

УДК 519.86

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Н.С. Дёмин*, С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Работа посвящена нахождению математического ожидания и дисперсии капитала портфеля, состоящего из рискованного и безрискового активов, как основных характеристик в задаче оптимального управления портфелем ценных бумаг.

Ключевые слова:

Финансовый рынок, портфель ценных бумаг, актив, капитал, оптимальное управление.

Key words:

Financial market, equity security portfolio, asset, capital, optimal control.

Введение

Вопрос исследования задачи формирования портфеля ценных бумаг, как задачи оптимального управления капиталом портфеля в смысле минимизации функционала, характеризующего его отклонения от капитала эталонного портфеля рассматривался в [1]. В данной работе на основе результатов [1] исследуются вопросы нахождения среднего значения и дисперсии капитала.

Теория финансов, как составляющая часть макроэкономической теории, возникла в 20-х гг. XX в. На начальном этапе все сводилось к вопросам подсчета сложных процентов и увеличения фондов. Последующее развитие теории финансов проходило в двух направлениях, а именно, в предположениях условий полной определенности [2] и неопределенности [3, 4]. В первом случае рассматривались вопросы оптимальных решений в условиях полной определенности, когда все сводилось к задачам максимизации функций многих переменных. Во втором случае вероятностный анализ, получивший название «mean-variance analysis», выявил важную ковариацию в стоимостях акций, как того важного показателя, от которого зависит степень риска портфеля акций. Основным результатом этого подхода явилась идея диверсификации, получившая образное выражение в виде «*don't put all your eggs in one basket*». Современный этап развития той части теории финансов, которая занимает

ся проблемой формирования портфелей ценных бумаг из рискованных активов, связан, во-первых, с описанием процесса изменения стоимости рискованных активов в виде случайного процесса [5], а во-вторых, с формулировкой задачи формирования портфеля, как задачи стохастического оптимального управления [6].

1. Постановка задачи

Цена рискованного актива (для определенности – акции) определяется стохастическим дифференциальным уравнением (модель Самуэльсона) [5, 7]

$$dS(t) = S(t)[adt + \sigma dW(t)],$$

$$S(0) = S_0 > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad (1)$$

где a – доходность ($a > 0$); σ – волатильность ($\sigma > 0$); $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Цена безрискового актива $B(t)$ (например, банковский счет) определяется в виде

$$B(t) = B_0 e^{rt}, \quad B_0 > 0, \quad r > 0, \quad (2)$$

где r – процентная ставка. Пусть $X(t)$ – капитал портфеля. В текущий момент времени доля капитала, равная $u(t)$ вкладывается в рискованный актив, а доля капитала, равная $\tilde{u}(t) = 1 - u(t)$, вкладывается в безрисковый актив. В [1] (формула (7)) показано, что капитал определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = X(t)\{[r + (a - r)u(t)]dt + u(t)\sigma dW(t)\}. \quad (3)$$

Пусть капитал эталонного портфеля $Y(t)$ определяется в виде

$$Y(t) = Y_0 e^{\mu t}, \quad Y_0 > 0, \quad \mu > 0, \quad (4)$$

где μ – доходность эталонного портфеля.

Задача оптимального формирования портфеля ставится как задача нахождения такого значения $u(t) = u^0(t)$, которое минимизирует критерий качества

$$J = M \left\{ [X(t_1) - Y(t_1)]^2 + \int_0^{t_1} [X(t) - Y(t)]^2 dt \mid X(0) = X_0 \right\}, \quad (5)$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания, как интегральной меры расхождения между формализуемым и эталонным портфелями. Эта задача была решена в [1].

В данной работе ставится задача исследования свойств полученного решения, а именно задача нахождения математического ожидания и дисперсии капитала, которые достигаются на оптимальном решении.

2. Основные результаты

Утверждение 1. При оптимальном управлении $u^0(t)$ капитал $X(t) = X^0(t)$ определяется уравнением

$$dX^0(t) = \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)} \left[-(a-r)^2 b_1(t) + (r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X^0(t) \right] dt - \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X^0(t)] dW(t), \quad (6)$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определены в Утверждении 2 из [1] (формулы (31), (32)).

