

мы в рабочей точке на ВАХ компоненты импеданса плазменного зазора могут проявлять как индуктивные, так и емкостные свойства. При этом значительную роль играет объемная ионизация.

С уменьшением влияния объемной ионизации на процессы в межэлектродном зазоре вклад емкостной составляющей импеданса преобразователя увеличивается. Возможно, этими обстоятельствами объясняется сложный характер поведения импеданса плазменного зазора в области шнурования разряда, где сосуществуют области с параметрами плазмы характерными как для дугового, так и для диффузионного режимов работы ТЭП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синявский В.В. Методы и средства экспериментальных исследований и реакторных испытаний термоэмиссионных сборок.– М.: Энергоатомиздат, 2000.– 375 с.
2. Мендельбаум М.А., Эськов В.Д. Термоэмиссионный преобразователь в режиме переключения нагрузки// Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.– 1983.– № 6.– С. 147–151.
3. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма/ Ф.Г. Бакшт, Г.А. Дюжев, А.М. Марциновский и др.; под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса.– М.: Наука, 1973.– 480 с.
4. Лидоренко Н.С., Лошкарев А.И., Бондаренко В.Д. Динамические характеристики плазменного диода в режиме низковольтного дугового разряда. II. Экспериментальное исследование динамических характеристик // ЖТФ.– 1973.– Том 43.– С. 1203–1211.
5. Дейнеженко А.Л., Зимин В.П. Численное моделирование нестационарных вольт-амперных характеристик плазменного диода в дуговом режиме // Известия СО АН СССР. Серия Технические науки.– 1987.– № 6.– С. 84–87.
6. Зимин В.П. Исследование особенностей плазменных граничных условий у эмиттера термоэмиссионного диода // Известия Томского политехнического университета.– 2013.– Том 322.– № 2.– С. 11–15.
7. Зимин В.П. Исследование особенностей плазменных граничных условий у коллектора термоэмиссионного диода // Известия Томского политехнического университета.– 2013.– Том 323.– № 2.– С. 158–163.
8. Зимин В.П. Исследование температурного резонанса в низкотемпературной нестационарной плазме // Материалы VIII-ой Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы, г. Минск, 1991.– Минск, 1991.– С. 27–28.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Т.А. Инхиреева., А.В. Козловских
(г. Томск, Томский политехнический университет)
e-mail: tai2@tpu.ru

ANALYTICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH CUBIC NONLINEARITY

T. A. Inkhireeva, A. V. Kozlovskikh
(Tomsk, Tomsk Polytechnic University)

This paper considers method of Cauchy problem solution for nonlinear differential equation. Source of solution error and way of eliminating it is studied. Solution obtained with suggested method is compared with solution obtained with built-in MATLAB functions.

Keywords— Cauchy problem, equilibrium points, Poincare secant, fundamental system of solutions.

В одной из задач теории циклических ускорителей исследуется поведение заряженных частиц в медианной плоскости тороидальной вакуумной камеры. Исследуется поведение частиц как в области устойчивых колебаний, так и вне её. Математически задача сводится к уравнению

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x \cdot n(x) = 0,$$

где $n(x)$ дифференциальная характеристика спада магнитного поля, создаваемого в камере ускорителя. Функция $n(x)$, получаемая при обработке измерений магнитного поля, достаточно хорошо аппроксимируется кубическим полиномом, и для одного из типов циклических ускорителей [1] получаем нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого и будет предметом исследований

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 0.298 \cdot x - 0.0023 \cdot x^3 = 0. \quad (1)$$

Преобразуем его к виду (2)

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \omega(x)^2 \cdot x = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega(x)^2 = (0.298 - 0.0023 \cdot x^2). \quad (2a)$$

Основная идея построения аналитического решения уравнения (1) заключается в следующем: преобразовав (1) в (2) и считая для малого $\Delta\theta$ $\omega(x_i(\theta_i)) \text{ const}$ (θ_i – левая граница интервала $\theta_i + \Delta\theta$) получаем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения известно:

$$x = a \cdot \cos(\omega_i \cdot \theta) + b \cdot \sin(\omega_i \cdot \theta).$$

Рассмотрим подробно решение задачи Коши на первом шаге.

