

УДК 519.245+510.52

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ В ГИПЕРКОНУСЕ

В.И. Рейзлин

Институт «Кибернетический центр» ТПУ

E-mail: vir@tpu.ru

Разработан алгоритм эффективного получения псевдослучайных векторов, равномерно распределенных в n -мерном гиперконусе. Показана его более высокая эффективность по сравнению с методом исключения в случае больших n . Приведены результаты компьютерного эксперимента, подтверждающие теоретические построения.

Ключевые слова:

Псевдослучайный вектор, равномерное распределение, эффективность алгоритма, метод исключения.

Key words:

Pseudorandom vector, even distribution, efficiency of algorithm, expulsion method.

При решении различных стохастических задач может возникнуть необходимость получения последовательности псевдослучайных векторов, направления которых равномерно распределены в некотором гиперконусе n -мерного пространства. В частности, такая потребность может возникнуть в задачах моделирования, в методе случайного поиска оптимума с направляющим конусом [1–3]. Обычно для построения такой последовательности векторов используют метод исключения [3–5]: в пространстве R_n строят изотропный вектор $\mathbf{X}$ и проверяют, лежит ли он внутри гиперконуса (т. е. угол φ между вектором $\mathbf{X}$ и осью конуса меньше угла полураствора конуса). Если он не попал в конус, то строят новый вектор $\mathbf{X}$ и так до тех пор, пока $\mathbf{X}$ не будет лежать внутри конуса. Плотность распределения угла φ в n -мерном пространстве равна [1]

$$f_n(\varphi) = a_n \sin^{n-2} \varphi, \\ a_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция Эйлера.

Поэтому вероятность попадания вектора $\mathbf{X}$ в конус с углом полураствора ψ есть

$$P_n(\psi) = a_n \int_0^\psi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

Отсюда видно, что эффективность метода исключения зависит от размерности пространства n и угла ψ .

Так, в двух- и трехмерном пространствах соответственно получим

$$P_2(\psi) = \frac{\psi}{\pi}, \\ P_3(\psi) = \frac{1 - \cos \psi}{2},$$

что для малых углов дает $P_3(\psi) \approx \psi^2/4$.

В общем случае, учитывая из [1], что $a_n < \sqrt{\frac{n-1}{\pi}}$,

найдем

$$P_n(\psi) < \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \int_0^\psi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi.$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням φ , получим

$$P_n(\psi) < \frac{\psi^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)}} + R(n, \psi),$$

$$\text{где } |R(n, \psi)| < \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \cdot \frac{\psi^{n+1}}{6(n+1)} < \frac{\psi^{n+1}}{6\sqrt{\pi(n+1)}}.$$

Отсюда видно, что при $\psi < 1$ и больших n эффективность метода исключения весьма мала. Можно построить алгоритм генерации псевдослучайных векторов, равномерно распределенных по направлениям в конусе, такой, что эффективность алгоритма не будет зависеть от угла ψ .

Пусть в n -мерном пространстве определена гиперсфера единичного радиуса и $\mathbf{W}$ – произвольный единичный вектор, начало которого лежит в центре гиперсферы. Построим вокруг вектора $\mathbf{W}$, как относительно оси, гиперконус вращения с углом полураствора ψ ($0 < \psi < \pi$). Образует последовательность псевдослучайных изотропных векторов с началом в центре гиперсферы и пусть угол вектора $\mathbf{X}$ из этой последовательности с $\mathbf{W}$ равен α ($0 \leq \alpha \leq \pi$). Пусть β_x – плоскость, проходящая через вектора $\mathbf{X}$ и $\mathbf{W}$. Построим в плоскости β_x из векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{W}$ вектор $\mathbf{Y}$, такой, чтобы его угол с $\mathbf{W}$ стал равен $C \cdot \alpha$, где $C = \psi/\pi$.

Аналогичную операцию проделаем со всеми изотропными векторами последовательности. Очевидно, что при таком преобразовании $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ гиперсферы все изотропные вектора перейдут внутрь рассматриваемого гиперконуса, а направления этих векторов будут равномерно распределены в этом гиперконусе.

