УДК 517.0 (075.8)

А.М.СУХОТИН

НАЧАЛО АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ В АНАЛИЗЕ

Статья содержит (разд. 1) доказательства двух утверждений, противоположных теореме Римана о возможности такой перестановки членов знакопеременного не абсолютно сходящегося к числу A ряда (***A***), что ряд (***B***), полученный после такой перестановки, сходится к некоторому наперёд заданному числу B. В разд. 2 доказанные теоремы иллюстрируются примерами. В разд. 3 даны обобщения на бесконечные множества некоторых утверждений о конечных множествах и введены критерии биективности бесконечных подмножеств множества натуральных чисел и, следовательно, заложены начала альтернативной теории бесконечных множеств и их отображений.

1. Пусть сходящийся по Риману [3, стр. 316–318] к числу B ряд (***B***),

$$B=\sum b_j\,, \tag{1}$$

получается инъективным отображением $\varphi\colon\ N\to N$, $\varphi(k)=j,\ a_k\triangleq b_j$, слагаемых ряда (***A***):

$$A=\sum a_k=S_n+r_n=\sum_{1}^{n}a_i+\alpha(n)+\sum_{K(n)+1}^{\infty}a_i\,,\ \alpha(n)\triangleq\sum_{n+1}^{K(n)}a_i\,. \tag{2}$$

Будем step by step выполнять отображением $\varphi\colon\ N\to N$, $\varphi(k)=j,\ a_k\triangleq b_j$, и одновременно строить последовательность ($\widetilde{S}_n$) частичных сумм $\widetilde{S}_n$ ряда (***B***), предполагая, что $\widetilde{r}_n=\sum_{M_1}^{M_{K(n)-n}}a_j+\sum_{K(n)+1}^{\infty}a_i$, $M_1\le n+1$. Здесь, как в (2) и ниже, $K(n)\triangleq\max\{\,k:a_k\triangleq b_j,\ j\le n\,\}$, а у символа Σ суммирование идёт по умолчанию от 1 до ∞. Сумма $\beta(n)\triangleq\sum_{M_1}^{M_{K(n)-n}}a_j$ содержит те слагаемые из частичной суммы $S_{K(n)}$ ряда (***A***), которые не вошли в частичную сумму $\widetilde{S}_n$ ряда (***B***). Таким образом, мы полагаем, что порядок слагаемых в остатках $r_{K(n)}$ и $\widetilde{r}_{K(n)}$ рядов (***A***) и (***B***) соответственно при построении последовательности ($\widetilde{S}_n$) для всех $K(n)$ совпадает:

$$r_{K(n)}\equiv\widetilde{r}_{K(n)}\,. \tag{3}$$

Очевидно, что при $n\to\infty$ $K(n)\to\infty$ и $\widetilde{r}_{K(n)}\to 0$, а условие (3) не влияет на сходимость соответствующих частичных сумм: $\widetilde{S}_n\to B$, $S_n\to A$. Вводя символ $\varepsilon(n)\triangleq\beta(n)-\alpha(n)$, мы получим из (1) и (2) равенства

$$B-A=(\widetilde{S}_n+\widetilde{r}_n)-(S_n+r_n)=(\widetilde{S}_n-S_n)+\varepsilon(n)\,. \tag{4}$$

Теперь, учитывая, что $(B-\widetilde{S}_n)-(A-S_n)=\widetilde{r}_n-r_n$, или непосредственно из равенств $r_n=\alpha(n)+\sum_{K(n)+1}^{\infty}a_i$ и $\widetilde{r}_n=\beta(n)+\sum_{K(n)+1}^{\infty}a_i$ мы получим оценку разности остатков рядов (***B***) и (***A***) в следующем виде:

$$\widetilde{r}_n-r_n=\varepsilon(n)\,. \tag{4$'$}$$

Левая часть равенства (4′) стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу предположения, что $\widetilde{S}_n\to B$ и $S_n\to A$, в то время как правая часть $\varepsilon(n)$ с учётом равенства (3) стремится в общем случае к некоторому числу $\varepsilon(\infty)$, зависящему от перестановок слагаемых в ряду (***A***) при переходе к ряду (***B***). Если допустить, например, что $B-A>0$, то найдётся n, такое, что $\widetilde{S}_n-S_n>0$. Значит будут справедливы при следующей смене символов $0\le p_i\triangleq a_{k_i}$, $0>q_j\triangleq a_{k_j}$ равенства

$$\beta(n)=\sum_{m_1}^{m_2} q_i + \sum_{n_3}^{n_4} q_j\,,\ \alpha(n)=\sum_{n_1}^{n_2} p_i + \sum_{n_3}^{n_4} q_j\,,$$

