УДК 519:518:517

В.А.ВОЛОВОДЕНКО, Н.А.ЕФРЕМОВА

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Работа посвящена моделированию геофизических полей. Решение задач, связанных с изучением сверхдлиннопериодных процессов, потребовало разработки новых методов моделирования природных явлений. Для этой цели авторы данной работы предлагают использовать спектральный метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения вероятностей состояния марковского процесса в условиях нестационарных вероятностей переходов. Авторы приводят обоснования данного метода, а именно: 1) марковские процессы являются одной из важнейших моделей для реально протекающих процессов в природе; 2) аппарат их достаточно хорошо разработан и др. Данная работа представляет интерес для специалистов, занимающихся моделированием природных процессов.

Анализ динамических процессов, происходящих в геофизической среде под воздействием различных полей, может производиться на основе многообразных математических моделей. Если речь идет о создании моделей геологических структур с развивающимися во времени процессами, то для описания таких процессов необходим математический аппарат, адекватный этому классу процессов. Многие характеристические особенности процессов, происходящих в геологических средах, можно отнести к особенностям класса стационарных систем. Здесь под классом стационарных систем подразумеваются системы с постоянными во времени параметрами и структурой. В этом случае применяются модели прямого типа, основанные на статистических методах: регрессионный, факторный анализ, метод группового учета аргументов и т.д. В случае рассмотрения динамических процессов привлекаются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Существует, однако, класс задач, для которого эти методы являются малопригодными. Эти задачи связаны с проявлением явной временной и структурной нестационарности. В частности, оказывается, что изменение параметров геологической среды во времени может приводить к изменению ее структуры, что приводит к неприменимости математического аппарата, предназначенного для описания систем с постоянными параметрами и структурой.

Типичным примером таких систем являются геологические системы, испытывающие на себе воздействие техногенных факторов и эндогенных геологических процессов. Примером первого типа процессов являются процессы, возникающие при разработках газовых и нефтяных месторождений. Специалистам хорошо известны последствия бурения скважин, приводящие к катастрофическим изменениям структуры водоносных и нефтяных пластов. Второй тип процессов можно наблюдать в рамках систем, подверженных эндогенным геологическим процессам. Это размыв береговой линии рек, процессы ветровой эрозии и другие проявления структурно-параметрической неустойчивости.

Медленное развитие таких геологических систем и явлений на фоне установившегося стационарного режима смены внешних воздействий может резко измениться при малейшем вмешательстве со стороны человека. В таком случае процесс развития легко переходит в катастрофическую стадию и, как следствие, меняет свои параметры. Уже в начальной стадии зарождения все применяемые методы описания, ориентирующиеся на стационарность, теряют адекватность процессу и становятся непригодными для описания явлений. Для сохранения адекватности модели тому процессу, который она описывает, приходится менять математическую основу представления основных звеньев модели. Смена математической основы порождает ряд вопросов, без разрешения которых дальнейшее развитие процесса моделирования становится невозможным.

Одним из таких вопросов является вопрос об уровне согласованности математического, алгоритмического и программного обеспечения процессов моделирования и представления данных. При внимательном рассмотрении задачи моделирования процесса разработки и эксплуатации нефтяного или газового месторождения оказывается, что все данные, необходимые даже на начальной стадии моделирования или проектирования, представлены в очень разнообразной форме и требуют не менее разнообразных структур для своего представления. Многообразие структур данных порождается не только природой их возникновения, но и возможностями их комплексного представления, хранения, обработки и представления.

Основой для решения всего комплекса затронутых вопросов может служить правильно подобранный математический аппарат, адекватный природе описываемых геологических процессов, с одной стороны, и обеспечивающий однородную процедуру моделирования процессов и представления данных, с другой.

С нашей точки зрения, таким математическим аппаратом может быть прикладной функциональный анализ. На его основе возможно построение систем моделирования, обладающих достаточно общими или универсальными свойствами в области создания теоретических моделей, их алгоритмического и программного обеспечения. Столь широкая универсальность предложенного подхода основывается на том, что на основе методов, порождаемых в рамках функционального анализа, можно вести описание не только самого процесса моделирования, но и процессов обработки данных. При этом все описания допускают операторное представление. В свою очередь, операторная форма представления структур, алгоритмов и процедур обработки данных в значительной степени повышает гибкость процесса моделирования. Более того, за счет однородности представления звеньев моделей в виде матричных структур, а сигналов – в виде векторов достигается надежность и универсальность процедур моделирования систем, допускающих блочное описание в виде последовательно-параллельных структурных схем.

Наиболее интересными примерами реализации рассматриваемого подхода являются такие методы, как спектральный метод расчета нестационарных систем [1], интерполяционный метод [2], метод изображающих векторов [3]. Все из указанных методов легко интерпретируют процессы обработки данных в стационарном и нестационарном случаях. Более того, возможно их использование для описания операций над дискретными переменными.

В рамках спектрального и сопутствующих ему методов возможна не только строго детерминированная постановка задачи, но допускается и использование случайных величин. Это обстоятельство позволяет учитывать потребности практиков, когда речь идет об учете случайных факторов и процессов, развивающихся на фоне строго определенных закономерностей.

