

Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 519.179.1

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДРЕВОВИДНОЙ ШИРИНЫ ГИПЕРГРАФА

В.В. Быкова

Институт математики Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: bykvalen@mail.ru

Рассматривается NP-трудная задача отыскания древовидной ширины гиперграфа. Предлагаются полиномиальные по времени рекуррентные методы предобработки гиперграфа, позволяющие снизить размерность этой задачи без потери оптимальности.

Ключевые слова:

Гиперграфы, дерево декомпозиции, древовидная ширина, ацикличность.

Key words:

Hypergraphs, tree decomposition, treewidth, acyclicity.

Древовидная ширина — числовой параметр гиперграфа, характеризующий меру его древовидности. Широкий интерес к изучению древовидной ширины гиперграфа вызван тем, что многие NP-трудные задачи комбинаторной оптимизации, возникающие в различных приложениях, в том числе при проектировании электронной аппаратуры, моделировании надежности и безопасности компьютерных и коммуникационных систем, полиномиально разрешимы, если модельный гиперграф имеет ограниченную древовидную ширину. В этих условиях оптимизационная задача может быть решена методом динамического программирования, причем алгоритмическая эффективность достигается за счет разложения модельного гиперграфа на части с помощью дерева декомпозиции [1]. С вычислительной точки зрения весьма сложно установить, имеет ли заданный произвольный гиперграф ограниченную древовидную ширину, и построить для него требуемое дерево декомпозиции. Доказана NP-трудность этой задачи [2, 3]. Поэтому актуальны методы предварительной обработки (предобработки) гиперграфа, позволяющие снизить размерность задачи без потери оптимальности. Про такие методы говорят, что они безопасны относительно того или иного числового параметра графа или гиперграфа [1]. В работе предложены два рекуррентных и безопасных метода предобработки гиперграфа для вычисления древовидной ширины.

1. Гиперграф и ассоциированные с ним обыкновенные графы

Введем необходимые понятия и обозначения [4–7]. Пусть задан (n, m) -гиперграф $H = (X, U)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечное непустое множество вершин и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — конечное непустое семейство ребер этого гиперграфа. В общем случае всякое ребро гиперграфа является некоторым подмножеством множества X . Пусть $U(x)$ — множество ребер, инцидентных в H вершине $x \in X$, а $X(u)$ — множество всех вершин, инцидентных ребру $u \in U$. Тогда число $|U(x)|$ определяет степень вершины x , а число $|X(u)|$ — степень ребра u . Элемент гиперграфа степени 0 считают голым, степени 1 — висячим. Две вершины $x_1, x_2 \in X$ смежные в H , если существует ребро $u \in U$ такое, что $x_1, x_2 \in X(u)$. Аналогичным образом, два ребра $u_1, u_2 \in U$ смежные в H , если $X(u_1) \cap X(u_2) \neq \emptyset$. Подмножество множества вершин гиперграфа H образует клику, если две любые вершины этого подмножества смежные в H . Два ребра $u, v \in U$ кратные, если $X(u) = X(v)$. Ребро u вложено в ребро v , когда $X(u) \subset X(v)$. Ранг гиперграфа $H = (X, U)$ — максимальная степень его ребра: $r(H) = \max\{|X(u)|, u \in U\}$. Гиперграф минимальный, если он не содержит голых элементов, вложенных и кратных ребер. Далее везде H_μ — результат минимизации гиперграфа H .

Всякий непустой гиперграф $H = (X, U)$ однозначно определяется своим кениговым представлением — двудольным графом $K(H)$, отражающим отно-

шение инцидентности элементов гиперграфа, с множеством вершин $X \cup U$ и долями X , U . Гиперграф H считается связным, если связан граф $K(H)$. Компоненты связности графа $K(H)$ порождают части гиперграфа H , называемые его компонентами связности.

