УДК 514.76

Е.Т.ИВЛЕВ, О.В.РОЖКОВА, О.Н.ЕФРЕМОВА

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЯХ МНОГООБРАЗИЯ ПАР ДВОЙСТВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В МНОГОМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В [1] изучены основные инвариантные геометрические образы, ассоциированные с многообразием пар двойственных линейных подпространств в проективном пространстве. В этой же работе рассматривались также инвариантные проективные связности I и II. В данной статье изучаются эквиаффинно-инвариантные геометрические образы и некоторые связности указанного многообразия в многомерном эквиаффинном пространстве, отличные от тех, которые изучены в [1], и свойственные для эквиаффинного пространства. Результаты, изложенные в разд. 1,5, принадлежат Ивлеву Е.Т., в разд. 2,3 – Рожковой О. В., в разд. 4 – Ефремовой О.Н. Основные обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] – [7].

1. Аналитический аппарат

1. Рассматривается q-мерное дифференцируемое многообразие M_q класса (C^∞ или C^ω) с базовыми формами $\Theta^\alpha\left(\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\tau=\overline{1,q}\right)$, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\Theta^\alpha=\Theta^\beta\wedge\Theta^\alpha_\beta,\ D\Theta^\beta_\alpha=\Theta^\gamma_\alpha\wedge\Theta^\beta_\gamma+\Theta^\gamma\wedge\Theta^\beta_{\gamma\alpha},\dots\ . \tag{1.1}$$

Как известно из [2] (см. теорему 3.2), с каждой точкой $\left(u^\alpha\right)$, где u^α – первые интегралы вполне интегрируемой системы форм Θ^a, ассоциируется последовательность центроаффинных дифференциально-геометрических групп $D_s(s=1,2,\dots)$ порядка s. Обозначим L_q пространство представлений группы D_1 и внесем в него центроаффинную структуру, то есть будем считать его центроаффинным пространством, отнесенным к локальному центроаффинному реперу $\widetilde{R}=\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{\varepsilon}_a\}$ где $\delta\boldsymbol{B}=0$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha=\widetilde{\Theta}^\beta_\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$, $\widetilde{\Theta}^\beta_\alpha=\Theta^\beta_\alpha\big|_{\Theta^\gamma=0}$.

Заметим, что центроаффинное пространство L_q изоморфно касательному векторному пространству T_q в точке $B(u^\alpha)$ к M_q. Пространство L_q будет в дальнейшем использовано в качестве геометрической модели Щербакова – Циндлера семейства пар двойственных плоскостей в A_n, которые будут рассматриваться в данной статье.

2. Рассмотрим n-мерное эквиаффинное пространство A_n, отнесенное к эквиаффинному реперу $R=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{e}_i\}\left(i,j,k,l=\overline{1,n}\right)$ с деривационными формулами

$$d\boldsymbol{A}=\omega^i\boldsymbol{e}_i,d\boldsymbol{e}_i=\omega^j_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.2}$$

и структурными уравнениями

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i_k,D\omega^k_i=\omega^j_i\wedge\omega^k_j,\omega^l_l=0. \tag{1.3}$$

3. Обозначим Q_N, где

$$N=2m(n-m)+n, \tag{1.4}$$

дифференцируемое многообразие размерности (1.4), элемент которого состоит из точки M пространства A_n и двух двойственных линейных подпространств L^1_m и L^2_{m-n}, проходящих через точку M:

$$L^1_m\bigcap L^2_{n-m}=M,L^1_m\bigcup L^2_{n-m}=A_n. \tag{1.5}$$

К элементу многообразия Q_N присоединим эквиаффинный репер R так, чтобы

$$M=A,\ L^1_m=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_m),\ L^2_{n-m}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{e}_{m+1},\boldsymbol{e}_{m+2},\dots,\boldsymbol{e}_n). \tag{1.6}$$

Тогда в силу (1.3) 1-формы ω^i, $\omega_a^{\hat{a}}$, $\omega_{\hat{a}}^a$ $\left(a,b,c=\overline{1,m};\ \hat{a},\hat{b},\hat{c}=\overline{m+1,n};\ i,j,k,l=\overline{1,n}\right)$ являются базовыми на многообразии Q_N, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad D\omega_a^{\hat{a}}=\omega_a^b\wedge\omega_b^{\hat{a}}+\omega_a^{\hat{b}}\wedge\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}},\quad D\omega_{\hat{a}}^a=\omega_{\hat{a}}^b\wedge\omega_b^a+\omega_{\hat{a}}^{\hat{b}}\wedge\omega_{\hat{b}}^a. \tag{1.7}$$