где $n_2-n_1+n_4-n_3=K(n)-n$, $m_2 \le n$, $m_2-m_1=n_2-n_1$, $n<n_l\le K(n)$. Следовательно, мы получим, что

$$\varepsilon(n) = \tilde{r}_n - r_n = \beta(n) - \alpha(n) = \sum_{m_1}^{m_2} q_i - \sum_{n_1}^{n_2} p_i = S_n - \tilde{S}_n < 0. \qquad (5)$$

Количество слагаемых ε_k в сумме $\varepsilon(n)$ неограниченно возрастает при $n\to\infty$, а общий член ε_k в этой сумме имеет в силу неабсолютной сходимости ряда (*A*) порядок, не менее чем $k^{-\sigma}$, $\sigma\le 1$, и потому $\varepsilon(\infty)<0$. Полученное противоречие $0<0$ опровергает наше допущение, что $B-A>0$.

Легко показать, что в силу (4) или первых двух равенств из (5) при каждом инъективном переходе $\varphi(n)=k$, $a_n \triangleq b_k$, от ряда (*A*) к ряду (*B*) существует такая последовательность $(n_1, n_2, \dots)$, $n_i\in N$, что для всех n_i справедливы равенства

$$S_{n_i} + r_{n_i} = \tilde{S}_{n_i} + \tilde{r}_{n_i}\,. \qquad (6)$$

Равенства (6) можно получить и непосредственно из тождества

$$\sum a_i \equiv \sum a_i\,,$$

если в его правой части переставить местами конечное количество слагаемых, необходимое для того, чтобы первые n из них давали n-ю частичную сумму $\tilde{S}_n$ ряда (***B***), а *в остатке* $r_{K(n)}$ *слагаемые не переставлять без необходимости*. Последнее требование усиливает строгость рассуждений при последующем предельном переходе. Из равенства (6) при $n\to\infty$ и, следовательно, при $K(n)\to\infty$ получается импликация: $(\tilde{r}_n\to 0,\ r_n\to 0) \Rightarrow (B=A)$. Тем самым нами доказана следующая

Теорема 1. *Перестановка членов знакопеременного не абсолютно сходящегося к некоторому числу A ряда* (***A***) *не влияет на сходимость этого ряда к числу A.*

В общем случае при $S_n\to A$ из равенства (6) получаем при предельном переходе вместо теоремы Римана эквиваленцию

$$(\tilde{S}_n\to B,\ r_n\to 0) \Leftrightarrow (\tilde{r}_n\to(A-B)),$$

так что справедлива

Теорема 2. *Если для произвольного числа B из членов сходящегося к числу A знакопеременного ряда* (***A***) *построена последовательность* $(\tilde{S}_n)$ *частичных сумм* $\tilde{S}_n$*, сходящаяся к числу B, то последовательность* $(\tilde{r}_n)$*, получающихся при этом остатков* $\tilde{r}_n$*, сходится к числу A – B.*

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 справедливы для любого знакопеременного ряда, но для абсолютно сходящегося ряда (*A*) число B в Теореме 2 может быть выбрано только так: $-Q\le B\le P$, где $P \triangleq \sum p_i > 0$, $Q \triangleq -\sum q_i > 0$, и символами p_i обозначены, как и выше, положительные слагаемые ряда (*A*), а q_i – отрицательные. При этом соответственно изменённый алгоритм Римана [1, стр. 316–318] можно применить для доказательства сходимости последовательности $(\tilde{S}_n)$ частичных сумм $\tilde{S}_n$ к числу B, $-Q\le B\le P$, и для абсолютно сходящегося ряда (*A*).