Пусть $H(X-S)$ задает часть гиперграфа $H=(X,U)$, индуцированную множеством $X-S$, т. е. полученную из H слабым удалением всех вершин $x \in S \subseteq X$. Напомним, что слабое удаление вершины $x \in X$ из $H=(X,U)$ предполагает удаление этой вершины из X и из всех ребер $u \in U(x)$. Множество вершин S связного гиперграфа H – сепаратор, если гиперграф $H_\mu(X-S)$ несвязен. Сепаратор минимальный, если он не содержит в себе другой сепаратор меньшей мощности. Пусть для пары ребер $u_i, u_j \in U$, $1 \leq i < j \leq m$, гиперграфа $H=(X,U)$ множество $S=X(u_i) \cap X(u_j) \neq \emptyset$ определяет сепаратор. Тогда S называют множеством сочленения гиперграфа H . Очевидно, что каждое множество сочленения образует в H сепаратор клику. Блоком связного гиперграфа H называют любую его часть $H_\mu(Y)$, $Y \subseteq X$, в которой нет множества сочленения. Блок тривиальный, если он состоит только из одного ребра.

С гиперграфом H принято ассоциировать графы смежности $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$. Граф $L^{(2)}(H)$ представляет отношение смежности вершин гиперграфа. В частности, если H – обыкновенный граф, то $L^{(2)}(H)=H$. Граф $L^{(2)}(H)$ отражает информацию обо всех кликах гиперграфа H : каждая клика гиперграфа H – клика графа $L^{(2)}(H)$ и наоборот, любая клика графа $L^{(2)}(H)$ – клика этого гиперграфа. Заметим, что для всякого ребра $u \in U$ гиперграфа $H=(X,U)$ множество $X(u)$ порождает клику в $L^{(2)}(H)$, однако обратное верно только тогда, когда гиперграф H комплектный. Гиперграф H комплектный, если каждой максимальной клике графа $L^{(2)}(H)$ отвечает некоторое ребро этого гиперграфа.

Граф $L(H)$ называют реберным графом для H , поскольку он задает отношение смежности ребер этого гиперграфа. Граф $L(H)=(U,E)$ полагают помеченным, если всякому его ребру $\{u_i, u_j\} \in E$ поставлена в соответствие метка $f_{ij}=X(u_i) \cap X(u_j) \neq \emptyset$, $1 \leq i < j \leq m$. Число $|f_{ij}|$ рассматривают как вес ребра $\{u_i, u_j\}$. Граф $L(H)$ с такими весами именуют взвешенным реберным графом гиперграфа H . Граф $L(H)$ – источник информации обо всех множествах сочленения гиперграфа H : произвольному множеству сочленения $S=X(u_i) \cap X(u_j)$ гиперграфа H соответствует некоторое ребро $\{u_i, u_j\} \in E$ графа $L(H)=(U,E)$, но обратное не всегда верно. Примечательно, что графы $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$ – миноры кенигова представления $K(H)$, т. к. могут быть получены из него путем операции стягивания надлежащих ребер. Поскольку данная операция никогда не нарушает связности графа, то для гиперграфа H ассоциированные с ним графы $K(H)$, $L^{(2)}(H)$ и $L(H)$ либо все одновременно связные, либо несвязные. Не нарушая общности, далее в качестве исходных гиперграфов будем рассматривать только минимальные и связные гиперграфы.

2. Дерево декомпозиции и древовидная ширина гиперграфа

С гиперграфом связана еще одна графовая структура, именуемая деревом декомпозиции. Под деревом декомпозиции гиперграфа $H=(X,U)$ принимают пару (M,T) , задающую разбиение вершин и ребер гиперграфа H , где $M=\{X_i, i \in I\}$ – семейство непустых подмножеств множества X , называемых «мешками», $T=(I,W)$ – дерево, узлам которого сопоставлены эти «мешки». Данное разбиение удовлетворяет свойствам [1]:

- 1) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$;
- 2) если $u \in U$, то в T всегда существует узел $i \in I$ такой, что $X(u) \subseteq X_i$, т. е. для всякого ребра гиперграфа всегда существует хотя бы один «мешок», содержащий все вершины этого ребра;
- 3) для любой вершины гиперграфа $x \in X$ множество узлов $\{i \in I | x \in X_i\}$, «мешки» которых содержат вершину x , индуцирует поддерево дерева T .