4. Обозначим $P_{q,N}=(M_q,Q_N)$ расслоенное пространство с базой M_q и слоем Q_N, соответствующим каждой точке $B(u^\alpha)\in M_p$. В этом расслоении зададим гладкое сечение: каждой точке $B(u^\alpha)$ базы M_p поставим в соответствие вполне определенную точку многообразия Q_N. Тогда в силу (1.1), (1.3) и (1.7) дифференциальные уравнения этого сечения запишутся в виде

$$\begin{gathered}\omega^i=A_\alpha^i\Theta^\alpha,\omega_a^{\hat{a}}=A_{a\alpha}^{\hat{a}}\Theta^\alpha,\omega_{\hat{a}}^a=A_{\hat{a}\alpha}^a\Theta^\alpha,\\ dA_\alpha^i+A_\alpha^j\omega_j^i-A_\beta^i\Theta_\alpha^\beta=A_{\alpha\beta}^i\Theta^\beta,\\ dA_{a\alpha}^{\hat{a}}+A_{a\alpha}^{\hat{b}}\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}-A_{b\alpha}^{\hat{a}}\omega_a^b-A_{a\beta}^{\hat{a}}\Theta_\alpha^\beta=A_{a\alpha\beta}^{\hat{a}}\Theta^\beta,\\ dA_{\hat{a}\alpha}^a+A_{\hat{a}\alpha}^b\omega_b^a-A_{\hat{b}\alpha}^a\omega_{\hat{a}}^{\hat{b}}-A_{\hat{a}\beta}^a\Theta_\alpha^\beta=A_{\hat{a}\alpha\beta}^a\Theta^\beta,\\ A_{[\alpha\beta]}^i=0,A_{a[\alpha\beta]}^{\hat{a}}=0,A_{\hat{a}[\alpha\beta]}^a=0.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Замечание 1.1. В данной статье будут рассматриваться эквиаффинно-инвариантные геометрические образы многообразия S_q^1-секущей q-мерной поверхности расслоения $P_{q,N}$ (q-мерного многообразия в A_4, элемент которого состоит из точки M и двух двойственных линейных подпространств L_m^1 и L_{m-n}^2 типа (1.5)). В этой же статье будут изучаться инвариантные аффинные связности многообразия S_q^1 и определяемые ими инвариантные геометрические образы.

2. Аффинные преобразования линейных подпространств L_m^1 и L_{m-n}^2. Центры подпространств L_m^1 и L_{m-n}^2

1. В соответствии с [1] (см. (21), (31), (86) и (87)) введем в рассмотрение следующие величины:

$$\begin{gathered}A^*{}_{\alpha\beta}=A_{a\alpha}^{\hat{a}}A_{\hat{a}\beta}^a,\quad A_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}A_{(\alpha\beta)},\quad B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}A_{[\alpha\beta]},\\ A^{\hat{a}}=A_\alpha^aA_{a\beta}^{\hat{a}}A^{\alpha\beta},\quad A^a=A_\alpha^{\hat{a}}A_{\hat{a}\beta}^aA^{\alpha\beta},\quad A^{\gamma\alpha}A_{\alpha\beta}=A^{\alpha\gamma}A_{\alpha\beta}=\delta_\beta^\gamma,\\ A_a^b=A_{a\alpha}^{\hat{a}}A_{\hat{a}\beta}^bA^{\alpha\beta},\quad A_{\hat{a}}^{\hat{b}}=A_{\hat{a}\alpha}^aA_{a\beta}^{\hat{b}}A^{\alpha\beta},\quad \det[A_{\alpha\beta}]\neq0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

которые в силу (1.8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}d\overset{*}{A}_{\alpha\beta}-\overset{*}{A}_{\gamma\beta}\Theta_\alpha^\beta-\overset{*}{A}_{\alpha\gamma}\Theta_\beta^\gamma=\overset{*}{A}_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma,\ dA_{\alpha\beta}-A_{\gamma\beta}\Theta_\beta^\gamma-A_{\alpha\gamma}\Theta_\beta^\gamma=A_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma,\\ dB_{\alpha\beta}-B_{\gamma\beta}\Theta_\alpha^\gamma-B_{\alpha\gamma}\Theta_\beta^\gamma=B_{\alpha\beta\gamma}\Theta^\gamma,\ dA^{\alpha\beta}+A^{\gamma\beta}\Theta_\gamma^\alpha+A^{\alpha\gamma}\Theta_\gamma^\beta=A_\gamma^{\alpha\beta}\Theta^\gamma,\\ dA^a+A^b\omega_b^a=\widetilde{A}_\alpha^a\Theta^\alpha,\ dA_a^b+A_a^c\omega_c^b-A_c^b\omega_a^c=A_{a\alpha}^b\Theta^\alpha,\\ dA^{\hat{a}}+A^{\hat{b}}\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}=\widetilde{A}_\alpha^{\hat{a}}\Theta^\alpha,\ dA_{\hat{a}}^{\hat{b}}+A_{\hat{a}}^{\hat{c}}\omega_{\hat{c}}^{\hat{b}}-A_{\hat{c}}^{\hat{b}}\omega_{\hat{a}}^{\hat{c}}=A_{\hat{a}\alpha}^{\hat{b}}\Theta^\alpha,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где явный вид величин, стоящих при Θ^α, для нас несущественный.

