

УДК 621.384.647.001.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОАКСИАЛЬНОГО МАГНИТОПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ

А.А. Сивков, Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева, А.М. Купцов

Томский политехнический университет

E-mail: vasilova.o.v@mail.ru

Построена и исследована математическая модель коаксиального магнитоплазменного ускорителя. На примере модели метода-ми вычислительного эксперимента проведен расчет поля векторного потенциала, индуктивности индуктора, имеющего сложную конфигурацию, погонной индуктивности коаксиальной системы жгут-электрод. Получено решение системы уравнений равновесия напряжения и тока в цепи и ее связь с механическими процессами в системе, графически представлен баланс энергии без учета эрозии.

Ключевые слова:

Магнитоплазменный ускоритель, математическое моделирование, электротехническая схема замещения, система нелинейных дифференциальных уравнений.

Key words:

Magneto plasma accelerator, mathematical modeling, electro technical scheme of replace, system of nonlinear differential equations.

Экспериментальные исследования показали возможность использования импульсного высоко-точного коаксиального магнитоплазменного ускорителя для нанесения различных функциональных покрытий на металлические поверхности. К уникальным возможностям способа можно отнести сверхглубокую модификацию металлических поверхностей путем ее обработки гиперзвуковой струей плотной электроразрядной плазмы. В связи с этим становится актуальным теоретическое изучение физических процессов происходящих в магнитоплазменном ускорителе.

На рис. 1 представлена упрощенная модель ускорителя. Для описания процессов происходящих в ускорителе представим его как электромеханическое устройство, считая, что масса и сопротивление плазмы постоянны. Сгусток представляется как недеформируемая проводящая перемычка, ускоряемая силами магнитного давления собственных токов, протекающих в ускорителе через перемычку. Будем считать, что плазменный сгусток локализован и устойчив в процессе ускорения его как единого целого.

На том же рисунке приводится электротехническая схема замещения, в которой C — емкость бата-

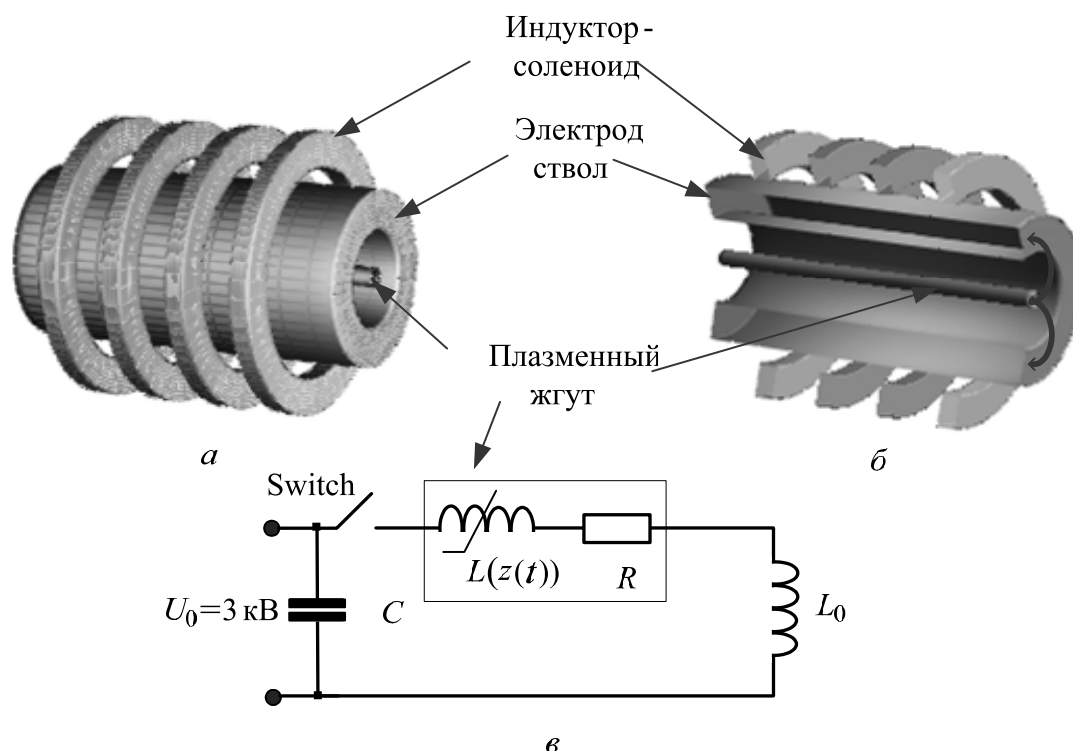


Рис. 1. Упрощенная модель коаксиального магнитоплазменного ускорителя: а) модель проводящей части плазменного ускорителя; б) сечение плазменного ускорителя; в) электротехническая схема замещения ускорителя

реи конденсаторов; $L(z(t))$ – индуктивность плазменного шнура; R – сопротивление пламенного сгустка; L_0 – индуктивность индуктора.