Вектор $\mathbf{Y}$, угол которого с $\mathbf{W}$ равен $C \cdot \alpha$, можно построить как сумму $\mathbf{Y} = \mathbf{W} + K \cdot \mathbf{X}$. Коэффициент K найдем из соотношения

$$\cos(\widehat{\mathbf{Y}\mathbf{W}}) = \cos(\alpha C).$$

Обозначая через $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ скалярное произведение векторов, последнее соотношение перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{Y}, \mathbf{W})}{|\mathbf{Y}|} &= \frac{(\mathbf{W}, \mathbf{W}) + K(\mathbf{X}, \mathbf{W})}{\sqrt{(\mathbf{W} + K \cdot \mathbf{X}, \mathbf{W} + K \cdot \mathbf{X})}} = \\ &= \frac{1 + K \cos \alpha}{\sqrt{1 + K^2 + 2K \cos \alpha}} = \cos \alpha C. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения дает

$$K_1 = \frac{\sin C\alpha}{\sin(\alpha - C\alpha)}, \quad K_2 = -\frac{\sin C\alpha}{\sin(\alpha + C\alpha)}.$$

Очевидно, что K_2 имеет разрыв при $\alpha = \frac{\pi}{1+C}$, и не все вектора гиперболы перейдут при преобразовании, соответствующем K_2 , в нужный гиперконус. Поэтому вектор $\mathbf{Y}$ в гиперконусе задается в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} + K \cdot \mathbf{X}, \quad K = \frac{\sin C\alpha}{\sin(\alpha - C\alpha)}. \quad (1)$$

Теперь, если необходимо, можно $\mathbf{Y}$ нормировать. В результате алгоритм построения псевдослучайных векторов $\mathbf{Y}$, равномерно по направлениям распределенных в гиперконусе с единичной осью $\mathbf{W}$ и углом полуоткрытия ψ (алгоритм сжатия), выглядит следующим образом:

1. По углу ψ определить $C = \psi/\pi$.
2. Построить единичный изотропный вектор $\mathbf{X}$.
3. Вычислить $(\mathbf{X}, \mathbf{W}) = \cos \alpha$.
4. Определить углы α , $C\alpha$.
5. Если $\alpha = 0$, то положить $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ и перейти к п. 8.
6. Если $\alpha = \pi$ (т. е. $\mathbf{X} = -\mathbf{W}$), то формулы (1) дают $K = 1$, $\mathbf{Y} = 0$. В этом случае необходимо перейти к п. 2.
7. Найти K и построить вектор $\mathbf{Y}$ по формулам (1).
8. Если необходимо получить очередной вектор в гиперконусе, то перейти к п. 2.

Для проверки работоспособности алгоритма сжатия и его сравнения с алгоритмом исключения был проделан численный эксперимент на ЭВМ. Координаты псевдослучайного изотропного вектора $\mathbf{X}$ определялись согласно следующему предложению [6]: если случайные величины $x_1, \dots, x_n$ независимы и распределены нормально с параметрами $(0, 1)$, то вектор $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ является изотропным. Для моделирования нормального распределения с помощью датчика случайных чисел α_i , равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$, строились случайные ве-

личины $\eta_j^{(m)} = \sqrt{\frac{12}{m}} \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right)$, $j = 1, \dots, n$. На основании центральной предельной теоремы эта слу-

чайная величина $\eta_j^{(m)}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$. Обычно считают, что $\eta_j^{(m)}$ практически нормальна уже при $m=12$. По величинам $\eta_j^{(m)}$ определялись координаты вектора $\mathbf{X}$ с учетом нелинейной поправки, улучшающей моделирование нормальной случайной величины [6]:

$$x_j = \eta_j^{(m)} + \frac{1}{20m} ((\eta_j^{(m)})^3 - 3\eta_j^{(m)}).$$

Величина m выбиралась равной 12, 20, 30, 100, а размерность n от 2 до 7.

Обозначим через T время, необходимое для построения L векторов в гиперконусе по алгоритму сжатия, а через $T_1(\psi)$ – время построения L векторов в этом же конусе по алгоритму исключения.

Алгоритм исключения обрабатывает $L_1 > L$ векторов и $L = L_1 \approx P_n(\psi)$. Эффективность алгоритма сжатия по отношению к алгоритму исключения определяется величиной $T_1(\psi)/T = E(\psi, n, m)$. Поскольку алгоритм сжатия при $L = L_1$, т. е. при $\psi = \pi$, требует большего числа операций, чем алгоритм исключения, то $T_1(\pi)/T = E(\pi, n, m) = E_0(n, m) < 1$ и при углах, близких к π , рассматриваемый метод эффективнее метода сжатия. Очевидно, что для углов $0 < \psi < \pi$ ве-

$$\text{личина } E(\psi, n, m) \approx \frac{E_0(n, m)}{P_n(\psi)}.$$

Численный эксперимент показал, что относительная эффективность алгоритма сжатия практически не зависит от величины m . Поэтому ниже приведены только результаты, полученные для $m=12$. На рис. 1–3 показаны результаты численного эксперимента для относительной эффективности $E(\psi, n, 12)$, полученные при $L=10^6$ и $n=1, 2, \dots, 7$. На рис. 1 приведена относительная эффективность алгоритма сжатия при углах ψ , лежащих в диапазоне $[\pi/10, 7\pi/10]$.

