

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы практической теории горения / В.В. Померанцев, М.К. Арефьев, Д.Б. Ахметов и др. — Л.: Энергия, 1973. — 227 с.
2. Канторович Б.В. Основы теории горения и газификации твердого топлива. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 194 с.
3. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. — М.: Энергия, 1976. — 349 с.
4. Ким Л.В. Определение коэффициента теплообмена в пористых средах // Инженерно-физический журнал. — 1993. — Т. 65. — № 6. — С. 663–667.
5. Алифанов А.М., Трянин А.П., Ложкин А.Л. Экспериментальное исследование метода определения коэффициента внутреннего теплообмена в пористом теле из решения обратной задачи // Инженерно-физический журнал. — 1987. — Т. 52. — № 3. — С. 461–469.
6. Страхов В.Л., Гарашенко А.Н., Рудзинский В.П. Расчет нестационарного прогрева многослойных огнезащитных конструкций // Вопросы оборонной техники. — 1944. — Сер. 15. — Вып. 1 (109–110). — С. 30–36.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 354 с.
8. Корчунов Ю.Н., Тюльпанов Р.С. Исследование скорости термического разложения древесины и торфа // Инженерно-физический журнал. — 1960. — № 7. — С. 102–105.
9. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов. — М.: Физматгиз, 1963. — 142 с.

УДК 533.6.011

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ КАНАЛА ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет

E-mail: vlg@tpu.ru

Для дифференциальных уравнений, описывающих одномерное стационарное течение с переходом через скорость звука, предлагаются зависимости в правых частях этих уравнений, позволяющие получить аналитические выражения для параметров газа в канале постоянного сечения.

1. Введение

При решении стационарных газодинамических задач возникает проблема апробации разработанных программ путем сравнения с точными решениями. Для нестационарных течений таких решений достаточно много [1], в то время как для стационарных — значительно меньше. Прежде всего, это уравнения, описывающие течение от источника (стока), и трансцендентное уравнение, описывающее одномерное распределение числа Маха вдоль канала переменного сечения при изоэнтальпическом, изоэнтропическом течении идеального совершенного газа [2]:

$$\frac{\min(A)}{A} = M \left(\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right)^{(\gamma + 1)/(2(\gamma - 1))}, \quad (1)$$

где: $M = U\sqrt{\rho/(\gamma P)}$ — число Маха; ρ , U , P , A , γ — плотность, скорость, давление, площадь поперечного сечения сопла, показатель адиабаты газа. Большинство других решений базируется на (1). Так, в [3] нахождение параметров двухфазного течения сводится к решению уравнения (1) путем использования гипотезы о законе отставания частиц и введением некоторого эффективного показателя адиабаты.

В данной работе предлагаются зависимости в правых частях уравнения движения и энергии, при которых дифференциальные уравнения имеют точное решение в виде трансцендентного уравнения для распределения числа Маха вдоль канала постоянного сечения, и явные выражения для ос-

тальных параметров газа. Более простые соотношения приведены в [4].

2. Исходные уравнения

Рассмотрим одномерные стационарные уравнения для идеального совершенного газа в канале постоянного сечения:

$$\frac{d\rho U}{dx} = 0, \quad \frac{d(\rho U^2 + P)}{dx} = C_1, \quad \frac{d\rho UH}{dx} = C_2, \quad (2)$$

где: $H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2}$ — полная энтальпия; x — продольная координата, принадлежащая рассматриваемой области $[x_a; x_b]$; C_1 и C_2 — правые части уравнений движения и энергии.

Полагается, что: $\gamma = \text{const}$; заданы граничные условия на входе в сопло в виде $H = H(x_a)$, $S = S(x_a)$, $C_1(x_a) = C_2(x_a) = 0$; внутри рассматриваемой области число Маха монотонно возрастает от дозвуковой до сверхзвуковой величины, и существует только одна точка x^* , в которой $M = 1$.

Переходя к переменным H , S , M , N и используя вместо уравнения неразрывности его интеграл, перепишем уравнения (2) в следующем виде:

$$\frac{dS}{dx} = \left(\frac{C_2}{U} - C_1 \right) \frac{(\gamma - 1)}{\rho^\gamma}, \quad \frac{dH}{dx} = \frac{C_2}{\rho U}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right)^{H_0} M = \frac{\min(N)}{N}, \quad (4)$$

где:

$$N = \left(\frac{H}{H_0} \right)^{H_0} \left(\frac{S}{S_0} \right)^f, \quad (5)$$

$$S = \frac{P}{\rho^\gamma}, H_0 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}, S_0 = \frac{1}{\gamma}, f = \frac{1}{1 - \gamma}.$$

Старые переменные выражаются через новые с использованием формул:

$$U = M \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)H}{2 + (\gamma - 1)M^2}}, \quad \rho = \frac{\min(N)}{U}, \quad P = S\rho^\gamma. \quad (6)$$