Действительно, пусть, например, $B>0$. Так как $p_i\to 0$ и $\sum p_i = P$, то существует такое натуральное число $n(B)$, что

$$\sum_1^{n(B)-1} p_i < B < \sum_1^{n(B)} p_i \triangleq \tilde{S}_1 < P, \quad \text{и} \quad \sum_{n(B)+1}^{\infty} p_i > 0. \qquad (7)$$

Аналогично, существует такое число $n(\tilde{S}_1)$, что справедливы неравенства

$$\tilde{S}_2 \triangleq \tilde{S}_1 + \sum_1^{n(\tilde{S}_1)} q_i < B \quad \text{и} \quad \tilde{S}_3 \triangleq \tilde{S}_2 + p_{n(B)+1} > B \quad \text{и т. д.} \qquad (8)$$

Для выполнения неравенств (7) и (8) на каждом шаге при необходимости слагаемые в соответствующих остатках рядов $\sum p_i$ и $\sum q_i$ можно переставить соответствующим образом. В крайних случаях, когда $B = -Q$ или $B = P$, в частичные суммы $\widetilde{S}_n$ мы включаем только отрицательные или, соответственно, только положительные слагаемые ряда (A). Так, полученная последовательность $(\widetilde{S}_n)$ частичных сумм $\widetilde{S}_n$ сходится, как и в доказательстве теоремы Римана, к числу B. Для знакопеременного не абсолютно сходящегося ряда (A) при соответствующем изменении нумерации $\sum p_i = \infty$ и $-\sum q_i = \infty$, поэтому для такого ряда $\boldsymbol{B}$ можно выбрать, включая крайние случаи, произвольно: $-\infty \le B \le \infty$. Подробнее об этом в п. 2.

Обобщением Теорем 1 и 2 является следующая ниже

Теорема 3. *Если из членов числового ряда* ($\boldsymbol{A}$) *построена произвольным образом последовательность* (S_n) *частичных сумм* S_n, *сходящаяся к числу* P, *а последовательность* (r_n) *получающихся при этом остатков* r_n *сходится к числу* Q, *то сумма ряда* ($\boldsymbol{A}$) *равна* $P + Q$.

2. В [1, стр. 316–319] в качестве ряда (A) взят ряд $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, при этом A=ln2. Ряд ($\boldsymbol{B}(p, q)$) получен из ряда (A) следующей «процедурой»: после каждых p последовательных положительных слагаемых ряда (A) ставилось q последовательных отрицательных членов этого ряда. Последовательность $(\widetilde{S}_n)$ частичных сумм $\widetilde{S}_n$ так полученного ряда ($\boldsymbol{B}(p, q)$) сходится к числу

$$B(p, q) = \ln(2\sqrt{p : q}).$$

Из этой формулы при $p = q$ получим, что $A = B(p, p)$. Очевидно, что при других парах чисел p и q $A \ne B(p, q)$: в остатках $\widetilde{r}_n$ ряда ($\boldsymbol{B}(p, q)$) «накапливаются» при $p > q$ отрицательные слагаемые или положительные при $p < q$. Описанная выше процедура, то есть отображение φ: $(A) \to (\boldsymbol{B})$, при $p \ne q$ не будет перестановкой (см. ниже Определение 1 и Теорему 4).

Покажем, что, например, если $p > q$ и $p + q = 2k$, то при предельном переходе мы получим, что $\widetilde{r}_n \to (A - B(p, q)) < 0$. Используя равенства

$$\sum_1^k \frac{1}{n} = \ln k + C + \gamma_k \text{ и } \sum_1^m \frac{1}{2n} = 0{,}5(\ln m + C + \gamma_m) \tag{9}$$