2. В соответствии с (24) и (25) в [1, стр. 72] с тензором $A^*{}_{\alpha\beta}$ ассоциируются:

а) основной конус Q_{q-1}^2 в L_q второго порядка с вершиной в точке B, порождаемый симметрическим тензором $(A_{\alpha\beta})$ и определяемый в локальных координатах центроаффинного репера $\widetilde{R}$ в L_q уравнением

$$Q_{q-1}^2:A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta=0; \tag{2.3}$$

б) основной линейный гиперкомплекс K_{q-1} в L_q, порождаемый кососимметрическим тензором $(B_{\alpha\beta})$ и определяемый уравнением

$$K_{q-1} : B_{\alpha\beta} t_1^\alpha t_2^\beta = 0.$$

Можно показать, что в общем случае

$$\det[A_{\alpha\beta}] \neq 0. \tag{2.4}$$

Геометрически это означает, что гиперконус (2.3) в общем случае не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку B. Поэтому с учетом (2.1) и (2.4) из (2.3) замечаем, что с тензором $(A^{\alpha\beta})$ в L_q ассоциируется гиперконус $\widetilde{K}_{q-1}^2$ второго класса с вершиной B, огибаемый гиперконусом Q_{q-1}^2 и определяемый уравнением

$$\widetilde{K}_{q-1}^2 : A^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta = 0. \tag{2.5}$$

3. В соответствии с (86) и (87) из [1, стр. 90] и в силу (1.6) и (2.1) заключаем, что тензор $(A^a,\ A_b^a)$ определяет (первое) основное аффинное преобразование m-плоскости L_m^1 в себя:

$$\Pi_1 = \{A^a, A_b^a\}, \tag{2.6}$$

с тензором $(A^{\hat{a}}, A_{\hat{b}}^{\hat{a}})$ ассоциируется (второе) аффинное преобразование $(n-m)$-плоскости L_{n-m}^2 в себя:

$$\Pi_2 = \{A^{\hat{a}}, A_{\hat{b}}^{\hat{a}}\}. \tag{2.7}$$

Определение 2.1. Ядро первого (второго) аффинного преобразования линейного подпространства $L_m^1(L_{n-m}^2)$ называется центром этого линейного подпространства.

Теорема 2.1. Каждому элементу многообразия S_q^1 в A_n в общем случае, то есть в случае, когда первое (второе) аффинное преобразование является невырожденным:

$$\det[A_a^b] \neq 0 (\det[A_{\hat{a}}^{\hat{b}}] \neq 0), \tag{2.8}$$

в соответствующем линейном подпространстве $L_m^1(L_{n-m}^2)$ отвечает по одному центру.

Доказательство. Если точки с радиус-векторами

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + x^a \boldsymbol{e}_a \quad \text{и} \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + x^{\hat{a}} \boldsymbol{e}_{\hat{a}} \tag{2.9}$$

являются ядрами $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ первого и второго основных преобразований Π_1 и Π_2 линейных подпространств L_m^1 и L_{m-n}^2 соответственно, то из (2.5) и (2.6) получаем следующие уравнения, которым удовлетворяют величины x^a и $x^{\hat{a}}$ соответственно:

$$A^a + x^b A_b^a = 0, \quad A^{\hat{a}} + x^{\hat{b}} A_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 0, \tag{2.10}$$

Отсюда в силу (2.8) замечаем, что в линейных подпространствах L_m^1 и L_{m-n}^2 имеется по одному центру, что и требовалось доказать.

4. Из (2.6) – (2.10) замечаем, что тензор (A_a^b) геометрически определяет первое центроаффинное преобразование m-плоскости L_m^1 в себя с центром A,

$$\Pi_1 = \{A_b^a\}, \tag{2.11}$$

которое любое направление $\boldsymbol{x} \in L_m^1$, проходящее через точку A, переводит в направление, проходящее через $\overline{C}_1$ параллельно образу направления $\overline{x}$ при первом аффинном преобразовании. Аналогично тензор $(A_{\hat{b}}^{\hat{a}})$ определяет второе центроаффинное преобразование

$$\hat{\Pi}_2 = \{A_{\hat{b}}^{\hat{a}}\} \tag{2.12}$$

$(n-m)$-плоскости L_{n-m}^2 в себя с центром A, которое любое направление $\overline{y} \in L_{n-m}^2$, проходящее через точку A, переводит в направление, проходящее через $\overline{C}_2$ параллельно образу направления $\overline{y}$ при втором аффинном преобразовании.

Заметим с учетом (2.8), что каждое из центроаффинных преобразований (2.11) и (2.12) является в общем случае невырожденным.

5. Из (2.6) – (2.8) следует, что образами точек с радиус-векторами $X = A + x^a e_a$ и $X = A + x^{\hat{a}} e_{\hat{a}}$ при аффинных преобразованиях Π_1 и Π_2 в силу (2.6) и (2.7) являются точки с радиус-векторами $\Pi_1 \overline{X} = \overline{A} + (A^a + x^b A^a_b) e_a$, $\Pi_2 \overline{Y} = \overline{A} + (A^{\hat{a}} + x^{\hat{b}} A^{\hat{a}}_{\hat{b}}) e_{\hat{a}}$. Отсюда следует, что точки

$$A_1 \equiv A + A^a e_a = \Pi_1 A, \quad A_2 \equiv A + A^{\hat{a}} e_{\hat{a}} = \Pi_2 A. \tag{2.13}$$

Определение 2.2. Образ точки A при первом Π_1 (втором Π_2) аффинном преобразовании подпространства L^1_m и L^2_{m-n} называется главной точкой соответствующего линейного подпространства.

Заметим, что точка $A_1 \in L^1_m$ ($A_2 \in L^2_{m-n}$) с соответствующим радиус-вектором (2.13) с учетом Определения 2.2 является главной точкой соответствующего линейного подпространства.