Пользуясь электротехнической схемой замещения ускорителя, можно составить систему уравнений равновесия напряжения и тока в цепи и увязать ее с механическими процессами в системе. При разработке математической модели проявляются свойства сверхтвердых материалов.

Для математического описания рассматриваемого устройства, необходимо иметь величины параметров L_0 , R , $L(t)$, C электромеханической модели. Приведем их описание.

В электротехнической схеме батарея конденсаторов емкостью $C=30 \cdot 10^{-3}$ Ф заряжается до напряжения $U_0=3$ кВ [1]. Энергия электростатического поля, запасенная в конденсаторе, передается в электрическую цепь. Сопротивление цепи будем считать равным $R=10^{-3}$ Ом [1–3]. Далее необходимо рассчитать два следующих параметра L_0 и $L(t)$.

Индуктивность коаксиальной системы жгут-электрод $L(t)$ определяем из энергетического соотношения $W=FL/2$, магнитное поле системы определяется по закону:

$$H_{\text{пл}}(x, y) = \frac{I}{2\pi r(x, y)}, \quad (1)$$

где I – ток, $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Запишем энергию системы, используя (1):

$$W(z) = \mu \int \frac{H_{\text{пл}}^2}{2} dV = \frac{I^2 \mu 2\pi}{2(2\pi)^2} \int_0^z dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{z \mu I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \quad (2)$$

где $\mu=4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная проницаемость воздуха; R_2 , R_1 – радиусы электрода ствола и плазменного жгута соответственно; z – координата распространения жгута.

Из соотношения (2) следует, что индуктивность можно записать в виде линейной функции координаты распространения:

$$L(z) = \frac{z \mu I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = L' z. \quad (3)$$

Постоянный коэффициент L' в (3) при координате z называется погонной индуктивностью (индуктивность единицы длины). После подстановки необходимых величин получаем величину погонной индуктивности:

$$L' = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = 10^{-7} \ln 4 = 1,36 \cdot 10^{-7} \text{ Гн},$$

где $R_1=10^{-3}$ м; $R_2=4 \cdot 10^{-3}$ м – радиусы плазменного сгустка и электрода.

Индуктор имеет сложную конфигурацию электродов, поэтому расчет индуктивности индуктора также проведен через известное энергетическое соотношение в соответствии с которым:

$$W_M = \frac{I^2 L_0}{2} \rightarrow L_0 = \frac{2W_M}{I^2}, \quad (4)$$

где I – ток в цепи; L – индуктивность; W_M – энергия магнитного поля.

В свою очередь энергия магнитного поля (4) при заданной конфигурации электродов и заданного распределения токов можно определить, используя последовательность соотношений [4]:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \delta dV \rightarrow L_0 = \frac{2W_M}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{A} \delta dV, \quad (5)$$

где $\mathbf{A}$ – векторный магнитный потенциал; δ – вектор плотности тока.

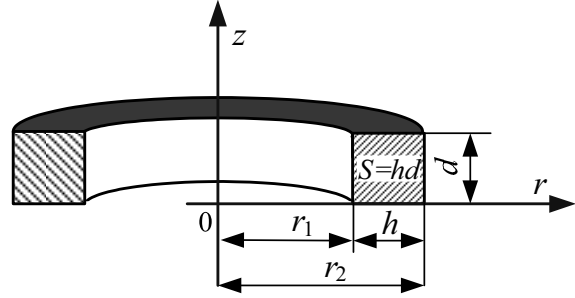


Рис. 2. Сечение проводника в виде кольца

После несложных преобразований (5) получим выражение для индуктивности одного кольца с прямоугольным сечением, с учетом того, что интегрирование производится только по объему проводника [4] и что ток в кольце равен $I=1$ А, (параметры кольца приведены на рис. 2):

$$L = \frac{2\pi}{S^2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^d \mathbf{A}(z, \rho) \rho d\rho dz. \quad (6)$$