Доказательство. Подстановка (54) из [1] в (3) дает, что

$$\begin{aligned} dX^0(t) &= \left[r - \frac{(a-r)^2 [b_1(t) + b_2(t) X^0(t)]}{\sigma^2 b_2(t) X(t)} \right] X^0(t) dt - \\ &- \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X^0(t)] dW(t) = \\ &= \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)} \left[-(a-r)^2 b_1(t) - (r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X^0(t) \right] dt - \\ &- \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X^0(t)] dW(t). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Теорема 1. Среднее значение капитала $\bar{X}(t) = M\{X^0(t)\}$ определяется уравнением

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \left[r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \right] \bar{X}(t) - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1(t)}{b_2(t)}, \quad (7)$$

решение которого имеет вид

$$\bar{X}(t) = \left[\chi \left(\ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{d} + 1}{\sqrt{d} - 1} \right| \right) + \bar{X}_0 \right] e^{-\beta t}, \quad (8)$$

где

$$\chi = \frac{\bar{X}_0 (r^2 - \beta^2) [2\beta - (\mu - \beta + 1)(\mu + \beta) e^{(\mu - \beta)t_1}]}{4\beta(\mu^2 - \beta^2) \sqrt{r - \beta + 1}} \times e^{-\frac{(r-\beta)t_1}{2}}, \quad (9)$$

$$d = b_2^2 / b_1^2, \quad \beta = [(a-r)^2 / \sigma^2] - r. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть процесс $X^0(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX^0(t) = f(t, X^0(t)) dt + \Phi(t, X^0(t)) dW(t). \quad (11)$$

Тогда, согласно (6) из [1]

$$\begin{aligned} f(t, X^0(t)) dt &= \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)} \times \\ &\times [-(a-r)^2 b_1(t) + (r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X^0(t)]. \quad (12) \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (11) получаем

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_0^t \Phi(\tau, X(\tau)) W(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) = M\{X^0(t)\} &= \bar{X}_0 + \int_0^t M\{f(\tau, X(\tau))\} d\tau + \\ &+ M\left\{ \int_0^t \Phi(\tau, X(\tau)) W(\tau) d\tau \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Поскольку математическое ожидание от стохастического интеграла равно нулю [7], из (12) следует, что

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_0 + \int_0^t M\{f(\tau, X^0(\tau))\} d\tau. \quad (14)$$

Использование (12) дает, что

$$\begin{aligned} M\{f(\tau, X^0(\tau))\} &= \\ &= \left[r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \right] \bar{X}(t) - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1(t)}{b_2(t)}. \quad (15) \end{aligned}$$

Подстановка (15) в (14) дает, что

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= \\ &= \bar{X}_0 + \int_0^t \left[r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \right] \bar{X}(\tau) - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1(\tau)}{b_2(\tau)} d\tau. \quad (16) \end{aligned}$$

Дифференцирование (16) приводит к (7).

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \left[r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \right] \bar{X}(t)$$

с учетом того, что $(a-r)^2 / \sigma^2 = \beta + r$, имеет вид [8]

$$\bar{X}(t) = C(t) e^{-\beta t}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (7), получим уравнение для нахождения $C(t)$ в виде $\frac{dC(t)}{dt} = -(\beta + r) \frac{b_1(t)}{b_2(t)} e^{\beta t}$, общее решение которого имеет вид

$$C(t) = \chi \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right| + C_1, \quad (18)$$

где χ определено в (9). Подставляя (18) в (17), получаем общее решение уравнения (7) в виде

$$\bar{X}(t) = C_1 e^{-\beta t} + \chi e^{-\beta t} \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right|. \quad (19)$$

Константа C_1 находится из граничного условия $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$:

$$C_1 = \bar{X}_0 + \chi \ln \left| \frac{\sqrt{d} + 1}{\sqrt{d} - 1} \right|. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (18) приводит к (8). Теорема доказана.