Замечание 2.1. Из (2.12) следует, что точка

$$A_{12} \equiv A + A^i e_i, \tag{2.14}$$

отвечающая точке $B \in M_q$, где

$$A^i = \begin{cases} \frac{1}{2} A^a, & i = a, \\ \frac{1}{2} A^{\hat{a}}, & i = \hat{a}, \end{cases} \quad dA^i - A^j \omega^i_j = \widetilde{A}^i_\alpha \Theta^\alpha, \tag{2.15}$$

является серединой отрезка $A_1 A_2$. Эту точку будем называть главной точкой пространства A_n.

3. Поле инвариантных гиперконусов

1. С помощью величин (2.1) и A^i_α построим следующие величины, удовлетворяющие, в силу (1.8) и (2.1), соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$g^{ij} = A^i_\alpha A^j_\beta A^{\alpha\beta}, \quad g_{[ij]} = 0, \tag{3.1}$$

$$g_{ij} g^{ik} = \delta^j_i, \quad \det[g_{ij}] \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} dg^{ij} + g^{kj}\omega^i_k + g^{ik}\omega^j_k &= g^{ij}_\alpha \Theta^\alpha, \\ dg_{ij} - g_{kj}\omega^k_i - g_{ik}\omega^k_j &= g_{ij\alpha}\Theta^\alpha. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь явный вид величин, стоящих при Θ^γ, для нас несущественный, причем величины $g_{ij\alpha}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dg_{ij\alpha} - g_{kj\alpha}\omega^k_i - g_{ik\alpha}\omega^k_j - g_{ij\beta}\Theta^\beta_\alpha = g_{ij\beta}\Theta^\beta. \tag{3.4'}$$

Из (3.3) замечаем, что каждая из систем величин (3.4') и (3.2) образует соответствующий двухвалентный симметрический тензор в смысле [3].

В следующем параграфе будет дана геометрическая интерпретация тензорам (3.1) и (3.2).

Лемма 3.1. Каждой $(q-1)$-плоскости $\Gamma_{q-1} \ni B$ подпространства L_q, отвечающей точке B базы M_q расслоения $P_{q,N}$, в пространстве A_n соответствует гиперплоскость $G_{n-1} \ni A$, которая содержит касательные к линиям, описываемым точкой A вдоль всех направлений, проходящих через точку B и принадлежащих Γ_{q-1}.

Доказательство. Гиперплоскость $\Gamma_{q-1} \subset L_q$ в точке $B \in M_q$ в локальных координатах репера $\widetilde{R}$ пространства L_q зададим уравнением

$$\Gamma_{q-1} : t_\alpha t^\alpha = 0, \quad (\alpha = \overline{1, m}). \tag{3.4}$$

Гиперплоскость $G_{n-1} \ni A$ в пространстве A_n в локальных аффинных координатах репера R зададим уравнением

$$G_{n-1} : x_i x^i = 0, \ (i = \overline{1,n}). \tag{3.5}$$

Из

$$dA = \omega^i e_i, = A^i_\alpha \Theta^\alpha e_i \tag{3.6}$$

следует, что касательная к линии, описываемой точкой A в направлении $\Theta^\alpha = t^\alpha \Theta$ в точке B, принадлежащим Γ_{q-1}, не выходит из гиперплоскости Γ_{q-1} тогда и только тогда, когда в силу (3.5) и (3.4) выполняется соотношение

$$x_i A^i_\alpha t^\alpha = 0. \tag{3.7}$$

Таким образом, каждой гиперплоскости $G_{n-1} \ni A$ пространства A_n отвечает в L_q гиперплоскость (3.4), о которой идет речь в Лемме 1, где

$$t_\alpha = A^i_\alpha x_i. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. Совокупность всех гиперплоскостей $G_{n-1} \ni A$ пространства A_n, которым отвечают в пространстве L_q подпространства $\Gamma_{q-1} \subset B$, принадлежащие гиперконусу $\widetilde{K}^2_{q-1} \subset L_q$, образует в пространстве A_n гиперконус G^2_{n-1} второго класса с вершиной A. Этот гиперконус G^2_{n-1} определяется контравариантным тензором g^{ij}.

Доказательство. Из (2.5) в силу (3.8), (3.7), (3.1) и Леммы 3.1 следует, что совокупность всех гиперплоскостей G_{n-1} в A_n, о которых идет речь в условиях Теоремы 3.1, определяется уравнением

$$G^2_{n-1} : g^{ij} x_i x_j = 0. \tag{3.9}$$

Это уравнение в пространстве A_n определяет гиперконус G^2_{n-1} второго класса с вершиной в точке A. Теорема доказана.

Лемма 3.2. Гиперконус G^2_{n-1}, отвечающий точке $B \in M_q$, в общем случае при

$$n(n+1) \le 2qn + 4qm(n-m) \tag{3.10}$$

является невырожденным, то есть

$$\det[g^{ij}] \ne 0 \tag{3.11}$$

на многообразии M_q.

