

ПОЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет

E-mail: ged@tpu.ru

На m -мерном многообразии G_m^1 прямых l_1^n в n -мерном евклидовом пространстве E_n ($m > 2$, $n \geq 2m+1$) аналитически и геометрически определяются два поля инвариантных двумерных площадок.

Ключевые слова:

Евклидово пространство, линейное отображение, условия Коши–Римана.

Key words:

Euclid's space, linear mapping, Cauchy–Riemann conditions.

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена инвариантному нахождению полей двумерных площадок L_2^1 и Γ_2^1 в соответствующих m -плоскостях L_m и Γ_m , определяемых на m -мерном семействе G_m^1 прямых l_1^n в n -мерном евклидовом пространстве E_n ($m > 2$, $n \geq 2m+1$).

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–5].

1. Аналитический аппарат

Как и в [1], в данной статье рассматривается m -мерное семейство G_m^1 прямых l_1^n в n -мерном евклидовом пространстве E_n ($n \geq 2m+1$), отнесенном к подвижному ортонормальному реперу $R=(\bar{A}, \bar{e})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_j^i \bar{e}_j,$$

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_j^i \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^i = \omega_k^k = 0. \quad (1)$$

Ортонормальный репер R выбирается и канонизируется так, что имеют место соотношения [1. Ур. (2, 14, 28)]. В результате этого на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ имеют место дифференциальные уравнения [1. Ур. (3, 15, 29, 30)]. В терминах выбранного репера R на многообразии G_m^1 определены, в частности, m -плоскости

$$L_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m), \quad \Gamma_m = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_{2m}),$$

согласно [1. Ур. (17, 25, 31)].

В данной статье в соответствии с [1. Ур. (4)] и в дополнение к этому используется следующая система индексов при $m > 2$, $n \geq 2m+1$:

$$\begin{aligned} i, j, k, l = \overline{1, n}; \quad a, b, c = \overline{1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}; \\ \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n-1}; \quad f, g, h = \overline{m+1, 2m}; \\ \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1 = \overline{3, m}. \end{aligned}$$

2. Поля двумерных площадок $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$

2.1. Каждому элементу $l_1^n = (\bar{A}, \bar{e}_n) \in G_m^1$ сопоставим двумерные площадки $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$.

Двумерную площадку $L_2^1 \subset L_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m)$ определим следующим образом:

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} x^{\alpha_1}, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^n = 0;$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\alpha_1} = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}, \quad dg_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} \omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1} - \\ - g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} + \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}} \omega_n^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с (1) с двумерной площадкой L_2^1 ассоциируется $(m-1)$ -плоскость, ортогональная L_2^1 :

$$L_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m) \perp L_2^1 \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} x^{\alpha_1},$$

$$x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^n = 0;$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\alpha_1} = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}, \quad dg_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + \\ + g_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} \omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1} - g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} + \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}} \omega_n^{\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Двумерную площадку $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}, \dots, \bar{e}_{2m})$ определим следующим образом:

$$\Gamma_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}) \Leftrightarrow x^{m+\hat{\alpha}_1} = h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} x^{m+\alpha_1},$$

$$x^{\alpha} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^n = 0;$$

$$\bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1} = \bar{e}_{m+\alpha_1} + h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1};$$

$$dh_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} + h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\beta}_1} \omega_{m+\hat{\beta}_1}^{m+\hat{\alpha}_1} - h_{m+\beta_1}^{m+\hat{\alpha}_1} \omega_{m+\alpha_1}^{m+\beta_1} + \omega_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} = h_{m+\alpha}^{m+\hat{\alpha}} \omega_n^{\alpha}. \quad (4)$$

Тогда в соответствии с (1) с двумерной площадкой Γ_2^1 ассоциируется $(m-1)$ -плоскость, ортогональная Γ_{m-2}^1 :

$$\Gamma_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_{2m}) \perp \Gamma_2^1 \Leftrightarrow x^{m+\hat{\alpha}_1} = h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} x^{m+\alpha_1},$$

$$x^{\alpha} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^n = 0;$$

$$\bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1} = \bar{e}_{m+\alpha_1} + h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{m+\hat{\alpha}_1}, \quad h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1} = -h_{m+\alpha_1}^{m+\hat{\alpha}_1}. \quad (5)$$

В следующих пунктах данного раздела в каждом элементе $l_1^n \in G_m^1$ будут выделены аналитически и геометрически двумерные площадки $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$.