Ширина дерева декомпозиции (M,T) – наибольшая вместимость его «мешка», уменьшенная на единицу: $\max\{|X_i|-1, i \in I\}$. Древовидная ширина гиперграфа H определяется как наименьшая ширина всех возможных деревьев декомпозиции, существующих для H , и обозначается через $tw(H)$. Дерево декомпозиции ширины $tw(H)$ принято называть оптимальным деревом декомпозиции гиперграфа H .

Заметим, что для каждого связного (n,m) -гиперграфа множество возможных деревьев декомпозиции не пусто. Например, постоянно существует тривиальное дерево декомпозиции ширины $n-1$, которое состоит из одного «мешка», содержащего все n вершин гиперграфа. Конечно, такое дерево декомпозиции чаще всего неоптимальное. В общем случае, гиперграф H может иметь несколько различных оптимальных деревьев декомпозиции ширины $tw(H)$. Если рассматривать только (M,T) без кратных и вложенных «мешков», то для любого (n,m) -гиперграфа множество деревьев декомпозиции конечно. В этих условиях задача построения оптимального дерева декомпозиции для связного гиперграфа H всегда имеет решение. Если граф H несвязен, то полагают $tw(H)=0$. Следовательно, числовой параметр $tw(H)$ может быть вычислен для любого гиперграфа H . Из определений дерева декомпозиции (M,T) и древовидной ширины гиперграфа H вытекает справедливость следующих лемм.

Лемма 1. Всегда $r(H)-1 \leq tw(H)$, $0 \leq tw(H) \leq n-1$ и $tw(H) \leq tw(H_\mu)$. Если гиперграф H связан, то $1 \leq tw(H) \leq n-1$ и $tw(H)=tw(H_\mu)$.

Лемма 2. Для части $H'=H(Y)$ гиперграфа $H=(X,U)$, индуцированной множеством $Y \subseteq X$, верно неравенство: $tw(H') \leq tw(H)$.

Лемма 3. Пусть (M,T) – дерево декомпозиции гиперграфа $H=(X,U)$. Тогда если множество вершин $Y \subseteq X$ образует в H клику, то в T существует узел $i \in I$ такой, что $Y \subseteq X_i$, т. е. любая клика гиперграфа H (значит, и $L^{(2)}(H)$) всегда целиком вложена в отдельный «мешок» дерева декомпозиции (M,T) и возможно не в один.

Лемма 4. Пусть (M, T) – дерево декомпозиции гиперграфа $H=(X, U)$, $w=\{i, j\} \in W$ – ребро дерева $T=(I, W)$, A и B – множества узлов двух компонент связности графа $T=(I, W-w)$. Тогда пересечение соответствующих «мешков» $S=X_i \cap X_j$ образует сепаратор гиперграфа H при условии, что $(\cup_{i \in A} X_i) - S \neq \emptyset$ и $(\cup_{j \in B} X_j) - S \neq \emptyset$.

Таким образом, дерево декомпозиции гиперграфа H – это графовая структура, которая не только определяет древовидную ширину гиперграфа, но также содержит информацию о его сепараторах и кликах. Что касается сепараторов, то дерево декомпозиции (M, T) гиперграфа H информативнее, чем его реберный граф $L(H)$, поскольку последний представляет лишь множества сочленения, т. е. сепараторы клики. Между тем, не всякий сепаратор гиперграфа H есть клика. С точки зрения клик и $tw(H)$, дерево декомпозиции (M, T) гиперграфа H эквивалентно по информативности графу $L^{(2)}(H)$. Об этом свидетельствует

Следствие 1. Всякое дерево декомпозиции гиперграфа H является деревом декомпозиции графа $L^{(2)}(H)$ и наоборот, любое дерево декомпозиции графа $L^{(2)}(H)$ задает дерево декомпозиции гиперграфа H . Кроме того, $tw(H)=tw(L^{(2)}(H))$.

