УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК СМЕШАННОГО ТИПА

И.А. Ивановская, С.П. Моисеева*

Филиал ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», г. Анжеро-Судженск
E-mail: Irinka_asf@.mail.ru
*Томский государственный университет
E-mail: smoiseeva@mail.ru

Построена модель параллельного обслуживания заявок в системе массового обслуживания, состоящей из двух блоков обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход системы поступает смешанный поток, состоящий из трех простейших потоков с параметрами сдвоенных заявок, заявок 1-го и 2-го типов. Найдено аналитическое выражение для производящей функций двумерного распределения вероятностей состояний цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в нестационарном режиме.

Ключевые слова:
Параллельное обслуживание, пуассоновский поток кратных заявок, системы с неограниченным числом обслуживающих приборов.
Key words:
Parallel services, Poisson current of multiple claims, system with an unlimited number of servomechanisms.

На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием. Область применения таких СМО довольно обширна, например, при моделировании современных информационно-вычислительных систем необходимо учитывать пакетный характер трафика, а также один из основных принципов при проектировании современных компьютерных сетей – параллельность процессов обработки информации [1, 2]. Поэтому возникает необходимость в разработке новых математических моделей СМО, а именно, с неординарными входящими потоками и параллельным обслуживанием.

Рассмотрим систему с двумя блоками обслуживания (рисунок), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает смешанный поток, состоящий из трех простейших потоков с параметрами λ, λ_1, λ_2 сдвоенных заявок, заявок 1-го и 2-го типов, соответственно.

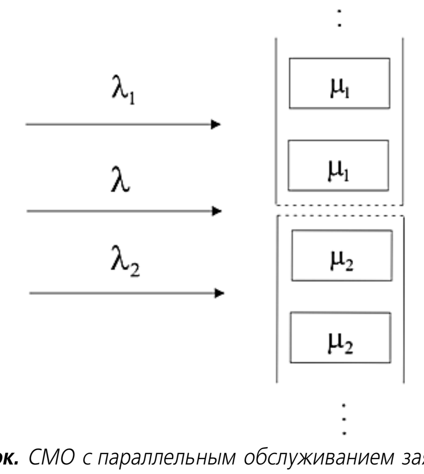

Рисунок. *СМО с параллельным обслуживанием заявок смешанного типа*

Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявки 1-го типа поступают в 1-й блок обслуживания, а 2-го типа во второй блок и занимают любой из свободных приборов, на котором выполняется их обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

Состояние системы определим вектором $\{i_1,i_2\}$, где i_k – число заявок в k-м блоке [3].

Обозначим $P(i,j,t)=P\{i_1(t)=i,t_2(t)=j\}$ – распределение вероятностей состояний двумерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени t.

Составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [4].

По формуле полной вероятности запишем равенства:

$$P(i,j,t+\Delta t)=P(i,j,t)\times$$
$$\times[(1-\lambda\Delta t)(1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-i\mu_1\Delta t)(1-j\mu_2\Delta t)]+$$
$$+P(i-1,j,t)\lambda_1\Delta t+P(i,j-1,t)\lambda_2\Delta t+$$
$$+P(i-1,j-1,t)\lambda\Delta t+P(i+1,j,t)(i+1)\mu_1\Delta t+$$
$$+P(i,j+1,t)(j+1)\mu_2\Delta t+o\Delta t.$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P(i,j,t)}{\partial t}=(-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-i\mu_1-j\mu_2)P(i,j,t)+$$
$$+\lambda_1 P(i-1,j,t)+\lambda_2 P(i,j-1,t)+\lambda P(i-1,j-1,t)+$$
$$+(i+1)\mu_1 P(i+1,j,t)+(j+1)\mu_2 P(i,j+1,t). \qquad (1)$$

Определив производящую функцию двумерного распределения $P(i,j,t)$ в виде

$$F(x,y,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}x^i y^j P(i,j,t),$$

запишем (1) в следующем виде

$$\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t}=(-\lambda-\lambda_1-\lambda_2)F(x,y,t)-$$
$$-\mu_1 x\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial x}-\mu_2 y\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial y}+\lambda_1 xF(x,y,t)+$$
$$+\lambda_2 yF(x,y,t)+\lambda xyF(x,y,t)+$$
$$+\mu_1\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial y}.$$

Отсюда получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t}+\mu_1(x-1)\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial x}+$$
$$\mu_2(y-1)\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial y}=$$
$$[\lambda(xy-1)+\lambda_1(x-1)+\lambda_2(y-1)]F(x,y,t). \quad (2)$$

Ставится задача нахождения производящей функции при нестационарном функционировании рассматриваемой СМО.