С учетом вышеупомянутых ограничений на число Маха можно показать [5], что для N получается необходимое и достаточное условие существования в точке x_* единственного минимума:

$$\min(N) = N(x_*), \quad \left. \frac{dN}{dx} \right|_{x_*} = 0, \quad \left. \frac{d^2N}{dx^2} \right|_{x_*} > 0. \quad (7)$$

Произведем обезразмеривание отнесением x – к ширине канала, U – к критической скорости U_c , ρ – к критической плотности ρ_c , P – к произведению $\rho_c U_c^2$. Тогда $H(x_a) = H_0$ и $S(x_a) = S_0$. Подставляя последние два выражения в (5) получим граничное условие для N :

$$N(x_a) = 1. \quad (8)$$

3. Точные решения

Пусть заданы x_* , b_1 , b_2 , причем $x_a < x_* < x_b$, $0 \leq b_1$, $0 < b_2 < 1$. Рассматривая простейшие зависимости, представим S в виде линейной функции, удовлетворяющей граничным условиям и условию не убывания энтропии, а N – в виде квадратичной функции, удовлетворяющей (7, 8):

$$S = S_0(b_1(x - x_a) + 1), \quad (9)$$

$$N = b_2 \left(\frac{x - x_*}{x_a - x_*} \right)^2 + 1 - b_2. \quad (10)$$

Тогда число Маха находится из трансцендентного уравнения (4), точное решение для H получается из (5):

$$H = H_0 \left(N \left(\frac{S_0}{S} \right)^f \right)^{\frac{1}{H_0}},$$

а остальные параметры находятся из (6). Дифференцируя (5) по "x" и, используя (3), получим соотношения для C_1 , C_2 , которые можно использовать в (2) для численного решения:

$$C_2 = \frac{UH\rho}{H_0} \left(\frac{N'}{N} - f \frac{S'}{S} \right), \quad C_1 = \frac{C_2}{U} + f\rho^\gamma S', \quad (11)$$

причем N , S , N' , S' в (11) берутся из (9), (10). Штрих обозначает производную по "x". Очевидно, что если в (9) положить $b_1 = 0$, то этому будет соответствовать случай $S = S_0 = \text{const}$.

Для $H = H_0 = \text{const}$ и (10) число Маха находится из (4), точное решение для S получается из (5):

$$S = S_0 N^{\frac{1}{f}},$$

остальные параметры из (6). Естественно, что в этом случае энтропийная функция на определенном участке может убывать. Правые части для ур. (2) получаются из ур. (3) и (5):

$$C_2 = 0, \quad C_1 = P \frac{N'}{N}, \quad (12)$$

где N и N' берутся из (10).

Очевидно, что в предложенных соотношениях распределение числа Маха, определяемое из (4), зависит только от величин x_a , x_* , b_2 в (10).

4. Численные расчеты

На рис. 1 приведено распределение числа Маха вдоль канала, полученное из ур. (4) и (10) при значениях $\gamma = 1,4$, $x_a = -4$, $x_* = 0$, $x_b = 2$, $b_2 = \{0,1; 0,5; 0,9\}$.

Для предложенных правых частей ур. (11, 12) был проведен ряд расчетов методом установления по явной схеме Мак-Кормака [6] для нестационарного аналога ур. (2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^2 + P)}{\partial x} = C_1,$$

$$\frac{\partial (\rho H - P)}{\partial t} + \frac{\partial \rho U H}{\partial x} = C_2,$$

число точек сетки при этом равнялось 40. Начальное распределение, показанное на рис. 1, найдено из соотношений:

$$U = 0,18(x + 2) + 1, \quad \rho = \left(\left(H_0 - \frac{U^2}{2} \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma S_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad P = S_0 \rho^\gamma,$$

что соответствует начальному положению точки $x_* = -2$.

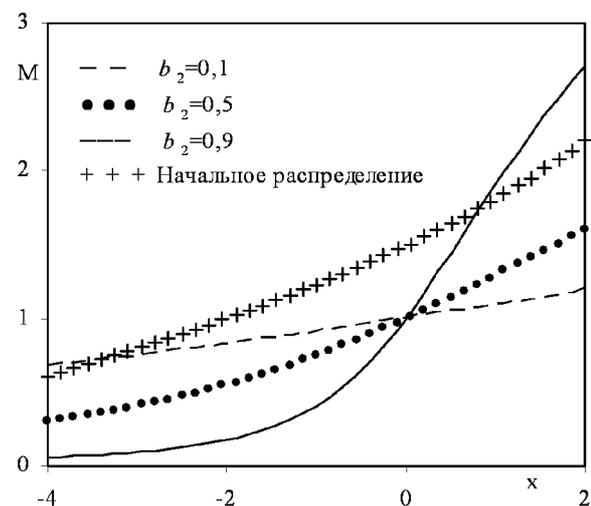


Рис. 1. Распределение числа Маха вдоль канала

В процессе установления при использовании правых частей ур. (11, 12) и некоторого значения b_2 , распределение числа Маха вдоль канала будет сходиться к соответствующей кривой на рис. 1, при этом положение точки x_* будет сходиться к 0.