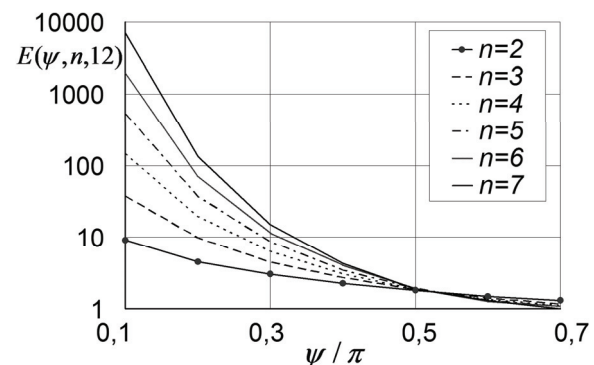


Рис. 1. Относительная эффективность алгоритма сжатия при $m=12$ и разных углах ψ и размерностях n

Рис. 2 представляет относительную эффективность метода сжатия для углов, близких к π . Анализ этих данных показывает, что более высокая вычислительная сложность алгоритма сжатия (по отношению к алгоритму исключения) не приводит к слишком малым значениям $E_0(n, m)$. Для углов ψ , близких к $0, 7\pi$, эффективность двух алгоритмов

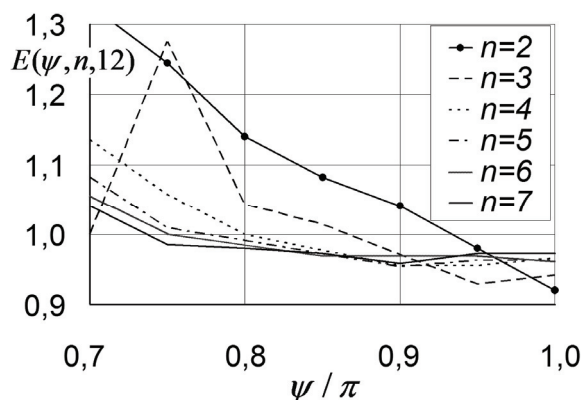


Рис. 2. Относительная эффективность метода сжатия для углов, близких к π

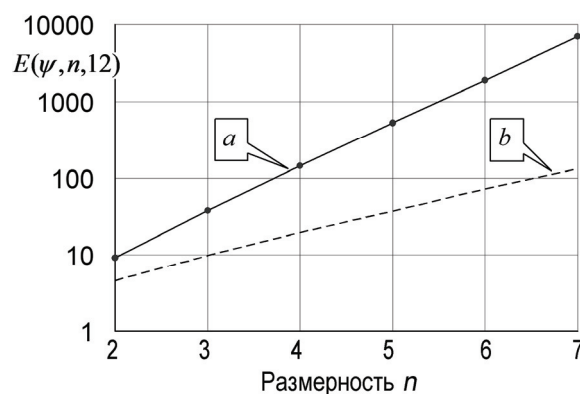


Рис. 3. Относительная эффективность метода сжатия для углов: а) $\psi=\pi/10$ и б) $2\pi/10$

примерно одинакова, а при малых углах φ алгоритм сжатия намного эффективнее. На рис. 3 приведены графики функции $E(\psi, n, 12)$ для $\psi=\pi/10$ (а) и $2\pi/10$ (б) в зависимости от размерности n .

Результатом настоящей работы является следующее: разработан алгоритм эффективного получения псевдослучайных векторов, равномерно распределенных в n -мерном гиперконусе. Показана его более высокая эффективность по сравнению с

методом исключения в случае больших размерностей n и углов $\psi < 0,7\pi$. Теоретическое рассмотрение и результаты численного эксперимента показывают, что при малых углах ψ относительная эффективность алгоритма сжатия весьма велика. Этот метод можно применять и в диапазоне $0,7\pi < \psi < \pi$, поскольку его быстродействие в этом случае не намного меньше быстродействия метода исключения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Растринин Л.А. Стохастические методы поиска. — М.: Наука, 1968. — 376 с.
2. Растринин Л.А. Адаптация сложных систем. — Рига: Зинатне, 1981. — 375 с.
3. Давыдов И.Е. Применение метода случайного поиска в задаче модального формирования динамических свойств системы «ракета-носитель — автомат стабилизации» // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. — 2007. — № 4. — С. 31–35.
4. Теория и применение случайного поиска / под ред. Л.А. Растринина. — Рига: Зинатне, 1969. — 305 с.
5. Рейзлин В.И., Молодых В.А., Орлов В.А. Точки, равномерно распределенные в гиперконусе // Математическое и программное обеспечение САПР: Сб. научно-технических работ. — Томск: Изд-во ТПУ, 1997. — С. 126–128.
6. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

Поступила 29.03.2010 г.