К НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ГАЗА ВЛАСОВА-ПУАССОНА

КисатовМ. А., ГубаревЮ. Г.
Томский политехнический университет
kisatov@mail.ru

Введение

Математическая модель Власова-Пуассона описывает динамику точечных масс в самосогласованном гравитационном поле [1]. Например, эта модель описывает скопления звезд в галактиках [2]. Для состояний динамического равновесия уже известно достаточное условие устойчивости, однако, ещё не было показано, что оно является необходимым (ни для малых возмущений, ни, тем более, для конечных).

Кинетические уравнения имеют связь с уравнениями гидродинамического типа, для которых, в свою очередь, существует метод доказательства необходимости достаточного условия устойчивости стационарных течений, которые эквивалентны состояниям равновесия.

Рассматриваются чисто радиальные движения частиц. В отличие от предыдущих трудов, где рассматривались поперечные по отношению к направлению вдоль радиуса сечения, будут рассматриваться продольные относительно траектории движения частиц [2].

Цель данной работы – доказать абсолютную линейную неустойчивость сферически симметричных состояний динамического равновесия газа Власова-Пуассона.

Постановка задачи

Изучаются радиальные движения бесконечного бесстолкновительного самогравитирующего газа Власова-Пуассона нейтральных частиц в сферической системе координат. Рассматриваемый безграничный бесстолкновительный самогравитирующий газ описывается системой кинетических уравнений Власова-Пуассона в сферической системе координат:

$$f_t + v f_r - U_r f_v = 0$$

$$(r^2 U_r)_r = 16\pi^2 r^2 \int_0^\infty f(r, v, t)\, v^2 dv$$

Начальные условия начально-краевой задачи:

$$f(r, v, 0) = f_0(r, v), \qquad f = f(r, v, t) \geq 0$$

$$t \in [0, +\infty), \qquad r, v \in [0, +\infty)$$

Граничные условия начально-краевой задачи:

$f \longrightarrow 0$ при $v \longrightarrow \infty$

$f, U \longrightarrow 0$ при $r \longrightarrow \infty$ либо периодичны

Где, $f -$ неотрицательная функция распределения частиц, затухающая на бесконечности;

$U -$потенциал самогравитирующего поля;

$r, v -$радиальные координаты частицы, радиус и скорость соответственно.

Ход доказательства

Хотим обратить уже известное достаточное условие устойчивости состояний равновесия по отношению к малым возмущениям той же симметрии:

$$\frac{d\left(U^0 + \frac{v^2}{2}\right)}{df^0} \geq 0 \; (1)$$

Т. е. хотим показать, что условие (1) является также и необходимым. Однако, неизвестно, как это сделать в кинетическом описании, поэтому, выполняется переход к уравнениям гидродинамического типа. Для перехода к гидродинамическим уравнениям используется замена Захарова [3]. Таким образом, мы переписываем нашу начально-краевую задачу в терминах гидродинамических уравнений.

Для начально-краевой задачи гидродинамического типа также известно достаточное условие устойчивости:

$$\frac{d}{d\varkappa^0}\left(\frac{{u^0}^2}{2} + U^0\right) \geq 0 \; (2)$$

Однако условие (2) справедливо не для всех возмущений, а именно для тех, для которых выполняется асимптотика:

$$\iint_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(u^0 \varkappa^0 {u'}^2\right) d\vartheta dr \longrightarrow 0 \; (3)$$

Поскольку замена Захарова, с помощью которой производился переход от кинетических описания к гидродинамическому, - невырожденная и взаимо однозначная, то свойства решений кинетического описания и гидродинамического должны совпадать, однако, для уравнений кинетического типа существует достаточное условие устойчивости (1), а для уравнений гидродинамического типа условие (2) является достаточным условием устойчивости, если выполняется условие (3). Асимптотика (3), в свою очередь, образует неполный незамкнутый подкласс возмущений, поэтому появляются основания полагать, что решения рассматриваемой начально-краевой задачи абсолютно неустойчивы.