(см. [1, стр. 319–320]), где C – постоянная Эйлера, а $\gamma_n \to 0$, мы получим последовательно следующие оценки частичных сумм S_{2k}, $\widetilde{S}_{2k}$ и остатков r_{2k}, $\widetilde{r}_{2k}$ рядов ($\boldsymbol{A}$) и ($\boldsymbol{B}(p, q)$) соответственно:

$$S_{2k} = \ln 2 + \gamma_{2k} - \gamma_k,\ r_{2k} = -\gamma_{2k} + \gamma_k,\ \widetilde{S}_{2k} = \ln 2\left(\sqrt{p : q}\right) + \gamma_{2p} - 0{,}5\gamma_p - 0{,}5\gamma_q,$$

$$\widetilde{r}_{2k} = -\ln\sqrt{p : q} - \gamma_{2p} + 0{,}5\gamma_p + 0{,}5\gamma_q. \tag{10}$$

Оценка остатка $\widetilde{r}_{2k}$ в (10) получена с помощью второго из равенств (9) по формуле $\widetilde{r}_{2k} = r_{2p} - (\sum_q^{p-1} \frac{1}{2i + 2})$. Из (9) и (10) следует, что $\forall n \in N$ справедливы равенства: $\widetilde{S}_{2kn}$=ln$(2\sqrt{p : q}) - \beta_n$, $\widetilde{r}_{2kn} = -\ln(\sqrt{p : q}) + \beta_n$, где $\beta_n \triangleq -\gamma_{2p} + 0{,}5\gamma_p + 0{,}5\gamma_q$ и, следовательно, $\beta_n \to 0$. Итак, $B(p, q) = \ln 2 \ne \ln(2\sqrt{p : q})$, так как здесь $p > q$.

При $p = q$ отображение φ: $(\boldsymbol{A}) \to (\boldsymbol{B})$ будет биекцией. Критерий биективности этого отображения φ и ему подобных мы вводим в п. 3.

В качестве второго примера рассмотрим [2, стр. 23] абсолютно сходящийся знакопеременный ряд ($\boldsymbol{C}$):

$$C = 1 - \ln 2 = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)n(2n+1)} = \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \sum (-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{n}\right) + \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) +$$

$$+ \sum (-1)^{n}\left(\frac{1}{n}\right) = \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{4n}{4n^2-1}\right) - \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Этот пример показывает, что Теорема 2 для знакопеременного не абсолютно сходящегося ряда следует непосредственно из подобной теоремы [3, стр. 315] для знакопеременного абсолютно сходящегося ряда.

Так как $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, то из этого примера, в частности, следует, что

$$\sum(-1)^{n+1}\left(\frac{4n}{4n^2-1}\right)=1.$$

Для знакопеременного не абсолютно сходящегося ряда (*A*) при соответствующем изменении нумерации $\sum p_i=\infty$ и $-\sum q_i=\infty$, то есть формально $A=\infty-\infty$. Для раскрытия этой неопределённости мы представляем ряд (*A*) в виде S_n+r_n и делаем предельный переход. Покажем, как, используя подмену понятия потенциальной бесконечности (бесконечности натурального ряда) понятием исчерпаемости-неисчерпаемости, можно получить таким же путём всё что угодно, например минус бесконечность:

$$\sum a_i=\sum p_i-\sum q_i=(-\infty)+\sum p_i=(-\infty+\sum_{1}^{k_1}p_i)+\sum_{k_1+1}^{\infty}p_i=$$

$$=(-\infty)+\sum_{k_1+1}^{\infty}p_i=\ldots=(-\infty+\sum_{k_{n-1}+1}^{k_n}p_i)+\sum_{k_n+1}^{\infty}p_i=\ldots=(-\infty),$$

так как на каждом *n*-м шаге в круглых скобках получается $(-\infty)$, как сумма $(-\infty)$ и числа $s_n\triangleq\sum_{k_{n-1}+1}^{k_n}p_i>0$, где $k_n-k_{n-1}\geq 1$. Более того, в начале суммирования можно выбрать, например, только часть отрицательных слагаемых из суммы $\sum q_i$, которые дадут в сумме $(-\infty)$, а оставшиеся положительные и отрицательные слагаемые ряда складывать поочерёдно с $(-\infty)$.