При наличии четырех колец в индукторе в соответствии с рис. 3 и ур. (6) имеем:

$$L = \frac{2\pi}{S^2} \int_{r_1}^{r_1+d} \rho d\rho \left(\int_0^h dz \mathbf{A}(z, \rho) + \int_{z_1}^{z_1+h} dz \mathbf{A}(z, \rho) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{S^2} \int_{r_1}^{r_1+d} \rho d\rho \left(\int_{z_2}^{z_2+h} dz \mathbf{A}(z, \rho) + \int_{z_3}^{z_3+h} dz \mathbf{A}(z, \rho) \right) \right). \quad (7)$$

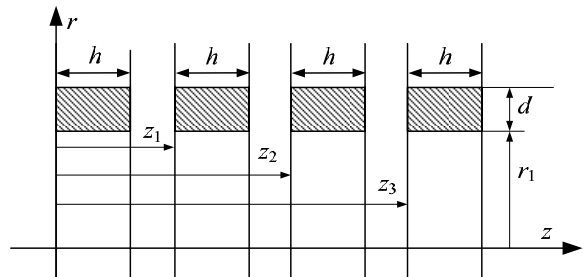


Рис. 3. Сечение индуктора

Векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}(z)$ рассчитывался для конфигурации электродов индуктора, рис. 1, 3. При расчете $\mathbf{A}(z)$ использовалось уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}(z, r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r \mu} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}(z, r) = -\delta. \quad (8)$$

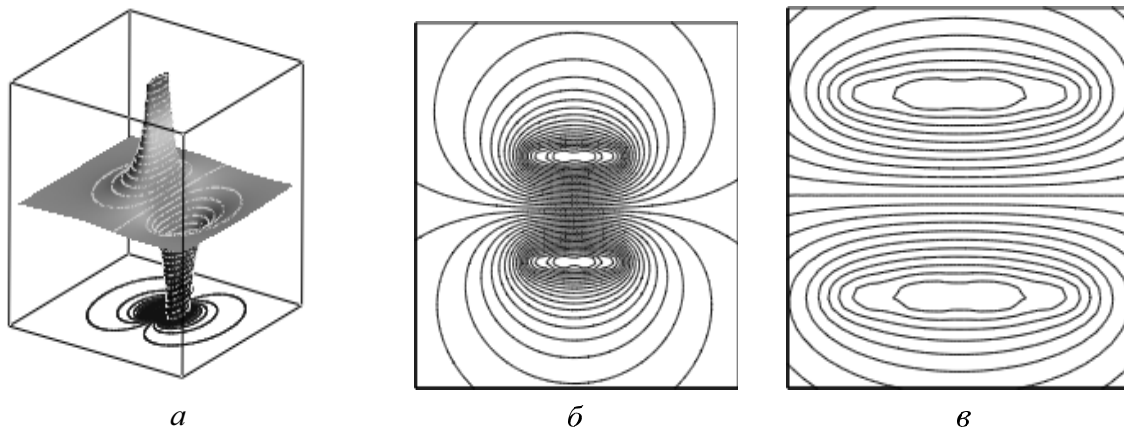


Рис. 4. Расчет поля векторного потенциала $\mathbf{A}(z, r)$: а) пространственное распределение векторного потенциала $\mathbf{A}(z, r)$ индуктора; б) линии равного векторного потенциала; в) увеличенный фрагмент приосевой области

Расчет поля векторного потенциала проведен на основе метод конечных элементов (8). Результаты расчетов приведены ниже (рис. 4).

После расчета магнитный потенциал в дискретном множестве точек, далее аппроксимировался с помощью двумерного сплайна, а затем подставлялся в интегральное соотношение (7). В результате расчетов получена индуктивность индуктора $L_0 = 8,764 \cdot 10^{-7}$ Гн.

Пользуясь электротехнической схемой замещения ускорителя, составим систему уравнений равновесия напряжения и тока в цепи и увяжем ее с механическими процессами в системе. Для этого удобно использовать формализм Лагранжа [5]. Лагранжиан $\mathbf{L}(z, q)$ электромеханической системы, диссипативную функцию $\Phi(\dot{q})$ и обобщенную силу $F(t)$ записываем в виде:

$$\mathbf{L}(z, q) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + L(z) \dot{q}^2 - \frac{q_c^2}{2C}, \quad \Phi = R \dot{q}, \quad F(t) = U_0,$$

где m – масса; $z(t)$ – координата; q – заряд; $\mathbf{L}(z) = L_0 + L'z$ – индуктивность; R – сопротивление плазмы.