Доказательство. Из (3.1) с учетом (2.1) заключаем, что

$$p = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.12}$$

независимых величин q^{ij} выражаются через

$$p^* = qn + 2qm(n-m) \tag{3.13}$$

величин $A^i_\alpha, A^{\hat{a}}_{a\alpha}$ и $A^a_{\hat{a}\alpha}$. Из (3.13) и (3.12) в силу (3.8) следует, что всегда можно подобрать величины $A^i_\alpha, A^a_{\hat{a}\alpha}$ и $A^{\hat{a}}_{a\alpha}$ так, чтобы $g^{ij} = \begin{cases} 1, \, i = j, \\ 0, \, i \ne j, \end{cases}$ в силу чего $\det[g^{ij}] = 1 \ne 0$, что с учетом (3.11) и требовалось доказать.

Замечание 3.1. С учетом Леммы 3.2 из соотношений (3.2) и (3.11) заключаем, что гиперконус $\widetilde{G}^2_{n-1}$ второго порядка с вершиной A,

$$\widetilde{G}^2_{n-1} : g_{ij} x^i x^j = 0, \tag{3.14}$$

огибается гиперконусом G^2_{n-1}.

Определение 3.1. Гиперконус G^2_{n-1} в A_n, отвечающий точке $B \in M_q$, называется основным контравариантным гиперконусом. Гиперконус $\widetilde{G}^2_{n-1}$, огибаемый гиперконусом G^2_{n-1}, называется основным ковариантным гиперконусом.

4. Поле инвариантных центроаффинных преобразований

В этом разделе с помощью инвариантных геометрических образов, изученных в предыдущих разделах, аналитически и геометрически будет определено поле инвариантных центроаффинных преобразований пространства A_n с центром в точке A.

1. С помощью величин (2.1), (3.1) и (3.2) на базе M_n рассмотрим следующие величины, которые в силу (1.8), (2.2), (2.14) и (3.3) удовлетворяют соответствущим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} h_\beta = g_{ij} A^i A^j_\beta ,\, h^\alpha = A^{\alpha\beta} h_\beta ,\, A^{\hat{a}}_a = A^{\hat{a}}_{a\alpha} h^\alpha ,\, A^{a}_{\hat{a}} = A^{a}_{\hat{a}\alpha} h^\alpha , \\ dh_\beta - h_\gamma \Theta^\gamma_\beta = h_{\beta\alpha}\Theta^\alpha ,\, dh^\alpha + h^\gamma \Theta^\alpha_\gamma = h^\alpha_\beta \Theta^\beta , \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$dA^{\hat{a}}_a + A^{\hat{b}}_a \omega^{\hat{a}}_{\hat{b}} - A^{\hat{a}}_b \omega^b_a = A^{\hat{a}}_{a\alpha}\Theta^\alpha ,\, dA^a_{\hat{a}} + A^b_{\hat{a}}\omega^a_b - A^a_{\hat{b}}\omega^{\hat{b}}_{\hat{a}} = A^a_{a\alpha}\Theta^\alpha . \tag{4.2}$$

Здесь явный вид величин, стоящих при Θ^α, для нас несущественный. Из (4.2) следует, что каждая из систем величин (4.1) образует соответствующий тензор в смысле Г.Ф.Лаптева [3].

Найдём инвариантные геометрические образы, которые определяются величинами (4.1). Из (2.5), (2.15), (3.7) и (3.13) в силу (4.1) следует, что тензор h_β определяет в L_q подпространство размерности $q-1$:

$$h_\beta t^\beta = 0 , \tag{4.3}$$

которое отвечает поляре главной точки пространства A_n относительно гиперконуса $\widetilde{G}^2_{n-1}$. При этом тензор h^α определяет в L_q основное направление

$$h = (B\varepsilon_\alpha) h^\alpha , \tag{4.4}$$

являющееся полюсом подпространства (4.3) относительно гиперконуса $\widetilde{K}^2_{q-1} \subset L_q$.

Обозначим через $T(X)_t$ касательную к линии, описываемой точкой X, отвечающей точке $B \in M_q$, в направлении t. Тогда из (1.2) с учётом (1.8), (2.1), (4.1) и (4.4) получаем

$$\begin{gathered} \overline{X} = \overline{A} + x^a \overline{e}_a \in L^1_m \Rightarrow \{L^1_m \cup T(X)_n\} \cap L^2_{n-m} = \overline{A} + x^{\hat{a}} \overline{e}_{\hat{a}} \equiv Y , \\ x^{\hat{a}} = A^{\hat{a}}_\alpha h^\alpha + x^\alpha A^{\hat{a}}_{a\alpha} h^\alpha = A^{\hat{a}}_\alpha h^\alpha + x^a A^{\hat{a}}_a . \end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда, при $x^a = 0$, получаем геометрический смысл точки:

$$\overline{H} = \overline{A} + h^{\hat{a}} \overline{e}_{\hat{a}} = \{L_m \cup T(A)\} \cap l^2_{n-m} , \quad h^{\hat{a}} = A^{\hat{a}}_\alpha h^\alpha . \tag{4.6}$$

Из (4.4) и (4.6) замечаем, что

$$\overline{AY} = \overline{AH} + \overline{HY} , \quad \overline{HY} = x^a A^{\hat{a}}_a \overline{e}_{\hat{a}} . \tag{4.7'}$$

Из (4.5) – (4.7') вытекает геометрический смысл величин $A^{\hat{a}}_a$:

$$x = \overline{AX} = (\overline{A}\overline{e}_\alpha) x^\alpha \in L^1_m \to y = (\overline{A}, \overline{e}_\alpha) A^{\hat{\alpha}}_\alpha \in L^2_{n-m} . \tag{4.7}$$