3. Неполнота алгоритма доказательства [1, стр. 317–318] теоремы Римана, то есть предположение, что положительные и отрицательные слагаемые ряда (*A*) могут быть «единовременно» исчерпаны при переходе к ряду (***B***) и что при этом $\tilde{r}_n\to 0$ – частный случай некорректного понимания бесконечности натурального ряда чисел. Некоторые более точные формулировки и утверждения мы приводим ниже. Но вначале напомним три очевидных для отображений конечных множеств утверждения.

Утверждение 1. *Конечные множества A и B биективны, то есть перестановочны, тогда и только тогда, когда равны количества их элементов.*

Утверждение 2. *Не существует биекции между конечным множеством A и его собственным подмножеством $B\subset A$.*

Утверждение 3. *Если существует две инъекции $\varphi: A\to B$ и $\psi: B\to A$ между конечными множествами A и B, то множества A и B биективны.*

По традиции, идущей от Р. Дедекинда, при переходе к бесконечным множествам второе утверждение отвергается (см., например, [3, стр. 57–58]), а третье по умолчанию принимается в качестве аксиомы. Ниже мы излагаем противоположную этому точку зрения.

Сюръективность отображения $\varphi: N\to N$, где $N=\{n\}$ – множество натуральных чисел, неявно предполагает переход от бесконечности натурального ряда (от потенциальной бесконечности) к бесконечности актуальной, присутствующей во фразе «для всех *n*», понимаемой буквально. Для уточнения понятия биективности функций вообще мы вводим следующие ниже определение и необходимый критерий биективности отображения $\varphi: N\to N$.

Определение 1. *Мы называем инъекцию $\varphi: N\to N$ биекцией, то есть перестановкой множества N, тогда и только тогда, когда существует такая последовательность (n_i), $n_i\in N$, что $\forall i$ выполняются равенства*

$$n_i-k_i=0, \tag{11}$$

где $k_i\triangleq\max\{\varphi(n):\ n_{i-1}<n\leq n_i\}$.

Условие (11) биективности отображения $\varphi: N\to N$ очевидным образом обобщает Утверждение 1 для конечных множеств.

Другой, необходимый критерий биективности функции $\varphi: N\to N$ имеет асимптотический характер: $\lim(\varphi(n):n)=1$.

Точную формулировку даёт следующее из (11) такое утверждение:

Теорема 4. *Если инъекция* $\varphi\colon\ N\to N$ *является биекцией, то при* $n\to\infty$ *выполняется предельное равенство*

$$\lim\,(\varphi(n):n)=1\,. \qquad (12)$$

Определение 2. *Мы называем инъекцию* $\varphi\colon\ N\to N$ *биективной в бесконечности, если выполняется предельное равенство (12).*

Легко показать, что отображение $\varphi\colon\ N\to N$ в Теореме 4 удовлетворяет следующему условию:

$$k(n)n+b(n)\le\varphi(n)<k(n)n+b(n)+1\,,$$

где $b(n)\to b,\ k(n)\to 1$ при $n\to\infty$ и b – некоторое целое число.

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 4. *Биективность в бесконечности инъекции* $\varphi\colon\ N\to N$ *является необходимым, но не достаточным в смысле Определения 1 условием биективности этого отображения.*

Для уточнения в дальнейшем понятия «счётность множества» мы формулируем вначале более общее понятие.

Определение 3. *Множество B мы называем бесконечным, если существует инъекция* φ: $B\to C\subset B$.

Мы не предполагаем экстраполяции понятия биективности из Определения 1 на отображения произвольных бесконечных множеств. Вопреки общепринятому, мы формулируем и доказываем для бесконечных множеств аналогичную Утверждению 2 для конечных множеств следующую ниже теорему.

Теорема 5. *Если отображение* $\psi\colon A\to B$ *биективно, тогда не существует биекции* $\varphi\colon A\to(B\cup C)$, *где* $B\cap C=\varnothing$.