Доказательство. Пусть (M, T) – дерево декомпозиции гиперграфа $H=(X, U)$. Каждое ребро $\{x_i, x_j\}$ графа $L^{(2)}(H)$ соответствует двум вершинам $x_i, x_j \in X$, которые смежны как в $L^{(2)}(H)$ так и в H . Это значит, что в H существует ребро $u \in U$, которое содержит обе эти вершины: $x_i, x_j \in X(u)$. Поскольку множество $X(u)$ по определению вложено в некоторый «мешок» дерева декомпозиции (M, T) , то этому «мешку» принадлежат также вершины ребра $\{x_i, x_j\}$ графа $L^{(2)}(H)$. Два других свойства дерева декомпозиции графа $L^{(2)}(H)$ непосредственно следуют из идентичных свойств дерева декомпозиции (M, T) гиперграфа H . Справедливость обратного утверждения следствия 1 вытекает из леммы 3, которая верна для любого гиперграфа, том числе и тогда когда он вырождается в обыкновенный граф. Действительно, при $u \in U$ множество вершин $X(u)$ образует в $L^{(2)}(H)$ клику и эта клика по лемме 3 вложена в некоторый «мешок» дерева декомпозиции графа $L^{(2)}(H)$. Таким образом, в этом дереве декомпозиции существует «мешок», содержащий все вершины ребра $u \in U$.

3. Гиперграфы с ограниченной древовидной шириной

Значение величины $tw(H)$ характеризует меру древовидности гиперграфа H , и согласно леммам 3 и 4 определяет размеры его клик и сепараторов: чем меньше $tw(H)$, тем ближе гиперграф H к обычному дереву и тем меньше у него по мощности клики и сепараторы. В частности, все n -вершинные деревья ($n \geq 2$) имеют единичную древовидную ширину, размер всякой клики такого дерева равен 2, а каждый минимальный сепаратор – точка сочленения. Считается, что (n, m) -гиперграф H обладает ограниченной древовидной шириной, если $tw(H) \leq k$ и k – целая положительная константа,

не зависящая от n . Если $tw(H) \leq k$, то размеры клик и сепараторов в H также ограничены сверху константой k . Однако ограниченная древовидная ширина свойственна не всем гиперграфам. Так, если H – полный n -вершинный граф K_n , то $tw(K_n) = n-1$. Существуют отличные от K_n гиперграфы, для которых значение $tw(H)$ растет с увеличением n . Типичный образец – гиперграф H , для которого $L^{(2)}(H)$ – «сетка» – граф, составленный из правильных многогранников так, что любые два соседних многогранника имеют лишь одно общее ребро.

4. Проблема вычисления древовидной ширины

Согласно следствию 1 задача нахождения древовидной ширины гиперграфа H сводится к задаче определения древовидной ширины обыкновенного графа $L^{(2)}(H)$, ассоциированного с H и представляющего отношение смежности его вершин. Обе эти задачи являются NP-трудными. Между тем, существуют классы гиперграфов, для которых задача установления древовидной ширины полиномиально разрешима. Один из таких классов образуют гиперграфы, для которых граф $L^{(2)}(H)$ хордальный [3]. Более узкий класс составляют М-ациклические (их также называют α -ациклические) гиперграфы. Гиперграф H является М-ациклическим тогда и только тогда, когда он комплектный и граф $L^{(2)}(H)$ хордальный [7]. Напомним, что граф хордальный, если любой его простой цикл длины ≥ 4 обладает ребром, соединяющим две несмежные вершины этого цикла.

Уже сложилась традиция для вычисления древовидной ширины гиперграфа H переходить к графу $L^{(2)}(H)$ и применять алгоритмический багаж, разработанный для определения древовидной ширины обыкновенных графов [1]. К настоящему времени этот багаж включает в себя разнообразные инструменты. Во-первых, известны точные полиномиальные по времени алгоритмы нахождения древовидной ширины графа, основанные на методе динамического программирования и методе ветвей и границ. Во-вторых, разработаны FPT-алгоритмы (*Fixed-Parameter Tractable algorithms*), способные при фиксированном значении k за время $O(2^k n^{O(1)})$ дать ответ на вопрос, не превышает ли древовидная ширина n -вершинного графа значения k . В-третьих, найдены точные алгоритмы полиномиальной сложности для некоторых классов графов. В-четвертых, предложены различные схемы приближений и эвристические алгоритмы, позволяющие за полиномиальное время находить значения, близкие к истинному значению древовидной ширины графа. Большинство приближенных и эвристических алгоритмов опираются на свойства хордальных графов. Суть этих алгоритмов состоит в следующем: вначале по определенной стратегии или эвристике создается минимальная триангуляция заданного графа (минимальное пополнение его до хордального графа), затем находится дерево клик для минимальной триангуляции. Данное дерево определяет некоторое (не обяза-

