_1 B^{V_1}(s_1) - A(s_1) k_2 s_1}{A(s_1) + k_2 s} + s B(s) = 0. \quad (5)$$

Далее на основе (5), применяя метод D-разбиения в плоскости параметра  $k_2$ , необходимо обеспечить размещение областей локализации свободных

корней уравнения (1) в желаемой области  $\Gamma$  для всех проверочных вершин многогранника  $P$ . С этой целью в (5) делаем подстановку границы области локализации свободных корней  $s = -\delta(\omega) + j\omega$  и пределов интервальных коэффициентов полинома  $B(s)$ , соответствующих координатам проверочной вершины  $V_i$ . В результате получаем функции  $k_2^{V_i}(\omega)$ , задающие границы D-разбиения в плоскости параметра  $k_2$  для каждой проверочной вершины. Заметим, что для определения координат вершин  $V_i$  следует воспользоваться методикой [10, 12].

После получения в результате D-разбиения для каждой вершины  $V_i$  интервалов параметра  $k_2$  находится область их пересечения. Из этой области выбирается искомое значение свободного параметра  $k_2$  и далее по выражению (4) рассчитывается значение зависимого параметра  $k_1$ .

#### 4. Основные соотношения для определения настроек ПИД-регулятора

Пусть в системе используется ПИД-регулятор с передаточной функцией

$$W_{\text{ПР}}(s) = \frac{k_1 + k_2 s + k_3 s^2}{s},$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — параметры регулятора. Тогда интервальный характеристический полином системы имеет вид

$$D(s) = (k_1 + k_2 s + k_3 s^2)A(s) + sB(s). \quad (6)$$

Пусть левая граница  $s_2$  заданного доминирующего отрезка  $[s_1, s_2]$  вещественного корня есть прообраз вершины  $V_2$ , координатами которой, согласно доказанному выше утверждению, являются коэффициенты  $\bar{c}_0 \bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots$ . При данных пределах коэффициентов имеем вершинный полином  $B^{V_2}(s)$ . Подставляя в (4) сначала значение корня  $s_1$  и соответствующие ему координаты  $V_1$ , а затем значение корня  $s_2$  и координаты  $V_2$  в (6), запишем следующие соотношения

$$(k_1 + k_2 s_1 + k_3 s_1^2)A(s_1) + s_1 B^{V_1}(s_1) = 0, \quad (7)$$

$$(k_1 + k_2 s_2 + k_3 s_2^2)A(s_2) + s_2 B^{V_2}(s_2) = 0. \quad (8)$$

Данные соотношения связывают настройки ПИД-регулятора с задаваемыми границами отрезка вещественного корня и интервалом допустимой степени устойчивости. Разделим параметры регулятора на зависимые  $k_1, k_2$  и свободный  $k_3$  и выполним следующие преобразования. Выразим параметр  $k_1$  из (7) и (8):

$$k_1 = (-s_1 B^{V_1}(s_1) - A(s_1)(k_2 s_1 + k_3 s_1^2)) / A(s_1). \quad (9)$$

$$k_1 = (-s_2 B^{V_2}(s_2) - A(s_2)(k_2 s_2 + k_3 s_2^2)) / A(s_2). \quad (10)$$

Исключим из рассмотрения  $k_1$ , для чего приравняем правые части выражений (9) и (10). Из полученного в результате выражения легко определить зависимость  $k_2(k_3)$ . Далее, подставляя выражение  $k_2(k_3)$  в (7) или (8), получаем зависимость  $k_1(k_3)$ .

Конечной целью проводимых преобразований является получение характеристического полинома с одним варьируемым параметром  $k_3$ . Для этого в (5) следует подставить полученные выражения  $k_1(k_3)$  и  $k_2(k_3)$ . Дальнейшее определение свободного параметра  $k_3$  проводится по аналогии с рассмотренным выше нахождением параметра  $k_2$  для ПИ-регулятора по всем проверочным вершинам многогранника характеристического полинома. После выбора  $k_3$  по выражениям  $k_1(k_3)$  и  $k_2(k_3)$  рассчитываются значения зависимых параметров  $k_1$  и  $k_2$  ПИД-регулятора.

#### 5. Параметрический синтез ПИД-регулятора с гарантированным апериодическим видом переходного процесса

Рассмотрим в качестве примера передаточную функцию разомкнутой системы стабилизации с единичной отрицательной обратной связью:

$$W_P(s) = \frac{k_1 + k_2 s + k_3 s^2}{s} \frac{K_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — настраиваемые параметры ПИД-регулятора;  $k_0=1$  — постоянный коэффициент передачи объекта управления;  $b_3, b_2, b_1, b_0$  — интервально-определенные параметры объекта управления;  $b_3=[0,00002;0,00013]$ ;  $b_2=[0,03;0,034]$ ;  $b_1=[0,1;0,2]$ ;  $b_0=[1;4]$ .