При доказательстве Теоремы 5 мы образуем из двух по предположению биекций $\psi\colon\ A\to B$ и $\varphi\colon\ A\to(B\cup C)$ биекцию $\varphi^{-1}\circ\psi\colon\ A\to A$, с помощью которой строим строго убывающую последовательность

$$A\supset A_1\supset A_{12}\supset A_{123}\supset\ldots\supset A_{123\ldots n}\supset\ldots \qquad (13)$$

подмножеств множества A, где $A_1\triangleq\varphi^{-1}(B)$, $A_{12}\triangleq\varphi^{-1}(\psi(A_1))$ и так далее. Подчеркнём, что в построении цепи (13) участвует только одна композиция $\varphi^{-1}\circ\psi$ отображений ψ и φ. Так как в последовательности (13) каждые два соседних подмножества $A_{12\ldots n}$ и $A_{12\ldots n\,n+1}$ по предположению биективны, то они все биективны между собой и биективны множеству A: $A_{12\ldots n}\sim A$ для $\forall n\in N$. Следовательно, каждое подмножество $A_{12\ldots m}$ цепи (13) содержит биективное себе собственное подмножество $A_{12\ldots m\,m+1}$, и потому последовательность (13) не может закончиться некоторым подмножеством $A^*\subset A$. С другой стороны, во множестве A не предполагается никакой структуры, допускающей существование подмножества $A^*\subset A$, к которому могла бы сходиться последовательность (13). Следовательно, эта последовательность сходится к некоторой соответствующей данной последовательности точке $A_0\in A$, определяемой биекциями $\psi\colon A\to B$ и $\varphi\colon A\to(B\cup C)$.

Геометрическую иллюстрацию Теоремы 5 и её доказательства даёт множество пар (φ,ψ) центральных проекций на плоскости, определяемых отрезком A_1A_2 прямой a и отрезками B_1B_2 (проекция ψ) и $C_1C_2\supset B_1B_2$ (проекция φ) прямой $в$. Так как положение центров проектирования отрезков A_1A_2 и B_1B_2 (C_1C_2) зависит от положения прямых a и $в$ на плоскости, то множество пар (φ,ψ) таких проекций не ограничено. Каждая пара проекций (φ,ψ) определяет последовательность (13), которая представляет собою систему вложенных отрезков, каждый из которых содержит некоторую точку A_0. Длина отрезков при возрастании цепи (13) стремится к нулю. Следовательно, последовательность (13) сходится к точке A_0 отрезка A_1A_2. Более того, для любой точки A_0 отрезка A_1A_2 можно подобрать такую пару (φ,ψ) центральных проекций и так дополнить отрезок B_1B_2 до отрезка C_1C_2, что соответствующая цепь (13) будет сходиться к выбранной точке A_0.

Приводимое ниже очевидное следствие Теоремы 5 является точным аналогом Утверждения 2 для конечных множеств.

Утверждение 5. *Не существует биекции между бесконечным множеством B и его собственным подмножеством* $C \subset B$.

Пример. Тождественное отображение $id: \ C \to C$ является биекцией и простейший случай: $B = C \cup \{a\}$, где $a \notin C$.

Из Теоремы 5 очевидно, что объём понятия «счётность множества» будет уменьшен, если его определять как его биективность множеству N натуральных чисел. Очевидно, что бесконечное подмножество множества натуральных чисел должно быть счётным при любом определении понятия «счётность». С другой стороны, из Теорем 4 и 5 мы получаем для бесконечных множеств противоположную Утверждению 3 для конечных множеств следующую теорему.

Теорема 6. *Взаимная инъективность бесконечных множеств* $A \subset N$ *и* $B \subset N$ *не является достаточным условием их биективности в смысле Определений 1 и 2.*

Например, множество *Ч* чётных натуральных чисел не биективно множеству N натуральных чисел: ни одно из условий (11) и (12) не выполняется для инъекций φ: $N \to Ч$ и ψ: $Ч \to N$, где $k = 2n \triangleq \varphi(n)$ и $n = 0{,}5k \triangleq \psi(k)$.

Теорема 5, её следствия и аксиоматически формируемое понятие бесконечности множества N натуральных чисел позволяют и делают необходимым введение следующих обобщений понятия «счётность» (ср. [2, гл. 3, стр. 42, 57–58]). Мы связываем прежде всего классификацию бесконечных подмножеств B множества N натуральных чисел со степенью роста функции φ: $N \to B$.