Дано: начальные условия (x_0, px_0 – производная, θ_0). Продифференцировав общее решение, можем найти неизвестные коэффициенты, а затем записать решение задачи Коши на шаге $\Delta\theta$ в матричной форме:

Полученные в (3) значения координаты и производной являются начальными условиями для решения на следующем шаге $\Delta\Theta$

$$\begin{pmatrix} x(\theta_i + \Delta\theta) \\ px(\theta_i + \Delta\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i \cdot \Delta\theta) & \frac{\sin(\omega_i \cdot \Delta\theta)}{\omega_i} \\ -\omega_i \cdot \sin(\omega_i \cdot \Delta\theta) & \cos(\omega_i \cdot \Delta\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ px_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом частота будет, согласно (2a),

$$\omega(x(\theta_0 + \Delta\theta))^2 = (0.298 - 0.0023 \cdot x(\theta_0 + \Delta\theta)^2).$$

Вычисляя последовательно в цикле по выражению (3) значения фазовых координат с учётом изменения $\omega(x_i(\theta_i))$, получим решение исходного уравнения на дискретной сетке с шагом $\Delta\Theta$.

При реализации любого алгоритма для решения уравнения (1) возникает вопрос о точности получаемого решения. Это уравнение относится к типу «негрубых» (по принятой в нелинейной динамике классификации уравнений особенно чувствительных к погрешности вычислений и малому изменению параметров), а в нашем случае описывает колебательный процесс в консервативной системе, т.е. колебания с постоянной амплитудой. Наличие даже небольших погрешностей приводит к нарушению фундаментального свойства таких систем (полная энергия – const).

Для более полного представления свойств решений уравнения (1) воспользуемся методами качественной теории дифференциальных уравнений [2], т.е. найдём координаты особых точек, определим их тип. Точки имеют координаты: $a - (0,0)$, $b - (-11.4, 0)$, $c - (11.4, 0)$. Их типы: 1 – центр; 2,3 – седла.

В случае точного решения уравнения фазовая траектория через оборот отображается сама на себя и на фазовой плоскости получается замкнутая параметрическая кривая. На графике рис.1 видно, что это условие не выполняется ни для предлагаемого алгоритма (рис.1а), ни для численного ode45 [4] (рис.1б), на интервале независимой переменной $\Theta = 100 \cdot \pi$ и начальных значений фазовых координат (11,0).

При этом заметим, что погрешность предлагаемого метода нарастает быстрее.