2.2. Инвариантная площадка $L_2^1 \subset L_m$

В соответствии с [1. Ур. (20)] каждому элементу $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ отвечает в m -плоскости L_m конус $\bar{Q}_{m-1}^2$, определяемый с учетом [1. Ур. (22)] уравнениями:

$$B_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^n = 0. \quad (6)$$

Здесь симметрические величины $B_{\alpha\beta}$ определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B'_{(\alpha} \delta_{|\gamma|\beta)}, \quad dB_{\alpha\beta} - B_{\gamma\beta} \omega'_\alpha - B_{\alpha\gamma} \omega'_\beta = B_{\alpha\beta\gamma} \omega'_n, \quad (7)$$

причем явный вид величин $B_{\alpha\beta\gamma}$ несущественный. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1$ в общем случае отвечает конечное число двумерных площадок $L_2^1 \subset L_m$, сопряженных соответствующим $(m-2)$ -плоскостям $L_{m-2}^1 \perp L_2^1$ относительно конуса $\bar{Q}_{m-1}^2 \in L_m$.

Доказательство. Из (2), (3), (6) и (7) следует, L_2^1 и L_{m-2}^1 сопряжены относительно конуса $\bar{Q}_{m-1}^2$ тогда и только тогда, когда $k_1 = 2(m-2)$ величин $g_{\alpha_1}^{\alpha_1} = -g_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ удовлетворяют следующим k_1 алгебраическим уравнениям:

$$g_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_1} \equiv B_{\alpha_1 \beta_1} g_{\alpha_1}^{\alpha_1} g_{\beta_1}^{\beta_1} + B_{\alpha_1 \beta_1} g_{\beta_1}^{\beta_1} + B_{\alpha_1 \beta_1} g_{\alpha_1}^{\alpha_1} + B_{\alpha_1 \beta_1} = 0. \quad (8)$$

Рассматривается якобиева матрица системы алгебраических уравнений (8):

$$\Psi_{k_1} = \left[\frac{\partial \Psi_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial g_{\gamma_1}^{\gamma_1}} \right]. \quad (9)$$

Подсчитаем ранг матрицы (9), например, при условии

$$g_{\alpha_1}^{\alpha_1} = -g_{\alpha_1}^{\alpha_1} = 0, \quad (10)$$

в силу чего из (8) получаются соотношения

$$B_{\alpha_1 \beta_1} = 0. \quad (11)$$

Из (9) с учетом (11) замечаем, что матрица Ψ имеет минор порядка $k_1 = 2(m-2)$:

$$\Psi = \det[B_{\gamma_1 \alpha_1}^{\gamma_1 \alpha_1}].$$

Здесь

$$B_{\gamma_1 \alpha_1}^{\gamma_1 \alpha_1} = B_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\gamma_1 \beta_1}^{\gamma_1 \beta_1} - B_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_1}^{\gamma_1} \delta_{\gamma_1}^{\beta_1}, \quad (12)$$

причем значения индексов $\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 \\ \hat{\gamma}_1 \end{smallmatrix} \right)$ указывают на но-

мера строк, а значения индексов $\left(\begin{smallmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} \right)$ – на номера столбцов определителя Ψ .

Полагая, например, $B_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, с учетом (12) и [1. Ур. (21, 22)] можно убедиться в том, что

$$\Psi = B_{11} B_{22} \dots B_{mm} = (A_1^1 A_2^2 \dots A_m^m)^{-1} \neq 0,$$

поскольку в этом случае $A_\alpha^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Поэтому в общем случае определитель Ψ порядка k_1 не равен нулю на многообразии G_m^1 . Следовательно, ранг матрицы (9) в общем случае равен $k_1 = 2(m-2)$. Это означает, что система (8) состоит из алгебраически независимых уравнений, а потому имеет конечное число решений относительно $g_{\alpha_1}^{\alpha_1} = -g_{\alpha_1}^{\alpha_1}$. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Из (7) с учетом [1. Ур. (22)] следует, что

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_\alpha^\beta + A_\beta^\alpha). \quad (13)$$