Аналогично получается геометрический смысл величин $A^\alpha_{\hat{\alpha}}$:

$$y = AY = (\overline{A}\overline{e}_{\hat{a}}) y^{\hat{a}} \in L^2_{n-m} \to x = (\overline{A}\overline{e}_a) A^a_{\hat{a}} y^{\hat{a}} \in L^1_m . \tag{4.8}$$

2. Рассмотрим следующие конусы, которые в силу (1.6) и (3.1) определяются соответствующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \widetilde{G}^{1,2}_{m-1} = \widetilde{G}^2_{n-1} \cap L^1_m : \qquad g_{ab} x^a x^b = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0; \\ \widetilde{G}^{2,2}_{n-m-1} = \widetilde{G}^2_{n-1} \cap L^2_{n-m} : \quad g_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} = 0, \quad x^a = 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Отсюда с учётом (2.13) и Определения 2.2 следует, что полярами главных точек пространств L^1_m и L^2_{n-m} относительно конусов $\widetilde{G}^{1,2}_{m-1}$ и $\widetilde{G}^{2,2}_{n-m-1}$ являются линейные подпространства G^1_{m-2} и G^2_{n-m-2}, определяемые уравнениями соответственно:

$$\begin{aligned} G^1_{m-1}: &\quad g_{ab}A^a x^b = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0, \\ G^2_{n-m-1}: &\quad g_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}} x^{\hat{b}} = 0, \quad x^a = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Определение 4.1. Линейные подпространства $H^1_{m-1} \subset L^1_m$ и $H^2_{n-m-1} \subset L^2_{n-m}$, параллельные G^1_{m-1} и G^2_{n-m} и проходящие через соответствующие главные точки, называются главными подпространствами в пространствах L^1_m и L^2_{n-m}.

Из (4.10) и (2.13) замечаем, что главные линейные пространства H^1_{m-1} и H^2_{n-m-1} определяются уравнениями, соответственно:

$$\begin{aligned} H^1_{m-1} \subset L^1_m: &\quad g_{ab}A^a(x^b - A^b) = 0, \quad x^{\hat{a}} = 0; \\ H^2_{n-m-1} \subset L^2_{n-m}: &\quad g_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}}(x^{\hat{b}} - A^{\hat{b}}) = 0, \quad x^a = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

3. **Теорема 4.1**. Каждой точке $B \in M_q$ отвечает, в общем случае, единственное центроаффинное преобразование

$$\Pi = \{B^j_i\}$$

пространства A_n в себя с центром в точке A, удовлетворяющее условиям:

1. Ограничение преобразования Π на L^1_m эквивалентно преобразованию $\hat{\Pi}_1$.
2. Ограничение преобразования Π на L^2_{n-m} эквивалентно преобразованию $\hat{\Pi}_2$.
3. $L^1_m \to L^2_{n-m}$ по закону $A^{\hat{a}}_a$.
4. $L^2_{n-m} \to L^1_m$ по закону $A^a_{\hat{a}}$.
5. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \{\Pi A_1 \cup L^2_{n-m}\} \cap L^1_m \in H^1_{m-1}, \quad M_1 \notin G^1_{m-1}; \\ M_2 &\equiv \{\Pi A_1 \cup L^1_m\} \cap L^2_{n-m} \in H^2_{n-m-1}, \quad M_2 \notin G^2_{n-m-1}; \\ M_3 &\equiv \{\Pi A_2 \cup L^1_m\} \cap L^2_{n-m} \in H^2_{n-m-1}, \quad M_3 \notin G^2_{n-m-1}; \\ M_4 &\equiv \{\Pi A_2 \cup L^2_{n-m}\} \cap L^1_m \in H^1_{n-m-1}, \quad M_4 \notin G^1_{m-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (1.6), (2.11), (2.12), (4.7) и (4.8) в силу (4.12) и условий 1 – 4 получаем

$$B^b_a = \varepsilon_1 A^b_a, \quad B^{\hat{a}}_a = \varepsilon_2 A^{\hat{a}}_a, \quad B^{\hat{b}}_{\hat{a}} = \varepsilon_3 A^{\hat{b}}_{\hat{a}}, \quad B^a_{\hat{a}} = \varepsilon_4 A^a_{\hat{a}}. \tag{4.13}$$

Из условий 5 с учётом (4.13), (4.10) и (4.12) находим

$$\varepsilon_1 = \frac{g_{ab}A^a A^b}{E_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{g_{ab}A^a A^b}{E_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{A_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}} A^{\hat{b}}}{E_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{A_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}} A^{\hat{b}}}{E_4}, \tag{4.14}$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv g_{ab}A^a A^b_c A^c \neq 0, \quad E_2 \equiv g_{ab}A^a A^b_{\hat{b}} A^{\hat{b}} \neq 0, \\ E_3 &\equiv g_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}} A^{\hat{b}}_{\hat{c}} A^{\hat{c}} \neq 0, \quad E_4 \equiv g_{\hat{a}\hat{b}}A^{\hat{a}} A^{\hat{b}}_b A^b \neq 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

на многообразии M_q.