Запишем систему уравнений (2) в частных производных первого порядка [5]

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{\mu_1(x-1)}=\frac{dy}{\mu_2(y-1)}=$$
$$=\frac{dF}{[\lambda(xy-1)+\lambda_1(x-1)+\lambda_2(y-1)]F}.$$

Найдем три независимых первых интеграла этой системы.

$$x-1=C_1e^{\mu_1 t},$$
$$C_1=(x-1)e^{-\mu_1 t}; \quad (3)$$
$$y-1=C_2e^{\mu_2 t},$$
$$C_2=(y-1)e^{-\mu_2 t}. \quad (4)$$

Учитывая, что $xy-1=(x-1)(y-1)+(x-1)+(y-1)$, дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{[\lambda(xy-1)+\lambda_1(x-1)+\lambda_2(y-1)]F}=\frac{dt}{1}$$

перепишем следующим образом

$$\frac{dF}{[\lambda(x-1)(y-1)+(\lambda_1+\lambda)()x-1+(\lambda_2+\lambda)(y-1)]F}=\frac{dt}{1}.$$

Решение уравнения будет иметь вид

$$F=C_3\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}C_1C_2e^{(\mu_1+\mu_2)t}+\\+\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}C_1e^{\mu_1 t}+\dfrac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}C_2e^{\mu_2 t}\end{array}\right\}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (3, 4) для C_1 и C_2, общее решение уравнения (5) можно записать следующим образом

$$F(x,y,t)=\Phi((x-1)e^{-\mu_1 t},(y-1)e^{-\mu_2 t})\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\lambda(x-1)(y-1)}{\mu_1+\mu_2}+\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}(x-1)+\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_2}(y-1)\right\},$$

где $\Phi(x,y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для того, чтобы найти $\Phi(x,y)$, воспользуемся дополнительными условиями:

$$F(1,1,t)=1;$$
$$F(x,y,0)=1.$$

В итоге получим

$$\Phi((x-1)e^{-\mu_1 t},(y-1)e^{-\mu_2 t})=$$
$$\exp\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\lambda()x-1(y-1)}{\mu_1+\mu_2}e^{-0\mu_1+\mu_2 t}-\\-\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}(x-1)e^{-\mu_1 t}-\dfrac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}(y-1)e^{-\mu_2 t}\end{array}\right\}.$$

Тогда выражение для производящей функции $F(x,y,t)$ можно записать в виде

$$F(x,y,t)=$$
$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x-1)(y-1)(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t})+\\+\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}(x-1)(1-e^{-\mu_1 t})+\\+\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_2}(y-1)(1-e^{-\mu_2 t})\end{array}\right\}. \quad (6)$$

Если для производящей функции (6) рассмотреть случай при $t\to\infty$, то для стационарного распределения вероятностей числа заявок в каждом блоке системы производящая функция имеет вид.

$$F(x,y)=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x-1)(y-1)+\\+\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}(x-1)+\dfrac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}(y-1)\end{array}\right\}.$$

Явный вид производящей функции позволяет найти основные вероятностные характеристики двумерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени.

Для этого возьмем производные соответствующих порядков.

Учитывая, что

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(y-1)+\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}\right)F(x,y),$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x-1)+\frac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}\right)F(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(y-1)+\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}\right)^2F(x,y),$$
$$\frac{\partial F^2(x,y)}{\partial y^2}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x-1)+\frac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}\right)^2F(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= \left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \right) + \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(y-1) + \frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1} \right) \times \atop \times \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x-1) + \frac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2} \right) \right] F(x,y),$$

определяем математическое ожидание числа заявок в соответствующих блоках системы:

а) $Mi_1 = \dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}$;

б) $Mi_2 = \dfrac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}$.

Дисперсия числа заявок в соответствующих блоках системы:

а) $Mi_1^{\,2} - Mi_1 = \left(\dfrac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1} \right)^2$;

б) $Mi_2^{\,2} - Mi_2 = \left(\dfrac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2} \right)^2$.

Корреляционный момент двумерной случайной величины $\{i_1,i_2\}$:

$$M\{i_1 i_2\} = \left(\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1} \right)\left(\frac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2} \right) + \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}.$$

Полученные в статье результаты согласуются с результатами, изложенными ранее в сборнике [6] А.А. Чечельницким и О.В. Кучеренко.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 512 с.
2. Топорков В. В. Модели распределенных вычислений. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 448 с.
5. Эльцгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
6. Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения = Probability Theory, Mathematical Statistics And Their Applications: сб. научн. статей. Вып. 2 / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. – Минск: РИВШ, 2009. – С. 262–268.

Поступила 15.06.2010 г.