тельно оптимальное) дерево декомпозиции исходного графа, а его ширина служит верхней оценкой древовидной ширины этого графа. К сожалению, такой подход вычисления древовидной ширины не учитывает всего многообразия структурных особенностей гиперграфа H , ведь граф $L^{(2)}(H)$ несет в себе лишь часть информации об H .

В настоящей работе предлагается использовать в полном объеме информацию о структуре исходного гиперграфа на этапе предварительной обработки. Вначале предобработка гиперграфа, а затем традиционный подход вычисления древовидной ширины через триангуляцию графа смежности вершин. Цель предобработки — за полиномиальное время безопасно (без потери оптимальности) снизить размерность задачи вычисления древовидной ширины гиперграфа. Далее представлены два рекуррентных метода предобработки гиперграфа для вычисления древовидной ширины. Первый метод основан на безопасном редуцировании гиперграфа с помощью алгоритма распознавания свойства М-ацикличности гиперграфа, а второй — на безопасном разложении гиперграфа множествами сочленения.

5. Безопасное редуцирование гиперграфа

Существуют различные определения свойства М-ацикличности гиперграфа; отдельные из них отражены в теореме 1.

Теорема 1 [4, 7]. Для связного гиперграфа $H=(X, U)$ следующие высказывания эквивалентны:

- 1) H является М-ациклическим гиперграфом;
- 2) H полный и его граф $L^{(2)}(H)$ хордальный;
- 3) для H имеется дерево соединений, которое есть остовное дерево наибольшего веса взвешенного реберного графа $L(H)$ и которое изоморфно дереву клик графа $L^{(2)}(H)$;
- 4) алгоритм Грэхема завершается успешно;
- 5) H не содержит нетривиальных блоков.

Высказывание 3 теоремы 1 указывает способ построения дерева декомпозиции М-ациклического гиперграфа H . В самом деле, пусть $L(H)=(U, E)$ — взвешенный реберный граф гиперграфа $H=(X, U)$ и T — остовное дерево для $L(H)$. Это остовное дерево T называется деревом соединений гиперграфа H , если для любой вершины гиперграфа $x \in X$ множество индексов $\{i \in I | x \in X(u_i), u_i \in U\}$ порождает в T связный подграф, образующий поддереву дерева T . Ясно, что дерево соединений отвечает всем требованиям дерева декомпозиции (M, T) гиперграфа H , если в качестве «мешков» рассматривать множества $X(u_i), u_i \in U$, т. е. полагать, что каждый «мешок» содержит вершины только одного ребра гиперграфа H . Отсюда с учетом следствия 1 и высказывания 3 теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Любое дерево соединений М-ациклического гиперграфа H является оптимальным деревом декомпозиции этого гиперграфа и $tw(H)=r(H)-1$.

Таким образом, если (n, m) -гиперграф H обладает свойством М-ацикличности и число его ребер

полиномиально зависит от числа вершин, то для него всегда можно построить оптимальное дерево декомпозиции за время $n^{O(1)}$. Для этого достаточно вначале создать взвешенный реберный граф $L(H)$, а затем найти в $L(H)$ остовное дерево наибольшего веса, используя надлежащие алгоритмы [5]. Распознать свойство М-ацикличности можно также за полиномиальное время с помощью алгоритма Грэхема [4]. Данный алгоритм редуцирует гиперграф H путем последовательного применения к H следующих операций: СУВ — слабое удаление висячих вершин; СУР — слабое удаление кратных и вложенных ребер — минимизация текущего гиперграфа. Пусть в результате редуцирования H получен гиперграф $red(H)$. Считается, что алгоритм Грэхема успешно завершен и H обладает свойством М-ацикличности, если $red(H)=(\emptyset, \emptyset)$. Доказано [4], что операции СУВ и СУР сохраняют связность редуцируемого гиперграфа, не разрушают все имеющиеся в нем блоки и не порождают новых блоков. Все это свидетельствует о наследственности свойства М-ацикличности относительно операций алгоритма Грэхема.