Утверждение 2. Математическое ожидание квадрата капитала $\bar{X}^2(t) = M\{[X^0(t)]^2\}$ определяется уравнением

$$\frac{d\bar{X}^2(t)}{dt} = \left[2r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \right] \bar{X}^2(t) + \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1^2(t)}{b_2^2(t)}, \quad (21)$$

решение которого имеет вид

$$\bar{X}^2(t) = \bar{X}_0^2 e^{(r-\beta)t}. \quad (22)$$

Доказательство. Введем процесс $\varphi(X^0(t)) = [X^0(t)]^2$ и применим к данному процессу формулу Ито [7]

$$\begin{aligned} d\varphi(X(t)) &= \frac{\partial \varphi(X^0(t))}{\partial X^0(t)} dX(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(X(t))}{\partial [X^0(t)]^2} \Phi(t, X^0(t)) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда, согласно (6)

$$\Phi(t, X^0(t)) = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2 b_2^2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X^0(t)]^2,$$

$$\frac{\partial \varphi(X^0(t))}{\partial X(t)} = 2X^0(t), \quad \frac{\partial^2 \varphi(X(t))}{\partial X^2(t)} = 2. \quad (24)$$

Подстановка (24) в (23) приводит к уравнению для процесса $[X^0(t)]^2$ в виде

$$\begin{aligned} d[X^0(t)]^2 &= 2r[X^0(t)]^2 dt + \\ &+ \left[\frac{(a-r)^2 b_1^2(t)}{\sigma^2 b_2^2(t)} - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} [X^0(t)]^2 \right] dt - \\ &- \frac{2(a-r)[b_1(t) - b_2(t) X^0(t)] X^0(t)}{\sigma b_2(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда уравнение (21) следует из (25) аналогично тому, как было получено уравнение (7).

Найдем решение ур. (21). Согласно [8] общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами $dy(t)/dt = -p(t)y(t) + q(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t p(\xi) d\xi \right\} \times \\ &\times \left[\int_0^t q(\xi) \exp \left\{ \int_0^\xi p(s) ds \right\} d\xi + C \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда из (21), (26) следует, что

$$\bar{X}^2(t) = e^{(r-\beta)t} \left(C + (\beta+r) \int_0^t \frac{b_1^2(\xi)}{b_2^2(\xi)} e^{(\beta-r)\xi} d\xi \right). \quad (27)$$

Используя (31), (32), (35)–(37) из [1] и формулу [9]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-px}}{(e^{qx} + z)^n} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(n-1)!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)^{n-1} (-z)^k}{(p + qk + qn)^\alpha},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, которая имеет вид

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \text{в (27), получаем общее решение уравнения (21) в виде}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}^2(t) &= e^{(r-\beta)t} \times \\ &\times \left(C + (\beta+r) \frac{\bar{X}_0^2 (r-\beta)^2}{(\mu-\beta)^2 (r-\beta+1)^2} \times \right. \\ &\times \left. \left[e^{-2(r-\beta)t_1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(\beta-r-2\mu) + (\beta-r)k} - \right. \right. \\ &- 2(\mu-\beta+1)e^{2(\mu+\beta-2r)t_1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(-r-\mu) + (\beta-r)k} + \\ &+ (\mu-\beta+1)^2 e^{2(\mu-r)t_1} \times \\ &\times \left. \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(\beta-r) + (\beta-r)k} \right] \left. \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Константа в (21) находится из граничного условия $X(t_0) = X_0$:

$$\begin{aligned} C &= \bar{X}_0^2 - (\beta+r) \frac{\bar{X}_0^2 (r-\beta)^2}{(\mu-\beta)^2 (r-\beta+1)^2} \times \\ &\times \left[e^{-2(r-\beta)t_1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(\beta-r-2\mu) + (\beta-r)k} - \right. \\ &- 2(\mu-\beta+1)e^{2(\mu+\beta-2r)t_1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(-r-\mu) + (\beta-r)k} + \\ &+ (\mu-\beta+1)^2 e^{2(\mu-r)t_1} \times \\ &\times \left. \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+1)d^k}{(\beta-r) + (\beta-r)k} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Подстановка (29) в (28) приводит к (22). Теорема доказана.