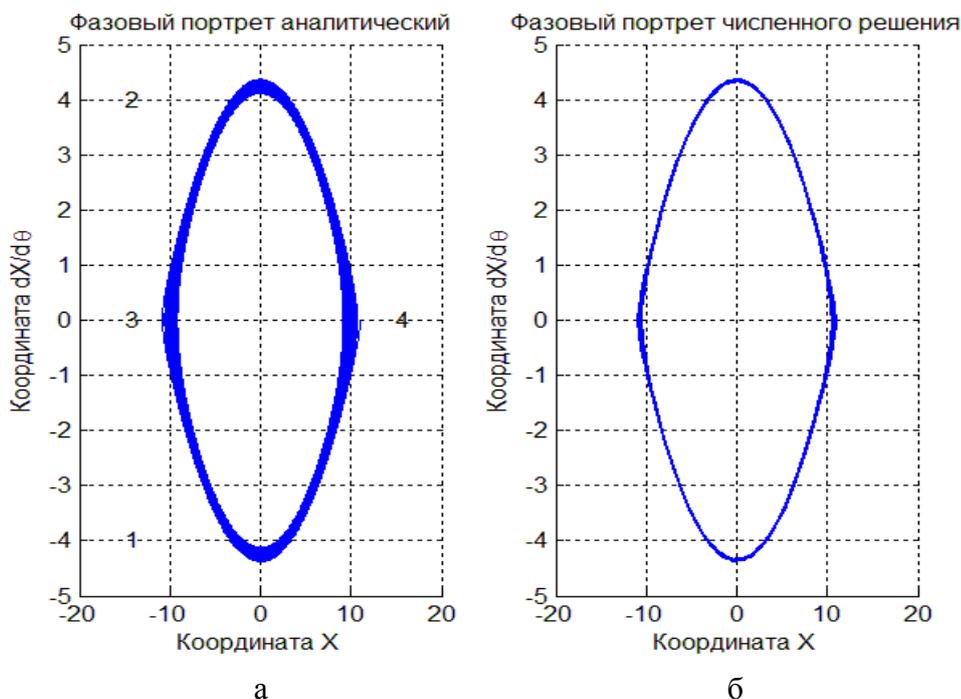


Рис.1. Фазовые траектории в области устойчивого движения

При исследовании решений нелинейных дифференциальных уравнений на фазовой плоскости возможны два подхода.

1. Фазовая плоскость (x, px) как бы перемещается вместе с координатой Θ и мы получаем не прерывные траектории на фазовой плоскости (рис. 1а, б). Это, фактически, расширенное фазовое пространство (x, px, Θ) .

2. Фазовая плоскость фиксируется в Θ_s и на ней отображаются значения фазовых координат (x_s, px_s) , когда текущее значение Θ совпадает с Θ_s через 2π .

Таким образом, мы получаем точечное отображение Пуанкаре, у которого размерность пространства уменьшается на 1. Согласно выражению (2а), при уменьшении амплитуды колебаний возрастает их частота и появляется эффект «разбегания фаз» двух решений, так как их амплитуды уменьшаются с разной скоростью. Этот эффект явно выражен на точечном отображении.

На рис.2 приводится точечное отображение Пуанкаре фазовых траекторий рис.1.

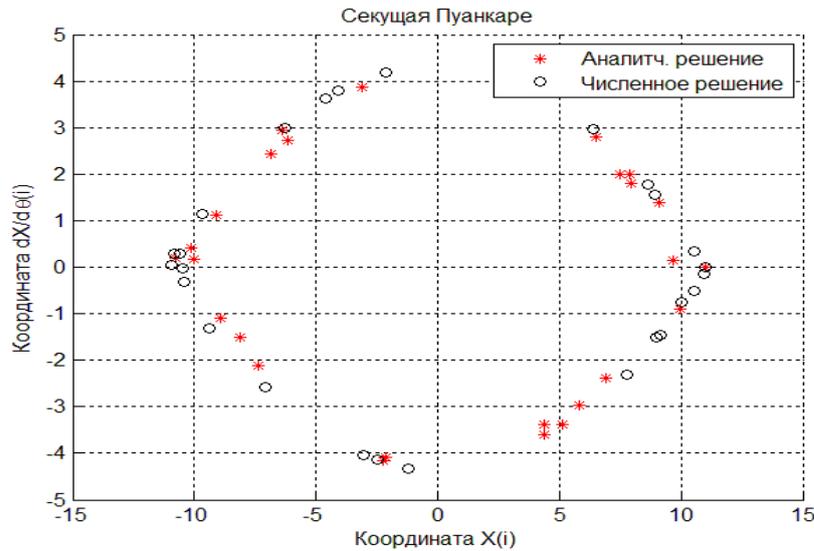


Рис.2. Секущая Пуанкаре

Точное решение уравнения.