Составляя уравнение Лагранжа, получим уравнение для электромеханической системы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \mathbf{L}(z, q) - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{L}(z, q) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathbf{L}(z, q) - \frac{\partial}{\partial q} \mathbf{L}(z, q) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Phi = F(t) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\dot{q} = i, \quad q = \frac{u_c}{C} \right) \rightarrow \begin{cases} m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} L(z) \\ \frac{d}{dt} [iL(z)] - u_c + iR = U_0 \end{cases}, \quad (9)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (9) решена численно, для повышения точности расчета она предварительно была сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \frac{i^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} L(z) \\ \frac{d}{dt} i = \frac{-i \frac{\partial L(z)}{\partial z} + U_c - iR + U_0}{L(z)} \\ \frac{d}{dt} U_c = -\frac{i}{C} \end{cases}$$

в векторной форме $\rightarrow \frac{d\mathbf{X}}{dt} = D(t, \mathbf{X})$,

где $\mathbf{X} = [x_1 = z(t), x_2 = v(t), x_3 = i(t), x_4 = u_c(t)]^T$ – вектор состояния содержащий компоненты: $z(t)$ – координату; $v(t)$ – скорость; $i(t)$ – ток и $u_c(t)$ – напряжение на конденсаторе; $D(t, \mathbf{X})$ – расширенная матрица.

После расчета основных величин $\mathbf{X}(t)$ полезно рассчитать вспомогательные величины: кинетическую энергию плазменного сгустка $W_{\text{kin}}(t)$, магнит-

ную силу, действующую на сгусток $F(t) = m \frac{dv(t)}{dt}$,

напряжение на индуктивности $u_L(t)$, энергию индуктивности $W_L(t)$, потокоцепление $\Psi(t)$ и энергию конденсатора $W_C(t)$. Это удобно сделать с помощью расширенной матрицы $D(t, \mathbf{X})$:

$$\begin{pmatrix} W_{\text{kin}}(t) \\ F(t) \\ u_L(t) \\ W_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv(t)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i(t)L(z)C/2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times D \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ i(t) \\ u_c(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Psi(t) \\ W_C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(z) & 0 \\ 0 & \frac{u_c(t)C}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{pmatrix}.$$

Расчет дифференциальных уравнений был произведен методом Рунге–Кутты с фиксированным шагом. Число точек дискретизации временного интервала выбиралось равным $N=3 \cdot 10^3$. Начальные данные для координаты, скорости, тока и напряжения выбирались равными соответственно $z(0)=0$, $v(0)=0$, $i(0)=0$, $u_c(0)=U_0$.

Результаты расчетов приведены ниже (рис. 5).

В качестве правильности работы алгоритма расчета проведем проверку баланса энергии рассматриваемой системы [3]. Приведем описание каждой из слагаемых энергии.

Магнитное давление $P=7 \cdot 10^5$ атм приводит к скоростям порядка 10 км/с. При электродинамическом ускорении часть энергии трансформируется в кинетическую:

$$W_{кин}(t) = \frac{mv^2}{2}.$$

Наличие реактивных элементов L , C обуславливает взаимное преобразование электрической энергии в магнитную энергию и наоборот:

$$W_C(t) = \frac{u_c^2(t)C}{2}, \quad W_L(t) = \frac{i^2(t)L}{2}.$$

В результате такого преобразования энергия рассеивается на преодоление сил трения и сопротивления, возбуждения ударных волн и т. д. В тепловую преобразуется энергия:

$$W_R(t) = \int_0^t i^2(t)R(t)dt.$$

Теперь можно записать баланс энергии в виде распределения электростатической энергии заряженного конденсатора (рис. 5):

$$\frac{U_0^2 C}{2} = \frac{mv^2(t)}{2} + \int_0^t i^2(t)R(t)dt + \frac{u_c^2(t)C}{2} + \frac{i^2(t)L(z(t))}{2}.$$