Исследуем, как влияют операции алгоритма Грэхема на древовидную ширину гиперграфа. Согласно лемме 1 для связного гиперграфа H всегда $tw(H)=tw(H_\mu)$, т. е. операция СУР не изменяет древовидной ширины этого гиперграфа. По лемме 2 слабое удаление произвольной вершины гиперграфа может приводить к уменьшению древовидной ширины. Однако операция СУВ предполагает слабое удаление лишь висячих вершин. Такие вершины постоянно имеются в минимальном М-ациклическом гиперграфе.

Лемма 5. Всякая висячая вершина гиперграфа $H=(X, U)$ — симплициальная вершина графа $L^{(2)}(H)$.

Доказательство. Напомним, что вершина обыкновенного графа считается симплициальной, если ее окрестность — клика. Окрестность симплициальной вершины неизменно отделяет ее от всех других вершин графа, не входящих в эту окрестность. Пусть $x \in X$ — висячая вершина гиперграфа $H=(X, U)$. Тогда в H существует ребро $u \in U$ такое, что $x \in X(u)$ и $U(x)=\{u\}$. Множество $S=X(u)-\{x\}$ образует клику в H , а также в $L^{(2)}(H)$. Значит, x — симплициальная вершина графа $L^{(2)}(H)$. Если предположить, что исходный минимальный гиперграф $H=(X, U)$ имеет $|U|=m>1$ ребер, то $S=X(u)-\{x\}$ задает минимальный сепаратор, отделяющий вершину x от всех вершин из $X-X(u)$ в H и $L^{(2)}(H)$. Примечательно, что обратное высказывание леммы 5 верно только тогда, когда симплициальная вершина — висячая вершина графа $L^{(2)}(H)$.

Теорема 2. Пусть $x \in X$ — висячая вершина гиперграфа $H=(X, U)$ такая, что $x \in X(u)$, $U(x)=\{u\}$ и $d=|X(u)|-1$. Пусть гиперграф $H'=H_\mu(X-x)$ получен из H слабым удалением вершины x с последующей его минимизацией. Тогда

$$tw(H)=\max\{d, tw(H')\}. \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку $d=|X(u)|-1$, то H содержит клику размера $d+1$. Отсюда по лемме 3 вер-

но неравенство: $d \leq tw(H)$. Исходя из лемм 1 и 2, $tw(H') \leq tw(H)$. Значит, $\max\{d, tw(H')\} \leq tw(H)$. Теперь достаточно доказать, что $tw(H) \leq \max\{d, tw(H')\}$. Пусть для $H' = H_\mu(X-x)$ построено оптимальное дерево декомпозиции (M', T') ширины $tw(H')$. Присоединим к нему два узла с «мешками» $X(u)$ и $S = X(u) - \{x\}$. Полученная пара (M, T) является деревом декомпозиции для H , поскольку $S = X(u) - \{x\}$ по лемме 5 образует минимальный сепаратор, отделяющий вершину x от вершин $X - X(u)$ в H и $L^{(2)}(H)$, и именно через этот сепаратор узел с «мешком» $X(u)$ присоединяется к (M', T') . Ширина дерева (M, T) составляет $\max\{d, tw(H')\}$. Следовательно, $tw(H) \leq \max\{d, tw(H')\}$.

Равенство (1) определяет рекуррентное соотношение для задачи вычисления древовидной ширины гиперграфа, согласно которому размерность задачи снижается слабым удалением из гиперграфа некоторой висячей вершины и минимизацией полученного гиперграфа. Если исследуемый гиперграф H обладает свойством М-ацикличности, то по теореме 1 последовательное применение к H равенства (1) дает пустой гиперграф $red(H)$ и оптимальное дерево декомпозиции для H может быть найдено, как остовное дерево наибольшего веса взвешенного реберного графа $L(H)$ или как дерево клик графа $L^{(2)}(H)$. Если $red(H) \neq (\emptyset, \emptyset)$, то далее к гиперграфу $red(H)$ надлежит применить традиционный подход вычисления древовидной ширины или подвергнуть его безопасному разложению множествами сочленения.