Получить точное решение уравнения (1), используя предложенный алгоритм, можно при компенсации потерь полной энергии на каждом шаге. При вычислении полной энергии системы кинетическая, как функция скорости, вычисляется по известной формуле, потенциальная как интеграл возвращающей силы из уравнения (1)

$$\Pi = \int (0.298 \cdot x - 0.0023 \cdot x^3) dx = 0.149 \cdot x^2 - 0.000575 \cdot x^4.$$

Подставив в сумму кинетической и потенциальной энергий начальные условия (x_0, px_0) , найдём полную энергию системы W_0

$$W_0 = px_0^2 / 2 + 0.149 \cdot x_0^2 - 0.000575 \cdot x_0^4. \quad (4)$$

Уменьшение амплитуды происходит по закону, близкому к экспоненте. Тогда связь между текущим значением полной энергии W_i и W_0 запишется в следующем виде

$$W_i = e^{k \cdot \Delta t} \cdot W_0. \quad (5)$$

Из (5) найдём поправочный коэффициент и, с учётом квадратов координат и производных в (4), выражения для точных значений фазовых координат будут

$$x_{ii} = \sqrt{e^{-\ln(W_i/W_0)}} \cdot x_i$$

$$px_{ii} = \sqrt{e^{-\ln(W_i/W_0)}} \cdot px_i$$

Результаты решения (1) с учётом поправок (6) приводятся на рис.3. Начальные условия и интервал интегрирования те же самые, что использовались при построении фазового портрета рис.1.

На приведенном рисунке видно, что отображающие точки на фазовой траектории аналитического решения отображаются сами на себя, т.е. полная энергия const, а амплитуда колебаний остаётся постоянной.

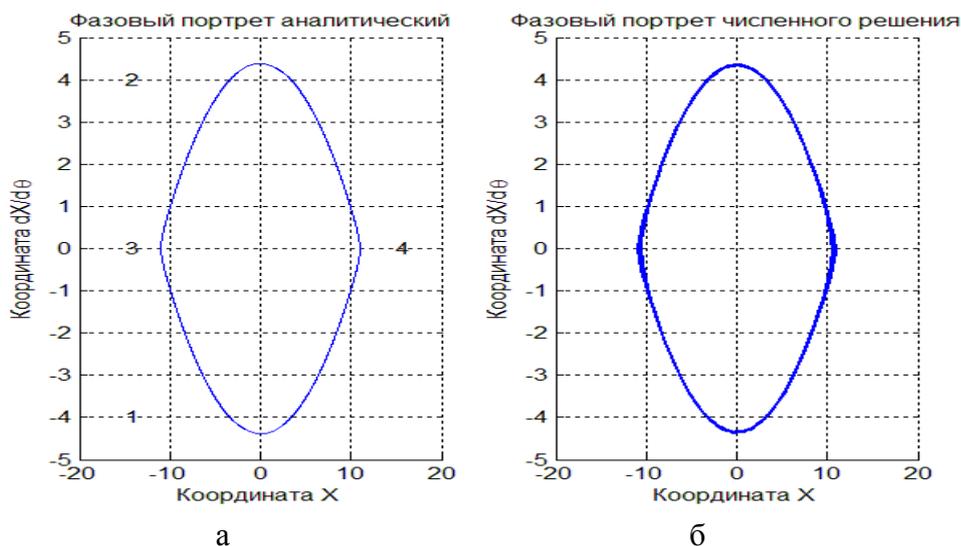


Рис.3. Точное решение аналитическим методом

Рассмотрим оценку полученного решения с помощью секущей Пуанкаре.

