ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ

Павленко Д.А., Салиева К.Р., Долотова Р.Г.
Томский политехнический университет
vegust@tpu.ru dolot63@mail.ru

Введение

Задание поверхности в пространстве и на чертеже является одним из основных вопросов, возникающих при конструировании, исследовании и обработке технических поверхностей. Анализ закона образования поверхности имеет своей целью выделение ее определителя – совокупность условий, задающих поверхность. Определитель состоит алгоритмической и геометрической частей. Алгоритмическая часть определителя представляет собой алгоритм построения точек и линий поверхности, занимающих на ней переменное положение. В геометрическую часть определителя входят геометрические образы и параметры постоянной формы, положения и величины. [1]. В качестве геометрической части определителя поверхности можно назначить некоторый е дискретный каркас.

Параметрический метод конструирования

При конструировании каркасных поверхностей встречается необходимость заранее задавать в координатной плоскости непрерывные однопараметрические семейства линий. Существуют различные методы конструирования таких множеств линий. Один из распространенных - параметрический метод решения этой задачи. Так же, как это имеет место в случае поверхностей, всякая кривая линия определяется некоторой совокупностью условий; часть этих условий состоит из геометрических образов постоянного положения и постоянных величин, вторая часть условий определяет способ построения текущих точек по фигуре постоянных элементов. Совокупность условий, определяющих кривую, называется ее определителем. Геометрические образы постоянного положения называются геометрической частью определителя кривой. Способ построения текущих точек кривой называется алгоритмической частью ее определителя. Например, окружность определяется положением центра и величиной радиуса. Это - геометрическая часть ее определителя. Алгоритмическая часть определителя окружности включает в себя способ построения точек, отстоящих от ее центра на расстоянии, равном величине радиуса.

Параметры, определяющие геометрическую часть определителя кривой, входят в ее уравнение, а алгоритмическая часть определителя задается последовательностью операций над этими параметрами и координатами точек, задаваемую уравнением кривой. Например, конхоида Никомеда определяется следующим образом. На расстоянии, равном a от оси y, проводят ей параллельную прямую m и задают величину некоторого отрезка l. Через начало координат проводят все возможные прямые n. На этих прямых от точек M их пересечения с прямой m откладывают отрезки $MN = l$. Точки образуют конхоиду. В уравнение (1) кривой входят два параметра a и l . Оно имеет вид:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - lx^2 = 0 \quad (1)$$

Параметры геометрической части определителя кривой делятся на параметры положения и параметры формы; изменение первых приводит лишь к изменению положения кривой относительно системы координат, изменение вторых влечет за собой изменение формы кривой [2].

Прямая линия не имеет параметров формы, она имеет лишь два параметра положения. Окружность имеет один параметр формы (величина радиуса) и два параметра положения (координаты центра). Все остальные кривые имеют три параметра положения и в зависимости от способа их образования - один или несколько параметров формы. Общее число параметров кривой называется ее параметрическим числом. Например, парабола представляет собой четырехпараметрическую кривую. Конхоида Никомеда – пятипараметрическая кривая, имеющая три параметра положения и два параметра формы. Два параметра положения кривой определяют ее параллельный перенос на некоторый вектор, третий параметр определяет ее вращение вокруг точки.

Параметрический метод конструирования однопараметрических семейств кривых.

Кривая задается ее уравнением. В это уравнение входят параметры положения и формы. Выбираем один из них и, зафиксировав значения всех остальных параметров, подвергаем его непрерывным изменениям. Если изменяется параметр наложения, кривая будет перемещаться без изменения формы. Если изменяется параметр формы, кривая будет изменять свою форму. И в том и в другом случае исходная кривая размножится в непрерывное однопараметрическое семейство. Непрерывному изменению можно подвергать и несколько или даже все параметры уравнения кривой. Чтобы получить при этом однопараметрическое семейство, необходимо на изменяющиеся параметры наложить соответствующее число связей. Заметим, что при некоторых способах изменения параметров мы можем получать семейства мгновенно-соответственных кривых некоторых преобразований. Например, при изменении величины радиуса окружности мы получаем мгновенно-подобные кривые, при изменении величины одной полуоси эллипса - мгновенно-родственные кривые [3].

Примеры конструирования однопараметрических семейств кривых.

Прямая линия задается уравнением (2)

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где k - тангенс угла наклона прямой k оси x b - отрезок, отсекаемый ею на оси y .

Зафиксируем значение параметра k . Тогда всевозможным значениям b будет соответствовать множество параллельных прямых, заполняющих плоскость (рис. 1, а). Можно поступить иначе: зафиксировать (рис. 1, б) значение параметра b. Тогда всевозможным значениям параметра b будет соответствовать множество прямых пучка.

Однопараметрическое множество прямых можно получить как множество касательных к некоторой кривой (рис. 1, в). Если в качестве кривой будет взята окружность с центром в начале координат, то множество касательных задается уравнением (3)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0, \quad (3)$$

где r - радиус окружности,
α - переменный параметр

В общем случае (рис. 1, г), когда кривая задана уравнением $y = f(x)$, уравнение (4) множества касательных запишется:

$$r - y_i = \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \ (x - x_i)_i \quad (4)$$