6. Безопасное разложение гиперграфа

Пусть гиперграф $H = (X, U)$ обладает множеством сочленения S . Обозначим через $Y_1, Y_2, \dots, Y_\tau$ области связности гиперграфа $H_\mu(X-S)$. Части $H_1, H_2, \dots, H_\tau$ гиперграфа H , как результат разбиения его множеством сочленения S , определим следующим образом: $H_i = H_\mu(X_i)$, где $X_i = Y_i \cup S$, $i \in I = \{1, 2, \dots, \tau\}$. Очевидно, что каждая часть H_i в качестве ребер имеет только ребра гиперграфа H причем те, которые инцидентны вершинам из $X_i \subset X$, т. е. H_i — подгиперграф гиперграфа H .

Теорема 3. Для произвольного множества сочленения S гиперграфа H верно равенство:

$$tw(H) = \max\{tw(H_i), i \in I\}. \quad (2)$$

Доказательство. Исходя из лемм 1 и 2, $tw(H_i) \leq tw(H)$ для любого $H_i = H_\mu(X_i)$, где $X_i = Y_i \cup S$, $i \in I$. Отсюда

$$\max\{tw(H_i), i \in I\} \leq tw(H). \quad (3)$$

Покажем теперь, что

$$tw(H) \leq \max\{tw(H_i), i \in I\}. \quad (4)$$

Предположим, что значение максимума в правой части (4) равно η . Тогда для каждого H_i можно построить дерево декомпозиции ширины не более η ($i \in I$). По лемме 3 в этом дереве обязательно найдется узел, «мешок» которого содержит сепаратор S , т. к. вершины этого сепаратора образуют в H_i клику. Дерево декомпозиции гиперграфа H может быть сформировано путем добавления в каждое де-

рево декомпозиции, построенное для H_i ($i \in I$), дополнительного узла с «мешком» S и «склеиванием» данных деревьев посредством этого дополнительного узла. Несомненно, что ширина результирующего дерева декомпозиции не будет превышать η . Таким образом, из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) определяет рекуррентное соотношение для вычисления древовидной ширины гиперграфа H через его части, полученные разделением H множеством сочленения. Последовательное применение к H равенства (2) порождает процесс, который завершается, когда каждая часть становится блоком гиперграфа H . Результатом этого процесса выступают семейство блоков $B(H) = \{H_i, i \in I\}$ и семейство множеств сочленения $S(H) = \{S_j, j \in J\}$ гиперграфа H . Если гиперграф H обладает свойством М-ацикличности, то по теореме 1 в $B(H)$ все блоки тривиальные. Тогда

$$tw(H) = \max\{tw(H_i), i \in I\} = \max\{|X(u)| - 1, u \in U\} = r(H) - 1,$$

что отвечает следствию 2. Наличие хотя бы одного нетривиального блока в $B(H)$ свидетельствует о том, что гиперграф H не является М-ациклическим.

Согласно соотношению (2) процесс формирования $B(H)$ и $S(H)$ для (n, m) -гиперграфа H можно организовать следующим образом:

- 1) первоначально семейство $B(H)$ состоит только из H и $S(H) = \emptyset$;
 - 2) для каждого $H_i \in B(H)$ подгиперграфа гиперграфа H находится множество сочленения. Если множество сочленения найдено, то оно добавляется в $S(H)$, H_i подвергается разбиению и полученные более мелкие части помещаются в $B(H)$. Если в H_i нет множества сочленения, то далее H_i исключается из обработки. Эти действия повторяются до тех пор, пока в $B(H)$ не окажется частей с множествами сочленения.
- Если для нахождения множества сочленения использовать метки $f_{ij} = X(u_i) \cap X(u_j) \neq \emptyset$ реберного графа, ассоциированного с H_i , то шаг 2 осуществим за время $O(m^2)$. Всякий (n, m) -гиперграф содержит не более m блоков. Поэтому в целом весь процесс формирования $B(H)$ и $S(H)$ можно реализовать за время $n^{O(1)}$ при условии, что число ребер гиперграфа полиномиально зависит от числа его вершин.