Чтобы подтвердить данное предположение, рассматривается подкласс возмущений, описываемый полем лагранжевых смещений.

После рассмотрения начально-краевой задачи в новой постановке становится ясно, что её решения абсолютно неустойчивы. Далее, наша следующая цель – описать рост возмущений. Для достижения этой цели в терминах поля лагранжевых смещений рассматривается вспомогательный функционал :

$$M = 16\pi^2 \iint_0^\infty \rho^0 \xi^2 d\vartheta dr$$

Затем для параметра $\lambda > 0$ выводится основное дифференциальное неравенство [4], содержащее вышеописанный функционал M, его первую и вторую производные:

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2(\lambda^2 + \alpha)M \geq 0 \ (4)$$

Неравенство (4), выведенное моим научным руководителем Губаревым Ю.Г. ,представляет собой линейное дифференциальное неравенство с постоянными коэффициентами. Неравенство (4) может быть дополнено счетным набором условий:

$$\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) > 0; \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \equiv M(0)exp\left(\frac{\pi n\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \ (5)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)exp\left(\frac{\pi n\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right)$$

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M(0)$$

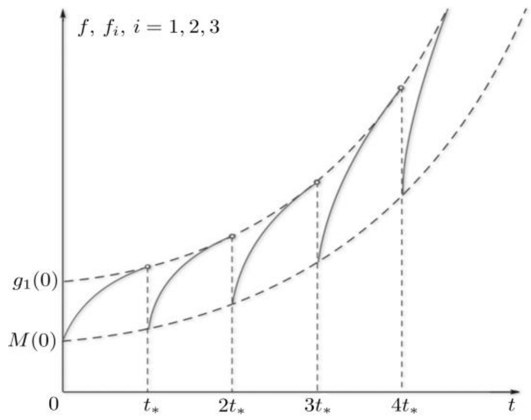
При выполнении условий (5) из основного дифференциального неравенства (4) вытекает априорная экспоненциальная оценка снизу:

$$M(t) \geq Cexp(\lambda t), \qquad C = const > 0$$

Эта оценка указывает на тот факт, что функционал M растёт не медленнее, чем экспоненциально, таким образом, цель задачи достигнута, а именно, описан рост возмущений.

Поскольку данная оценка выведена без каких бы то ни было дополнительных ограничений на изучаемое состояние равновесия, то, тем самым, как раз и доказана абсолютная линейная неустойчивость исследуемых радиальных состояний динамического равновесия газа Власова-Пуассона относительно изучаемых возмущений того же типа симметрии.

Также рост возмущений предлагается посмотреть на рисунке:



Заключение

Первые два условия из (5) могут трактоваться как достаточные условия линейной практической неустойчивости. Таким образом, если эти условия выполняются, то исследуемое течение развивается в неустойчивом режиме, если же эти условия нарушаются, течение развивается в устойчивом режиме. Кроме того, в силу произвольности $\lambda > 0$, можно утверждать, что относительно малых возмущений в форме нормальных волн, условия (5) являются также и необходимым.

Установленным здесь достаточным условиям линейной практической неустойчивости (5) присуща конструктивность, позволяющая применять их в качестве механизма тестирования и контроля при проведении физических экспериментов и выполнении численных расчетов. Более того, условия (5) могут трактоваться как численная процедура, которая построена без дискретизации соответствующих определяющих дифференциальных уравнений. Данный факт говорит о том, что с помощью условий неустойчивости (5) можно получать численные результаты, по степени своей точности, надежности и достоверности ни в чем не уступающие отвечающим им аналитическим результатам. Таким образом, впервые в истории стираются всякие различия между численными и аналитическими результатами.

Список использованных источников

1. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001
2. Полянченко В.Л. Фридман А.М. Равновесия и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976
3. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия М.: Мир, 1973
4. Губарев Ю.Г. критерий линейной устойчивости установившихся тичений идеальной жидкости// С. 429-441