Необходимо определить настройки ПИД-регулятора, гарантирующие апериодический переходный процесс с доминирующим вещественным корнем, находящимся в интервале от  $s_1=-4$  до  $s_2=-6$ , и остальными корнями, лежащими в области, ограниченной минимальной степенью устойчивости  $s_3=-14$  и максимальной степенью колебательности  $\varphi=30^\circ$ .

Приведем характеристическое уравнение данной системы к виду:

$$c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0,$$

где  $c_4=b_3$ ;  $c_3=b_2$ ;  $c_1=b_1+k_3$ ;  $c_1=b_0+k_2$ ;  $c_0=k_1$ .

На основании вышеописанной методики проведен параметрический синтез регулятора и получены следующие настройки регулятора:  $k_1=64,0391$ ;  $k_2=15,9586$ ;  $k_3=1,0299$ . Области локализации корней интервального характеристического уравнения с найденными настройками ПИД-регулятора представлены на рис 2.

Построим на одной плоскости координат графики переходных процессов замкнутой системы стабилизации при единичном входном воздействии в каждой из вершин многогранника  $P$ , отображающихся на границу областей локализации  $\bar{V}_i$ , рис. 3.

Как видно из рис. 2 и 3, графики переходных процессов замкнутой системы в граничных вершинах многогранника  $P$  носят желаемый характер, а корни характеристического уравнения локализованы в заданной области  $\Gamma$ .

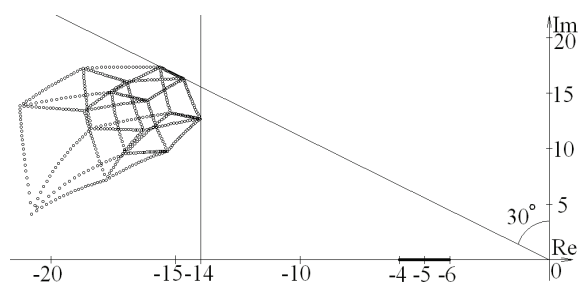


Рис. 2. Области локализации корней системы с интервально-определенными параметрами с полученными настройками ПИД-регулятора

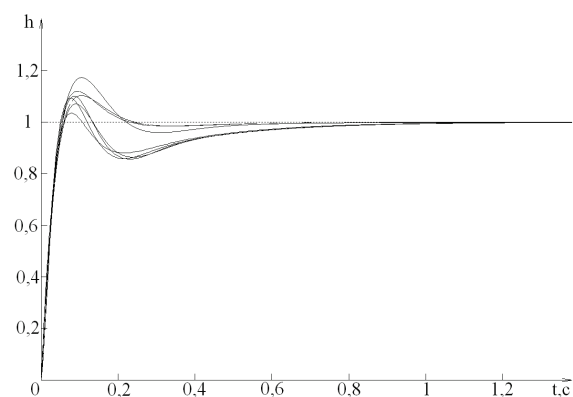


Рис. 3. Переходные процессы в проверочных вершинах  $\vec{V}_T$

## Заключение

Разработанная процедура параметрического синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов позволяет определять их настройки, гарантирующие апериодический характер переходных процессов в системе с интервально-определенными параметрами. Поскольку интервально-определенные параметры объекта могут содержаться как в знаменателе, так и в числителе его передаточной функции, то коэффициенты характеристического полинома могут зависеть от нескольких интервально-определенных параметров объекта. В этом случае характеристический полином имеет аффинную неопределенность, и его следует привести к интервальному типу на основе правил интервальной арифметики. При этом делается допущение: одни и те же интервально-определенные параметры объекта, входящие в различные коэффициенты, могут изменяться независимо. В результате для дальнейшего параметрического синтеза регуляторов также можно использовать многогранник полинома с вершинами, образованными минимальными или максимальными значениями его коэффициентов.

Для практического применения полученных результатов в пакете MatLab разработаны программы параметрического синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов. Решены числовые примеры определения настроек рассматриваемых типов регуляторов, обеспечивающих апериодический характер переходных процессов в системах с интервальными объектами управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 9. – С. 45–54.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
3. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
4. Сковцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
5. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 23–27.
6. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М.: Наука, 1972. – 448 с.
7. Римский Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Вести АН Белоруси. Сер. физ.-техн. наук. – 1994. – № 4. – С. 80–85.
8. Корневые методы исследования интервальных систем / под ред. Г.В. Римского. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. – 186 с.
9. Гайворонский С.А. Вершинный анализ корневых показателей качества системы с интервальными параметрами // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 6–9.
10. Гайворонский С.А. Вершинный анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе // III Междунар. конф. по проблемам управления: Пленарные доклады и избранные труды. – М.: Институт проблем управления, 2006. – С. 180–186.
11. Петров Н.П., Поляк Б.Т. Робастное D-разбиение // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 11. – С. 41–53.
12. Суходоев М.С., Гайворонский С.А., Замятин С.В. Параметрический синтез линейного регулятора интервальной системы с гарантированными корневыми показателями качества // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 5. – С. 10–13.

Поступила 28.10.2009 г.