Теорема 2. Дисперсия капитала $D(t) = \bar{X}^2(t) - (\bar{X}(t))^2$ определяется уравнением

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{2[r\sigma^2 - (a-r)^2]}{\sigma^2} D(t) + \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \left[\bar{X}^2(t) + 2 \frac{b_1(t)}{b_2(t)} \bar{X}(t) + \frac{b_1^2(t)}{b_2^2(t)} \right], \quad (30)$$

решение которого имеет вид

$$D(t) = (e^{(r-\beta)t} - 1) \bar{X}_0^2 + \chi e^{-\beta t} \times \left\{ \left[\bar{X}_0 - 2\chi e^{-\beta t} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{d} + 1}{\sqrt{d} - 1} \right| \right) \right] \ln \left| \frac{\sqrt{d} + 1}{\sqrt{d} - 1} \right| + \right. \\ \left. + \left[2\bar{X}_0 - \chi e^{-\beta t} \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right| \right] \ln \left| \frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)t}{2}}} \right| \right\}, \quad (31)$$

где χ и d определены в (9), (10).

Доказательство. Так как

$$\frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt} = 2\bar{X}(t) \frac{d\bar{X}(t)}{dt},$$

то с учетом (7) получаем

$$\frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt} = 2 \frac{[r\sigma^2 - (a-r)^2]}{\sigma^2} (\bar{X}(t))^2 - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} \frac{b_1(t)}{b_2(t)} \bar{X}(t). \quad (32)$$

Так как

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{d\bar{X}^2(t)}{dt} - \frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt}, \quad (33)$$

то уравнение (30) следует в результате использования (21) и (32) в (33).

Так как $D(t) = \bar{X}^2(t) - (\bar{X}(t))^2$, то формула (31) следует из (8), (22). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дёмин Н.С., Рожкова С.В., Цитко А.В. Применение математического метода динамического программирования к решению одной задачи управления портфелем ценных бумаг // Известия Томского политехнического университета – 2006. – Т. 309. – № 3. – С. 10–14.
2. Modigliani F., Miller M. The cost of capital, corporation finance and theory of investment // American Economic Review. – 1958. – № 6. – P. 261–297.
3. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – March. – P. 77–91.
4. Markowitz H. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. – Cambridge, Massachusetts: Blackwell, 1990. – 387 p.

3. Обсуждение результатов

Поскольку зависимости среднего значения капитала, определяемого формулой (8), и дисперсии капитала, определяемой формулой (31), от параметров постановки задачи являются сложными, то исследовать свойства решения возможно только численно. Анализ численных результатов привел к следующим выводам.

1. В случае равенства доходностей рискового и безрискового активов и эталонного портфеля, т. е. если $a=r=\mu$, среднее значение капитала $\bar{X}(t)$ и стоимость эталонного портфеля $Y(t)$ совпадают.
2. В случае, если $\mu > a-r$, среднее значение капитала и стоимость эталонного портфеля не совпадают и при этом $Y(t) > \bar{X}(t)$.
3. В случае, если $\mu < a-r$, среднее значение капитала и стоимость эталонного портфеля не совпадают и при этом $Y(t) < \bar{X}(t)$.
4. При увеличении волатильности σ цены рискового актива $S(t)$ хаотичность траектории величины капитала оптимального портфеля $X^*(t)$ возрастает.
5. Дисперсия капитала оптимального портфеля $D(t)$ является возрастающей функцией времени. Содержательная интерпретация указанных свойств очевидна. Результаты данной работы совместно с результатами работы [1] представляют законченное исследование.

Выводы

Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменения во времени среднего значения и дисперсии капитала оптимального портфеля, из которых получены точные формулы для среднего значения и капитала. Проведено исследование свойств решения путем численных расчетов.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 02.740.11.5190.

Поступила 03.11.2010 г.