На рис. 2 и рис. 3 показано положение самой левой из точек x_* в процессе установления.

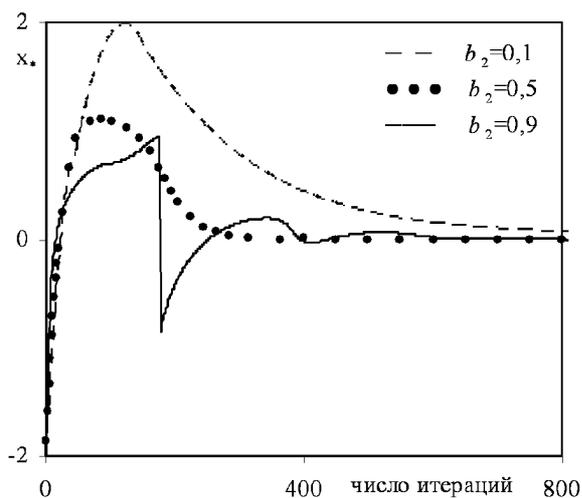


Рис. 2. Положение x_* в процессе установления при $b_1=0,4$

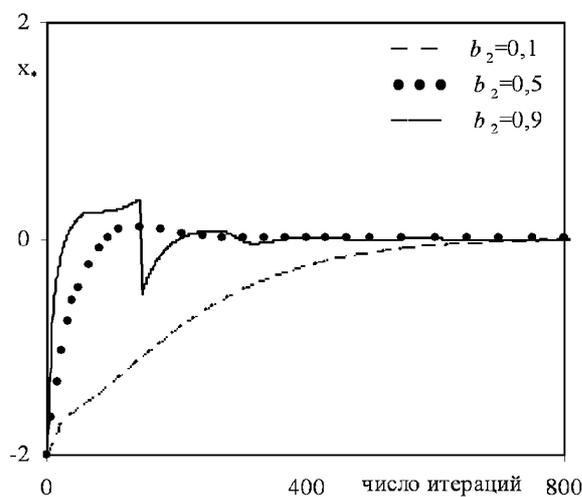


Рис. 3. Положение x_* в процессе установления при $H=const$

Видно, что при $b_1=0,4$ и правых частях (11) амплитуда колебаний больше, чем при правых частях (12). Как видно из рисунков, во всех расчетах положение точки x_* сходится к точному значению, рав-

ному 0, причем во всех случаях остается только одна точка x_* .

Несмотря на то, что метод установления демонстрирует сходимость к точному решению и предельное распределение числа Маха вдоль канала, полученное при 2000 итераций (рис. 4) отличается от точного, изображенного на рис. 1 в третьем знаке после запятой, на промежуточных итерациях вполне возможно нарушение монотонности и появление нескольких точек x_* , что демонстрирует рис. 4. На рис. 2 и рис. 3 резкие скачки при $b_2=0,9$ как раз связаны с наличием нескольких точек x_* и сопровождающейся при этом перестройкой течения.

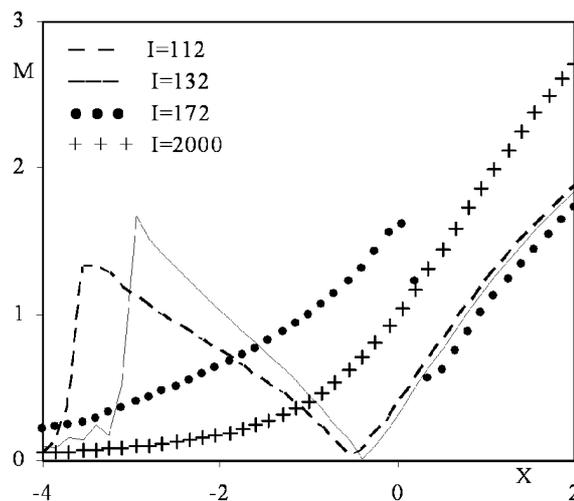


Рис. 4. Распределение числа Маха вдоль канала для разных итераций. I — номер итерации

5. Заключение

Предложены аналитические формулы, позволяющие находить распределение параметров газа с переходом через скорость звука в канале постоянного сечения. Эти формулы целесообразно использовать при тестировании соответствующих численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комаровский Л.В., Шабловский О.Н. Аналитическое исследование внутренних задач нестационарной газовой динамики и переноса тепла. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. — 208 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
3. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974. — 212 с.
4. Галкин В.М. О методе решения одномерных стационарных уравнений газовой динамики. // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15. — № 11. — С. 30–36.
5. Галкин В.М. Итерационный метод решения одномерных уравнений газовой динамики // Известия Томского политехнического университета. — 2002. — Т. 305. — № 8. — С. 130–136.
6. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hyperbolicity impact cratering // AIAA Paper. — 1969. — V. 69. — P. 354.