Определение 4. *Множество* $B \subseteq N$ *мы называем k-счётным, если существует инъекция* φ: $N \to B$ *и*

$$\lim((\varphi(n)) : n) = k^{-1}, \ 0 < k \le 1; \tag{14}$$

1-счётное множество B мы называем счётным, и если при этом выполняется условие биективности (11), *то множество B мы называем натурально счётным.*

Инъекцию φ: $N \to Z$, где $Z \triangleq \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ мы определим формулой

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ n = 1, \\ m, \text{ если } \ n = 2m, \\ -m, \text{ если } \ n = 2m + 1. \end{cases}$$

Тогда для классификации подмножеств $B \subseteq Z$ или, что то же самое, отображений φ: $N \to B \subseteq Z$ мы вводим аналогичное (14) условие

$$\lim((|\varphi(n)|) : n) = k^{-1}, \ 0 < k \le 2. \tag{15}$$

Если множество B является подмножеством упорядоченного объединения m экземпляров множества N, то при линейности функции φ: $N \to B$ параметр k в критерии (15) удовлетворяет условию $0 < k \le m$.

Дальнейшее обобщение условий (14) и (15) можно сделать, например, в форме следующего ниже определения.

Определение 5. *Множество N(B) индексов элементов подмножества* $B \subseteq R$ *и само множество B мы называем (k, p, q, s)-счётным, если существует инъекция* φ: $N \to |N(B)|$ *и*

$$\lim(L_q(\varphi(n)) : L_\nu(n^p)) = k, \quad s \triangleq \frac{-\nu}{1+\nu}, \tag{16}$$

где $|N(B)|$ *– множество концов начальных отрезков множества N(B), функция* L_m *задаётся равенством* $L_m(t) \triangleq \ln(\ln(\cdots(\ln(t))\cdots))$, *а число p и количество ν (q) логарифмирований соответствующей переменной t определяются требованием выполнения неравенства* $0 < k < \infty$. *При этом инъекция* φ: $N \to |N(B)|$ *удовлетворяет следующему условию «максимальности»: для любой другой инъекции* $\widetilde{\varphi}$: $N \to |N(B)|$ *каждый из параметров k, p, q, s четвёрки (k, p, q, s) имеет не большее значение.*

Например, для счётных в смысле Определения 4 подмножеств множества N четвёрка (k, p, q, s) имеет вид (1, 0, 0, 0). Вследствие асимптотического равенства (12) биективным в смысле Определения 2 множествам соответствуют равные четвёрки (k, p, q, s).

Рассмотрим матрицу Q, $\langle Q\rangle \triangleq \langle n, n\rangle$ и $q_m^i \triangleq \dfrac{i}{m}$, $1 \le i \le n$, $1 \le m \le n$. В этой матрице количество $Q(n)$ различных рациональных чисел зависит существенно от значений функции $\pi(n)$, определяющей количество простых чисел p, не больших n, и, например, $Q(p) = Q(p-1) + 2(p-1)$ для $\forall p \in \pi(n)$. Непосредственно можно получить следующие оценки числа $Q(n) \triangleq \mu(n)n^2$:

$$n^2(1-\rho(n)) + \Theta(n) < Q(n) < n^2(1-\rho(n)) + 2n\lambda(n) - \pi(n) + \Theta(n). \tag{17}$$

Здесь $\rho(n) \triangleq \sum p^{-2}$, $\lambda(n) \triangleq \Sigma p^{-1}$, а суммирование идёт по всем простым $p \le n$. Ряд Σp^{-1} расходится, как показал ещё Л.Эйлер (см. [4, стр. 222]). Ряд $\sum p^{-2}$ сходится, причём $\sum p^{-2} < 0{,}5$. Функция $\Theta(n)$ в (17) определяется равенством

$$\Theta(n) = \left[\frac{n}{2}\right]\cdot\sum_{p_2}\left[\frac{n}{2p_2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right]\cdot\sum_{p_3}\left[\frac{n}{3p_3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p_k}\right]\left[\frac{n}{p_{k+1}}\right],$$