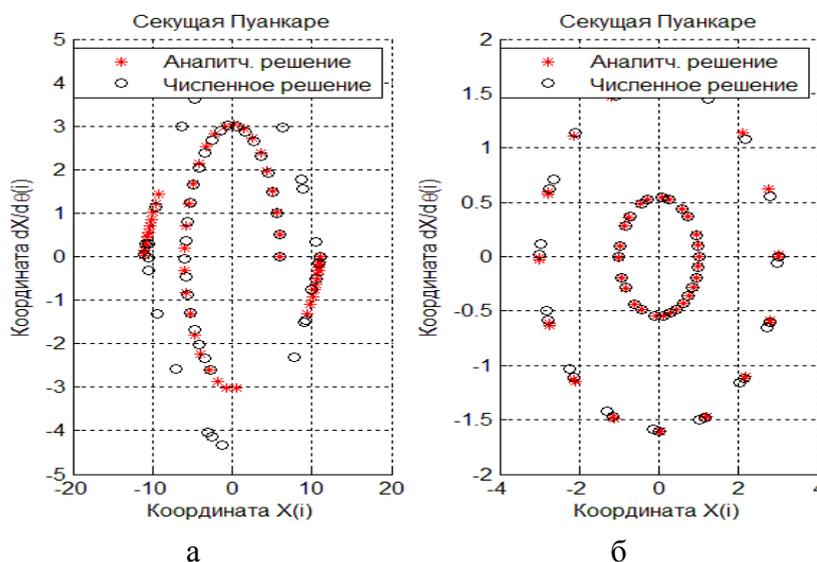


Рис.4. Секущая Пуанкаре точного решения

На графике рис.4.б приводятся отображения Пуанкаре для двух начальных условий. При $(x_0=1, px_0=0)$ частота по (2) меняется мало и решения аналитическое и численное практически совпадают. Для $(x_0=3, px_0=0)$ появляются первые признаки «разбегания фаз», которое выражено всё заметнее с увеличением амплитуды (начальных условий) колебаний рис.4.а. Особенно это заметно для начальных условий, близких к точке типа седо (Рис.2 и Рис.4а).

Для проведения более объективного анализа точности решений обоими методами, воспользуемся одним из свойств функций, являющихся решением дифференциального уравнения, а именно: при подстановке таких функций в исходное уравнение оно обращается в тождество. Для однородного уравнения в результате подстановки должны получить 0.

В результате такого анализа получили погрешность аналитического решения на два порядка меньше. Заметим ещё, что численным методом получилось на три колебания больше, так как частота с уменьшением амплитуды колебаний согласно (2а) увеличивается.

Исследование решений в области неустойчивого решения.

Если задать начальные условия такие, что отображающая точка на фазовой плоскости будет лежать вне сепаратрис (например $(x_0=12, p_{x0}=0)$), то, согласно (2а), $\omega(x)^2$ станет <0 . Уравнение (2) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} - k(x)^2 \cdot x = 0. \quad (7)$$

В этом случае функции образующие фундаментальную систему решений будут $\exp(-k \cdot \theta)$; $\exp(k \cdot \theta)$,

а общее решение и его производная запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a \cdot \exp(-k \cdot \theta) + b \cdot \exp(k \cdot \theta), \\ \frac{dx}{d\theta} &= -k \cdot a \cdot \exp(-k \cdot \theta) + k \cdot b \cdot \exp(k \cdot \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Методика решения уравнения (7) такая же, как и (1).

Уравнение (7), в отличии от предыдущего случая, относится к типу «грубых», т.е. таких, свойства решений которых мало меняются при не большом изменении параметров или не значительной погрешности. Сравнение результатов решения предлагаемым методом и численным, проводилось без каких либо корректирующих процедур. Фазовые траектории, построенные этими методами, практически не отличаются.

При подстановки найденных решений в уравнение (7) получили, что погрешность для аналитического решения на два порядка меньше, что указывает на то, что это решение ближе к точному чем численное.

На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. Разработка и применение алгоритмов, учитывающих особенности математических моделей конкретных физических систем (в частности, выполнение закона сохранения полной энергии), позволяют получить более точное решение, чем стандартные функции интегрирования ДУ математических пакетов.

2. Последние годы всё активнее используются аналитические математические пакеты типа Mathematica, Maple как для изучения теории ДУ, так и для решения в аналитическом виде конкретных задач [3]. Предлагаемый метод решения ДУ позволяет расширить возможности таких пакетов, т.к. алгоритм может быть реализован стандартными функциями этих пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Ананьев, А.А. Воробьев, В.И. Горбунов. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон. Москва. 1961. 350 с. УДК – 621.384.6.
2. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990.
3. Эдвардс и Пенни. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB.– М.:2008.
4. И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. MATLAB в подлиннике. – СПб.: БХВ - Петербург, 2005. – 1104с.