Из (4.13) – (4.15) с учётом (1.8), (2.2) и (4.2) получаем, что величины B^j_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB^j_i + B^k_i \omega^j_k - B^j_k \omega^k_i = B^j_{k\alpha}\Theta^\alpha, \tag{4.16}$$

где явный вид величин $B^j_{k\alpha}$ для нас несущественный, и образуют, следовательно, смешанный тензор второй валентности в смысле Г.Ф.Лаптева [3]. Поэтому эта система величин в каждой точке $B \in M_q$ определяет центроаффинное преобразование пространства A_n в себя с центром в точке A. Теорема доказана.

5. Инвариантные аффинные связности

В этом разделе будет показано, что с каждым направлением $t=\left(\overline{B}\overline{\varepsilon}_\alpha\right)t^\alpha$ в L_q ассоциируется центроаффинное преобразование пространства A_n в себя, являющееся объектом некоторой эквиаффинной связности.

1. С помощью условий инвариантности [3] точки

$$\overline{X}=\overline{A}+x^i\overline{e}_i\in A_n,\quad dx^i=-\omega^i-x^k\omega^i_k+\Theta x^i$$

и с учётом (3.3) убеждаемся в том, что система уравнений

$$H_{n-2}(t):\begin{cases}g_{ij}x^ix^j=0,\\ g_{ij\alpha}x^ix^jt^\alpha-2g_{ij}A^i_\alpha x^jt^\alpha=0\end{cases}\qquad(5.1)$$

определяет некоторую $(n-2)$-мерную алгебраическую поверхность $H_{n-2}(t)$ как пересечение гиперконуса $\widetilde{G}^2_{n-1}$ (см. (3.13)) со своим смежным $(\widetilde{G}^2_{n-1})'$ вдоль направления

$$t=(\overline{B}\overline{\varepsilon}_\alpha)\,t^\alpha\in L_q\qquad(5.2)$$

в точке $B\in M_q$. Обозначим $H_{n-1}(\lambda,t)$ пучок гиперквадрик в A_n, проходящих через $H_{n-2}(t)$. Из (5.1) замечаем, что гиперквадрики $H_{n-1}(\lambda,t)$ определяются уравнением:

$$H_{n-1}(\lambda,t):(g_{ij\alpha}t^\alpha+\lambda g_{ij})\,x^ix^j-2g_{ij}A^i_\alpha x^jt^\alpha=0\,.\qquad(5.3)$$

Отсюда следует, что асимптотическими гиперконусами второго порядка с вершиной A гиперквадрик $H_{n-1}(\lambda,t)$ будут гиперконусы пучка $H^0_{n-1}(\lambda,t)$, определяемого уравнением:

$$H^0_{n-1}(\lambda,t):(g_{ij\alpha}t^\alpha+\lambda g_{ij})\,x^ix^j=0\,.\qquad(5.4)$$

В пучке гиперконусов $H^0_{n-1}(\lambda,t)$ выберем такой гиперконус $H^0_{n-1}(t)$, которому будет аполярен гиперконус $\widetilde{G}^2_{n-1}$ в смысле [6]:

$$(g_{ij\alpha}t^\alpha+\lambda g_{ij})\,g^{ij}=0\,.$$

Отсюда в силу (3.2) получаем

$$\lambda=-\frac{1}{n}g_{ij\alpha}g^{ij}t^\alpha\,.\qquad(5.4')$$

Поэтому гиперконус $H^0_{n-1}(t)$, отвечающий каждому направлению (5.2), в силу (5.4) определяется уравнением

$$H^0_{n-1}(t):(g_{ij\alpha}+l_\alpha g_{ij})\,t^\alpha x^ix^j=0\,,\qquad(5.5)$$

где

$$l_\alpha=-\frac{1}{n}g_{ij\alpha}g^{ij}\,.\qquad(5.6)$$

Заметим в силу (5.4') – (5.6) и (5.3), что гиперконус $H^0_{n-1}(t)$ будет асимптотическим гиперконусом для гиперквадрики $H_{n-1}(t)$, отвечающей направлению (5.2) и определяемой уравнением

$$H_{n-1}(t):\quad(g_{ij\alpha}+l_\alpha g_{ij})\,t^\alpha x^ix^j-2g_{ij}A^i_\alpha x^jt^\alpha=0\,.\qquad(5.7)$$

Из (5.5) и (3.13) следует, что каждому направлению (5.2) отвечает центроаффинное преобразование

$$\Gamma(t)=\left\{\Gamma^k_{i\alpha}t^\alpha\right\},\qquad(5.8)$$

где

$$\Gamma^k_{i\alpha}=g_{ij\alpha}g^{ik}+\delta^k_i l_\alpha\,,\qquad(5.9)$$

которое порождается гиперконусами $H^0_{n-1}(t)$ и $\widetilde{G}^2_{n-1}$.

Из (5.9) и (5.6) следует, что

$$\Gamma^i_{i\alpha}=0\,.\qquad(5.10)$$

Это означает, что центроаффинное преобразование (5.8) является эквиаффинным при любом t, то есть для всех направлений (5.2) в точке $B \in M_q$.