где $p \cdot p_p \le n$, $k = \max\{i: \ p_i p_{i+1} \le n\}$. Из свойств функции $\mu(n)$ мы отметим здесь лишь следующие. На множестве N функция $\mu(n)$ немонотонно убывает: для всех простых чисел $p \ge 3$ $\mu(p) = \mu_{\max}$; строго убывает функция $\mu(n)$ почти на всём множестве $\pi(n)$ (без вторых чисел из каждой пары простых чисел-близнецов и ещё без некоторых) и почти для всех составных n (кроме степеней некоторых простых чисел), лежащих между последовательными простыми p_1 и p_2, $\mu(p_1) > \mu(n) < \mu(p_2)$. Например,

$0{,}629696 < \mu(47) < 0{,}629697$, $0{,}62765 < \mu(49) < 0{,}62766$, $0{,}627625 < \mu(53) < 0{,}627626$, то есть $\mu(47) > \mu(49) > \mu(53)$; $0{,}610 < \mu(58) < 0{,}611$, $0{,}623 < \mu(59) < 0{,}624$, $0{,}611 < \mu(60) < 0{,}612$, $0{,}624 < \mu(61) < 0{,}625$, $0{,}619 < \mu(62) < 0{,}620$, $0{,}618 < \mu(63) < 0{,}619$ и $0{,}619 < \mu(79) < 0{,}620$, но $0{,}621 < \mu(83) < 0{,}622$ и $0{,}620 < \mu(103) < 0{,}621$ и т. д.

Для функции φ: $N \to |N(B)|$, где $N(B)$ – множество индексов m элементов подмножества $B \subseteq Q$ и $\varphi(n) = 0{,}75n^2$, четвёрка из (16) $(k, p, q, s) = (0{,}75, 2, 0, 0)$. Такой же будет четвёрка для φ: $N \to |C|, C \supset N(Q)$, где $\varphi(n) = 0{,}75n^2 + 2n\lambda(n)$. Если, например, $\lim \lambda(n)$ сравним с $C_0 n^{\alpha}$, $0 < \alpha << 1$, то для функции $\varphi_1(n) = n\lambda(n)$ четвёрка (k, p, q, s) имеет вид $(C_0, 1+\alpha, 0, 0)$.

Для множества $R(n, p)$ n-разрядных p-ичных чисел отрезка $[0, 1]$ количество значащих цифр после запятой этих чисел заполняет таблицу размера $\langle p^n, n\rangle$ (см. [3, стр. 82–84]). Множество строк и множество столбцов этой таблицы счётны, но не биективны в смысле Определения 1. Функции φ: $N \to |N(R(n, p))|$, $\varphi(n) = p^n$, соответствует четвёрка $(k, p, q, s) = (\ln p, 0, 1, 0)$.

В заключение отметим, что Теорема 4 позволяет сформулировать при известных функциях φ_λ: $N \to |N(B_\lambda)|$ эффективный способ проверки биективности в бесконечности (в смысле Определения 2) бесконечных подмножеств $B_\lambda \subseteq R$. Нам кажется сомнительной в силу Теоремы 6 корректность теории мощностей бесконечных множеств, построенной на общепринятом понятии биективности. Для использования понятия (k, p, q, s)-счётности множеств в качестве соответствующего введённым выше понятиям аналога мощности бесконечных множеств необходимо определить во множестве четвёрок (k, p, q, s) отношение порядка и алгебру, заменив при необходимости некоторые из параметров четвёрки подходящими их функциями. Имея в виду Определение 5 и его условие (16), мы предлагаем считать аксиомой утверждение: *Всякое бесконечное множество является не более чем (k, p, q, s)-счётным* (ср. [5, стр. 12 и 129]).

Автор посвящает данную работу памяти своего товарища Владимира Андреевича Труппова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, в 3-х т. – 3-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – Т. 2. – 664 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – 5-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 1108 с.
3. Сухотин А. М. Начало высшей математики: Учеб. пособие. – Томск: ТПУ, 1997. – 104 с.
4. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных: Пер. с лат.- 2-е изд.-М.: Наука, 1961. – Т. 1. – 315 с.
5. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 150 с.