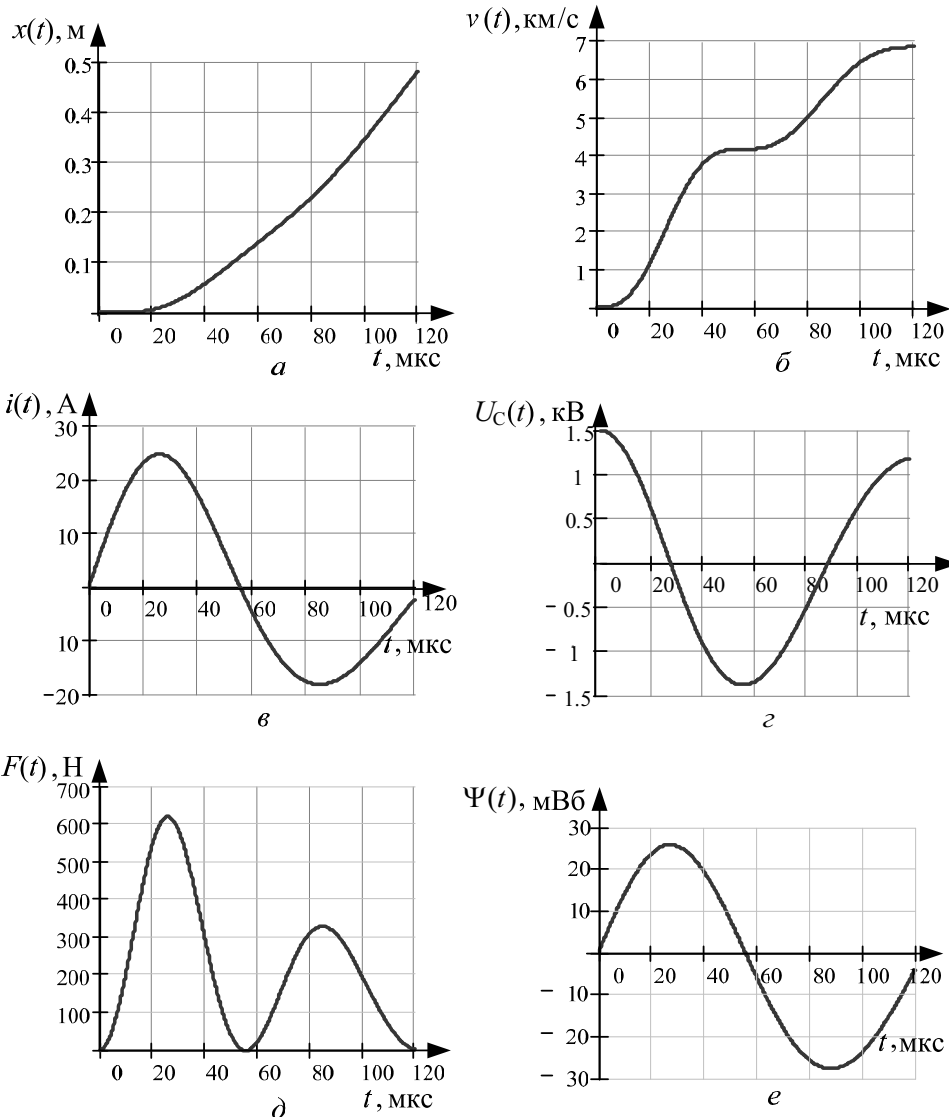


Рис. 5. Результаты расчетов без учета эрозии при значениях параметров цепи $C=10^{-4}$ Ф; $L_0=8,764 \cdot 10^{-7}$ Гн; $L'=1,36 \cdot 10^{-7}$ Гн; $U_0=3$ кВ: а) координата распространения; б) скорость сгустка; в) ток; г) напряжение на конденсаторе; д) сила; е) потокосцепление