Заключение

Использование дерева декомпозиции гиперграфа с ограниченной древовидной шириной при решении NP-трудных задач комбинаторной оптимизации — один из современных подходов преодоления высокой вычислительной сложности таких задач. Между тем, сама задача вычисления древовидной ширины гиперграфа является NP-трудной. В данной работе предложены два рекуррентных метода предобработки гиперграфа, которые позволяют снижать размерность задачи вычисления древовидной ширины гиперграфа без потери оптимальности: безопасное редуцирование и безопас-

ное разложение гиперграфа множествами сочленения. Доказательство теорем 2 и 3 служит теоретическим обоснованием этих методов. Предложенные методы имеют полиномиальную вычислительную сложность и могут применяться независимо друг от друга. Однако для достижения наибольшего эффекта предобработки рекомендуется сочетать

эти методы. Конечно, существуют гиперграфы, для которых безопасное редуцирование и безопасное разложение гиперграфа множествами сочленения не приводят к желаемому эффекту. Поэтому перспективны исследования, направленные на разработку других методов безопасной предобработки гиперграфов относительно древовидной ширины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bodlaender H.L. Discovering treewidth // Proc. of the 31st Conf. SOFSEM 2005, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science 3381. – 2005. – P. 1–16.
2. Robertson N., Seymour P.D. Graph minors. II. Algorithmic aspects of treewidth // J. Algorithms. – 1986. – V. 7. – P. 309–322.
3. Gogate V., Dechter R. A complete anytime algorithm for treewidth // Proc. of the 20th Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence. – 2004. – P. 201–204.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – М.: Мир, 1987. – 608 с.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
6. Зыков А.А. Гиперграфы // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29. – Вып. 6. – С. 89–154.
7. Быкова В.В. М-ациклические и древовидные гиперграфы // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 25–30.

Поступила 24.02.2011 г.

УДК 004.94

МЕТОД ИНТЕГРАЦИИ СТРУКТУРНЫХ РАЗЛИЧИЙ В ГРАФОВЫХ МОДЕЛЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТРУКТУР

В.К. Погребной

Томский политехнический университет

E-mail: vkp@tpu.ru

Рассматривается проблема анализа структур графов на предмет оценки их подобия и выявления труднообнаруживаемых свойств. Предлагаются методы свободной и зависимой интеграции структурных различий и получения интегральных описателей структур (ISD). Введено понятие области интеграции различий для класса структур и разработаны правила её формирования. Предложенные методы составили основу новой технологии анализа структур с помощью ISD, названной ISD-технологией.

Ключевые слова:

Структура, структурные различия, метод интеграции структурных различий, интегральный описатель структур (ISD), область интеграции для класса структур, ISD-технология анализа структур

Key words:

Structure, structure differences, the method of integration of structural differences, integral structure descriptor (ISD), area of integration for the class of structures, ISD-technology analysis of structures

Введение

Графовые модели широко используются для визуального и математического представления структурных свойств объектов в самых разных предметных областях: радиоэлектроника, энергетика, транспорт, связь, химия, биология. Модели, отражающие сетевую природу исследуемых объектов, часто оказываются конструктивными и наряду с решением задач анализа могут непосредственно использоваться в задачах синтеза.

Построение графовой модели предполагает разбиение объекта на компоненты (вершины) и установление отношений между ними (рёбра). Вершинам и рёбрам могут приписываться различные атрибуты, которые отражают конкретные свойства соответствующих компонентов и связей между ними.

Использование таких атрибутов при построении графовых моделей позволяет учесть специфику объектов, но при этом приходится иметь дело с различными видами графов и гиперграфов.

Учитывая, что данная статья ограничивается рассмотрением только структурных свойств объектов, необходимость в использовании атрибутов отпадает. Поэтому, следуя базовому определению понятия структуры как совокупности элементов множества и связей между ними, в работе в качестве графовой модели принимается обыкновенный граф, который по определению отражает понятие структуры и соответствует цели исследования — разработке конструктивной математической модели формального описания структур, позволяющей однозначно представлять структуры и сравнивать