Решение ряда задач для случайных процессов любого вида представляет большие трудности. Однако удается получить сравнительно простые методы расчета, если отказаться от рассмотрения случайных процессов общего вида и ограничиться только процессами, обладающими некоторыми специальными свойствами, но тем не менее имеющими непосредственный практический интерес. Такими процессами и являются марковские [3]. Марковские процессы являются одной из важнейших моделей для реально протекающих процессов в природе и аппарат их достаточно хорошо разработан.

Случайный процесс, протекающий в системе $\boldsymbol{S}$, является марковским, если он обладает следующим свойством: вероятность того, что система окажется в некотором S_j в некоторый момент времени t_1, зависит только от того, в каком состоянии находилась система в предыдущий момент времени t_{l-1}, и не зависит от эволюции системы до момента времени t_{l-1}. Другими словами, в марковском случайном процессе будущее развитие его зависит только от настоящего состояния системы и не зависит от «предыстории» процесса [3].

Пусть дана физическая система $\boldsymbol{S}$, которая может находиться в состояниях

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n,$$

причем переходы системы из состояния в состояние возможны только в моменты времени

$$t_1, t_2, t_3, ..., t_k .$$

Случайный процесс будет марковским, если для каждого момента времени вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j *не зависит от того, когда и как система пришла в состояние* S_i. Марковские процессы описываются с помощью так называемых *вероятностей состояний*. Пусть в любой момент времени (после любого k-го шага) система S может быть в одном из состояний

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n,$$

т.е. осуществится одно из полной группы несовместных событий

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, ..., S_n^{(k)}.$$

Обозначим вероятности этих событий:

$p_1(1) = P(S_1^{(1)});\ p_2(1) = P(S_2^{(1)}); ..., p_n(1) = P(S_n^{(1)})$ – вероятности после первого шага;

$p_1(2) = P(S_1^{(2)});\ p_2(2) = P(S_2^{(2)}); ..., p_n(2) = P(S_n^{(2)})$ – вероятности после второго шага;

$p_1(k) = P(S_1^{(k)});\ p_2(k) = P(S_2^{(k)}); ..., p_n(k) = P(S_n^{(k)})$ – вообще после k-го шага.

Легко видеть, что для каждого номера шага k

$$p_1(k)+p_2(k)+...+p_n(k)=1\,.$$

Вероятности $p_1(k), p_2(k),..., p_n(k)$ называются вероятностями состояний. Для любого шага (момента времени $t_1, t_2, t_3,..., t_k$ … или номера 1, 2,…, k…) существуют какие-то вероятности перехода системы из состояния в состояние (некоторые из них могут быть равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен). Такие вероятности называются переходными вероятностями. Если обозначить $\boldsymbol{P}_{ij}$ вероятность перехода системы за один шаг из состояния S_i в состояние S_j, а $\boldsymbol{P}_{ii}$ вероятность задержки системы в состоянии S_j, то переходные вероятности $\boldsymbol{P}_{ij}$ можно записать в виде прямоугольной матрицы:

$$\|\boldsymbol{P}_{ij}\|=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{1j} & \boldsymbol{P}_{1n}\\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{ij} & \boldsymbol{P}_{2n}\\ \boldsymbol{P}_{i1} & \boldsymbol{P}_{i2} & \boldsymbol{P}_{ij} & \boldsymbol{P}_{in}\\ \boldsymbol{P}_{n1} & \boldsymbol{P}_{n2} & \boldsymbol{P}_{nj} & \boldsymbol{P}_{nn}\end{Vmatrix}.$$

Некоторые из переходных вероятностей $\boldsymbol{P}_{ij}$ могут быть равны нулю: это означает, что за один шаг переход из i-го состояние в j-е невозможен. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности $\boldsymbol{P}_{ii}$ того, что система не выйдет из состояния S_i, а останется в нем.

Набор вероятностей $\boldsymbol{Q}=\{q_0(1), q_0(2),...., q_0(s)\}$ называют начальным распределением, которое определяет состояние системы в начальный момент времени (т.е. при $t = 0$). Марковские процессы полностью задаются матрицей переходных вероятностей $\boldsymbol{P}_{ij}$ за один шаг и вектором начальных значений $\boldsymbol{Q}=\{q_0(1), q_0(2),...., q_0(s)\}$.

На практике значительно чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно. Для описания таких процессов в ряде случаев может быть с успехом применена схема *марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем*. Вероятности состояний удовлетворяют определенного вида дифференциальным уравнениям, так называемым уравнениям Колмогорова[4]:

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{ij}(t)}{dt}=\sum f_{jk}P_{kj}(t),\ i,j=1,2,...$$ – прямая система дифференциальных уравнений;

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{ij}(t)}{dt}=\sum P_{ik}(t)f_{kj},\ i,j=1,2,...$$ – обратная система дифференциальных уравнений;

f_{ij} – плотность вероятностей перехода.