Из (3.3) и $(3.3')$ с учётом (5.6) замечаем, что величины (5.9) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$d\,\Gamma^k_{i\alpha} + \Gamma^j_{i\alpha}\,\omega^k_j - \Gamma^k_{j\alpha}\,\omega^j_i - \Gamma^k_{i\beta}\,\theta^\beta_\alpha = \Gamma^k_{i\alpha\beta}\,\Theta^\beta . \tag{5.11}$$

2. Имеет место

Теорема 5.1. Система величин $\Gamma^k_{i\alpha}$ образует объект эквиаффинной связности Γ с тензорами кручения $R^j_{\alpha\beta}$ и кривизны $R^j_{i\alpha\beta}$, которые определяются по формулам

$$R^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A^j_{[\alpha}\,\Gamma^i_{|j|\beta]}; \tag{5.12}$$

$$R^j_{i\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Gamma^k_{i[\alpha}\,\Gamma^j_{|k|\beta]} - \frac{1}{2}\Gamma^j_{i[\alpha\beta]} .$$

Доказательство. Рассмотрим 1-формы

$$\Omega^i \equiv \omega^i = A^i_\alpha \Theta^\alpha, \quad \Omega^j_i = \omega^j_i + \Gamma^j_{i\alpha}\,\Theta^\alpha . \tag{5.13}$$

Из (1.1), (1.3), (1.8) и (5.11) в силу (5.12) следует, что 1-формы (5.13) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\Omega^i = \Omega^j \wedge \Omega^i_j + R^i_{\alpha\beta}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta , \tag{5.14}$$

$$D\Omega^k_i = \Omega^j_i \wedge \Omega^k_j + R^k_{i\alpha\beta}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta .$$

Отсюда с учётом (5.10) и в соответствии с [7] заключаем, что формы (5.13) являются формами некоторой эквиаффинной связности Γ с тензорами кручения – кривизны (5.12). Теорема доказана.

3. Аналогично с учётом (4.16) доказывается следующая теорема.

Теорема 5.2. Система величин $B^j_{k\alpha}$, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (4.17), является объектом аффинной связности G с формами связности

$$\Omega^{*i} = \omega^i A^i_\alpha \Theta^\alpha, \quad \Omega^{*k}_i \omega^k + B^k_i \Theta^\alpha ,$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\Omega^{*i} = \Omega^{*j} \wedge \Omega^{*i}_j + R^{*i}_{\alpha\beta}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta ,$$

$$D\Omega^{*k}_i = \Omega^{*j}_i \wedge \Omega^{*k}_j + R^{*k}_{i\alpha\beta}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta .$$

Здесь тензоры кручения $R^{*i}_{\alpha\beta}$ и кривизны $R^{*k}_{i\alpha\beta}$ определяются по формулам:

$$R^{*i}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A^j_{[\alpha} B^i_{|j|\beta]}, \quad R^{*j}_{i\alpha\beta} = \frac{1}{2} B^k_{i[\alpha} B^j_{|k|\beta]} - \frac{1}{2} B^j_{i[\alpha\beta]} .$$

4. **Замечание 5.1**. Из $(3.5')$, (3.13), (5.2) и (5.3) следует, что в пучке $H_{n-1}(\lambda, t)$ гиперконусами с вершиной в точке A пространства A_n являются гиперквадрики, отвечающие тем направлениям $t = (B\overline{\varepsilon}_\alpha)\,t^\alpha \in L_q$ в точке $B \in M_q$, вдоль которых касательные к линиям $(A)_t$ лежат в своих полярах относительно гиперконуса $\widetilde{G}^2_{n-1}$.

Замечание 5.2. Из (4.1), (5.5) и (5.7) замечаем, что гиперконус $H^0_{n-1}(h)$ и гиперквадрика $H_{n-1}(h)$, отвечающие направлению (4.4), определяются уравнениями соответственно:

$$H^0_{n-1}(h) : \qquad G_{ij} x^i x^j = 0, \tag{5.15}$$

$$H_{n-1}(h) : \qquad G_{ij} x^i x^j - 2G_i x^i = 0 ,$$

где величины G_{ij} и G_i определяются по формулам

$$G_{ij} = (g_{ij\alpha} + l_\alpha g_{ij})\, h^\alpha, \quad G_i = g_{ij} A^i_\alpha h^\alpha \tag{5.16}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dG_{ij} - G_{kj}\omega_i^k - G_{ik}\omega_j^k = G_{ij\alpha}\Theta^\alpha, \tag{5.17}$$

$$dG_i - G_k\omega_i^k = G_{i\alpha}\Theta^\alpha.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при Θ^α, для нас несущественный. Из (5.15) и (5.16) следует, что система величин G_i, образующая в силу (5.17) ковариантный вектор в смысле [3], геометрически определяет поляру Γ_{n-1} точки A относительно $H_{n-1}(t)$, определяемую уравнением

$$H_{n-1}(t): \qquad G_i x^i = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Тыртый-оол Н.В., Бразевич М.В. // Математический сборник. Вып. 1. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1974. – С.68–91.
2. Лаптев Г.Ф. // Труды геометрического семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 2. – С.139–189.
3. Лаптев Г.Ф. // Труды Московского математического общества. – М.: 1953. – Т. 2. – С.275–372.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
5. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.
6. Ивлев Е.Т. // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970 г. Ч.1. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1970. – С.121–123.
7. Евтушик П.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.Ш., Широков А.П. // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С.7–246.