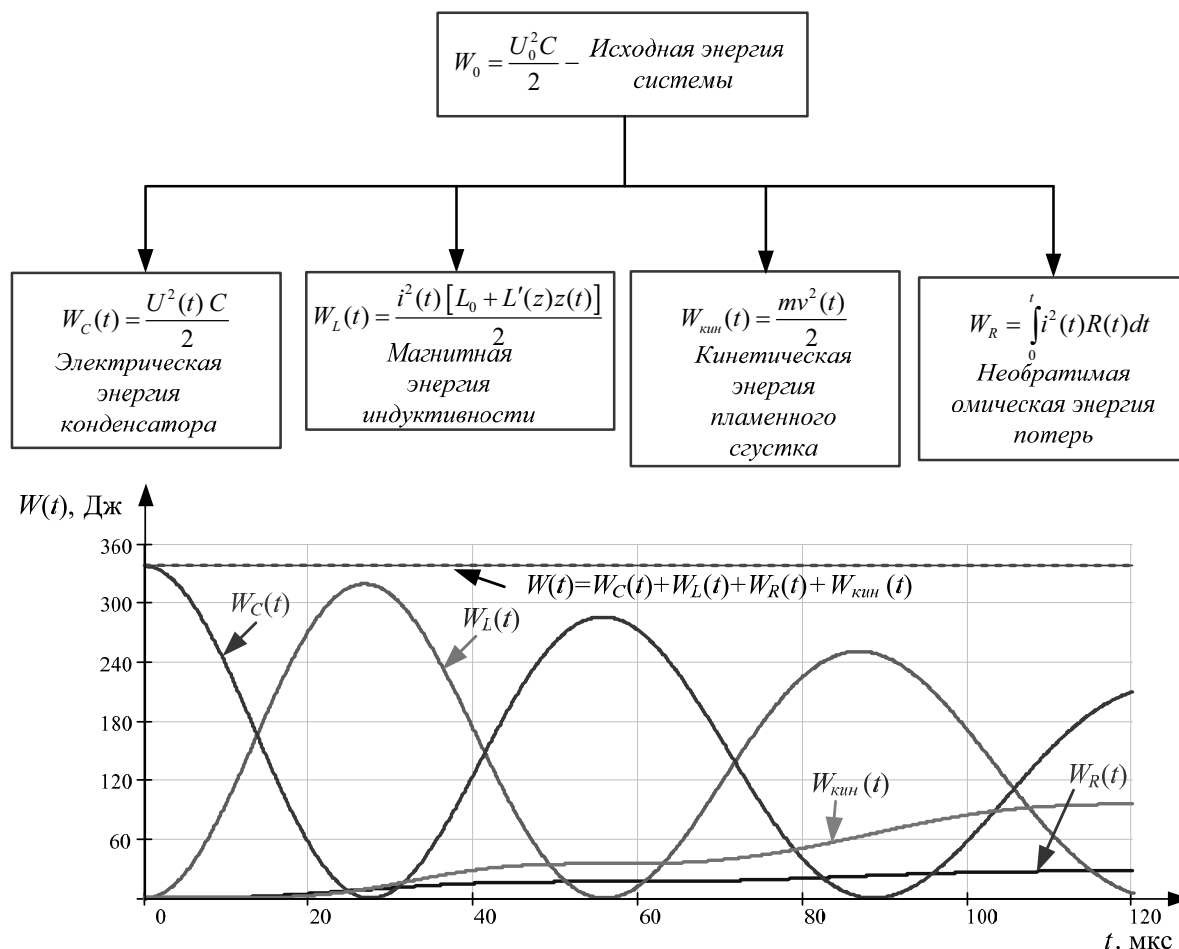


Рис. 6. Схема распределения энергии в плазменном ускорителе

Таким образом, представлен промежуточный этап разработанной математической модели коаксиального магнитоплазменного ускорителя без учета эрозии.

Выводы

Разработана математическая модель коаксиального магнитоплазменного ускорителя. Методами вычислительного эксперимента проведен расчет поля векторного потенциала, баланса энергии без учета эрозии, индуктивности индуктора системы

сложной конфигурации, погонной индуктивности коаксиальной системы жгут-электрод. Получено решение системы уравнений равновесия напряжения и тока в цепи, установлена ее связь с механическими процессами в системе.

Дано представление о балансе энергии в виде распределения электростатической энергии заряженного конденсатора, вкладах различных видов энергий в формирование процесса и трансформаций одного вида энергии в другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивков А.А., Герасимов Д.Ю., Цыбина А.С. Электроэрозийная наработка материала в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе для нанесения покрытий // Электротехника. – 2005. – № 6. – С. 25–38.
2. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2008. – 613 с.
3. Колесников П.М. Электродинамическое ускорение плазмы. – М.: Атомиздат, 1971. – 388 с.
4. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 487 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т. 1: Механика. – М.: Наука, 2001. – 222 с.

Поступила 29.06.2010 г.