Решая эти системы уравнений, получают вероятности состояний $p_1(t)$, $p_2(t)$, ... $p_n(t)$ как функции времени. Начальные условия устанавливаются из физических соображений в зависимости от того, какое было начальное состояние системы (т.е. при $t = 0$).

Как уже было замечено выше, если случайный процесс является марковским, то ряд задач решается сравнительно просто. Однако для того чтобы теория марковских процессов была применима на практике, необходимо следующее: 1) убедиться, что данный реальный процесс является марковским; 2) показать способ решения уравнений Колмогорова. В данной работе предлагается для этой цели использовать спектральный метод:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11}(t)\ \boldsymbol{P}_{21}(t)\cdots\boldsymbol{P}_{1N}(t)\\ \boldsymbol{P}_{21}(t)\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \vdots\qquad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ \boldsymbol{P}_{N1}(t)\quad\cdots\quad\cdots\boldsymbol{P}_{NN}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1(t)\\ p_2(t)\\ \vdots\\ p_n(t)\end{bmatrix},$$

$$p_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{1i}\psi_i(t)\to\begin{bmatrix}\pi_{10}\\ \pi_{11}\\ \vdots\\ \pi_{1N-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\pi}_1=S_\psi(p_1(t)),$$

$$p_2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2i}\psi_i(t)\to\begin{bmatrix}\pi_{20}\\ \pi_{21}\\ \vdots\\ \pi_{2N-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\pi}_2=S_\psi(p_1(t)),$$

$$p_3(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{3i} \psi_i(t) \to \begin{bmatrix} \pi_{30} \\ \pi_{31} \\ \vdots \\ \pi_{3N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}_3 = S_\psi(p_1(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} \to D\boldsymbol{\pi}_n,$$

$$\begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 \\ \boldsymbol{\pi}_2 \\ \boldsymbol{\pi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(\underset{pp}{A(t,t)}) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & p_{nn}(\underset{pp}{A(t,t)}) \end{bmatrix}.$$

В качестве примера применения спектрального метода к моделированию случайных процессов рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения вероятностей состояния марковского процесса в условиях нестационарных вероятностей переходов.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений спектральным методом

$$\boldsymbol{D}_\pi + \eta = P(\underset{pp}{A(t,t)})\pi.$$

Блочно-матричная форма

$$\left[\boldsymbol{D} - P(\underset{pp}{A(t,t)})\right]\pi = \eta,$$

$$\pi = \left[\boldsymbol{D} - P(\underset{pp}{A(t,t)})\right]^{-1} \eta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 \\ \boldsymbol{\pi}_2 \\ \boldsymbol{\pi}_3 \end{bmatrix}.$$

Анализ динамических процессов, происходящих в геофизической среде под воздействием различных полей, может производиться на основе многообразных математических моделей. Динамические модели с постоянными параметрами часто допускают получение решений в явном виде. Наличие таких возможностей позволяет проследить на аналитическом уровне влияние тех параметров и характеристик, которые определяют природу и развитие процессов во времени. Однако попытка учесть изменение параметров геологической среды, зависящих от времени даже в линейном случае, приводит к усложнению выкладок. Если в стационарных случаях применимы методы на основе интегральных преобразований Лапласа, то для нестационарных во времени процессов обращение к преобразованиям интегральной природы часто приводит к уравнениям в свертках. Это в значительной мере усложняет дальнейшую процедуру решения, делая ее длительной и ненадежной. Тем не менее даже предположение об изменении некоторых характеристик во времени оставляет многие задачи в рамках класса линейных задач. При этом интегральные преобразования остаются неприемлемыми, но можно указать класс методов, позволяющих получить аналитические зависимости, пригодные для описания процессов в целом. Усложнение условий задачи приводит к некоторому усложнению математического аппарата. В частности, становится необходимым переход от операционного исчисления к операторным методам общей природы.

При рассмотрении марковских процессов с изменяющимися во времени вероятностями смены состояний можно указать конкретные методы исследований: метод изображающих векторов и спектральный метод. Оба метода ориентированы на исследование ортогональных функциональных базисов в пространстве функций с ограниченной энергией, что соответствует физичности получаемых результатов, с одной стороны, и способствует появлению специального операторного выражения, описывающего геологические явления на конечном промежутке времени, с другой. Природа получаемых соотношений такова, что в качестве носителя информации о процессе используются матричные представления линейных операторов. В этих случаях становится возможным привлечение численно-аналитических процедур моделирования, допускающих реализацию на уровне современных компьютерных программ. Использование спектрального метода для решения систем дифференциальных уравнений дает следующие преимущества:

1. Однородное представление для операций и процедур.
2. Однородное представление одномерных сигналов.
3. Возможность параметрирования структуры.

Особый интерес вызывает тот ряд обстоятельств, который связан с ослаблением временных зависимостей моделей, сводящихся в области операторных представлений к простым параметрическим связям. Таким образом, достигается не только возможность решения задач из более обширного класса, но и возможность накопления информации, что особенно важно для геологических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 271с.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 335 с.
3. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
4. Терпугов В.Л. Теория случайных процессов. – Томск, 1990. – 120 с.