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R на многообразии $G_m^1 \subset E_n$, при которой с учетом (13) имеют место (11), а $\Psi \neq 0$, т. е.

$$A_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + A_{\alpha_1}^{\alpha_1} = 0, \quad \text{а } \Psi \neq 0. \quad (14)$$

Из дифференциальных уравнений (7) заключаем, что на многообразии G_m^1 с учетом (14) и [1. Ур. (3), (15)] выполняются дифференциальные уравнения:

$$\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = A_{\alpha_1 \alpha}^{\hat{\alpha}_1} \omega^\alpha, \quad dA_{\alpha_1 \alpha}^{\hat{\alpha}_1} + A_{\alpha_1 \alpha}^{\hat{\beta}_1} \omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1} - A_{\beta_1 \alpha}^{\hat{\alpha}_1} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} - A_{\alpha_1 \beta}^{\hat{\alpha}_1} \omega_\alpha^\beta = A_{\alpha_1 \alpha \beta}^{\hat{\alpha}_1} \omega^\beta. \quad (15)$$

Здесь явный вид величин $A_{\alpha_1 \alpha \beta}^{\hat{\alpha}_1}$ несущественный. Из (15) с учетом (1) замечаем, что

$$\omega_{\alpha_1}^{\alpha_1} = A_{\alpha_1 \alpha}^{\alpha_1} \omega^\alpha = -\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \Rightarrow A_{\alpha_1 \alpha}^{\alpha_1} = -A_{\alpha_1 \alpha}^{\hat{\alpha}_1}.$$

В соответствии с [2] и с учетом (15) делаем вывод о том, что канонизация ортонормального репера R типа (14) на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ при $n \geq 2m+1$ в общем случае существует.

Из (2), (3), (10) и (11) следует, что теперь

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2), \quad L_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m). \quad (16)$$

2.3. Двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ Коши–Римана.

Из [1. Ур. (9, 23)] следует, что направление

$$v = (\bar{B}, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m^1 \quad (17)$$

с учетом [1. Ур. (16, 21, 22)] при отображении $\Pi = \{A_\alpha^\beta\}: L_m^1 \rightarrow L_m$ переходит в направление

$$x = (\bar{A}, \bar{e}_\beta) A_\alpha^\beta v^\alpha = x^\beta (\bar{A}, \bar{e}_\beta) \in L_m, \quad (18)$$

откуда получаем

$$x^\beta = A_\alpha^\beta v^\alpha \Rightarrow v^\alpha = B_\beta^\alpha x^\beta. \quad (19)$$

Из (16)–(19) следует, что

$$x \in L_{m-2}^1 \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = 0 \Leftrightarrow v^{\hat{\alpha}_1} = 0 \Leftrightarrow v \in L_{m-2}^{*1} = (\bar{B}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m), \quad (20)$$

где

$$L_{m-2}^{*1} = \Pi^{-1} L_{m-2}^1. \quad (21)$$

Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1$ в двумерных площадках $L_2^1 \subset L_m$ и $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ сопоставим с учетом (4), (5) и (16) точки X и Y с радиус-векторами

$$\bar{X} = \bar{A} + x^{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_1}, \quad \bar{Y} = \bar{A} + y^{m+\beta_1} \bar{e}_{m+\beta_1}. \quad (22)$$

Отсюда с учетом (16) и [1. Ур. (1, 3, 9, 15)] получаем

$$\frac{d\bar{X}}{\theta} = (\dots)^\alpha \bar{e}_\alpha + (A_\beta^{m+\alpha} + x^{\alpha_1} A_{\alpha_1}^{m+\alpha}) \bar{e}_{m+\alpha} + (\dots)^{\hat{\gamma}} \bar{e}_{\hat{\gamma}} + (\dots)^n \bar{e}_n. \quad (23)$$

Из (22) и (23) с учетом (2), (3) и [1. Ур. (9)] получаем, что с каждым фиксированным направлением $v = (\bar{B}, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m^1$, соответствующим элементу $l_1^n \in G_m^1$ ассоциируется отображение

$$F_v : L_2^1 \rightarrow \Gamma_2^1, \quad (24)$$

определяемое уравнениями

$$y^{m+\beta_1} = \lambda(x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 \alpha}^{m+\beta_1} + G_{\alpha}^{m+\beta_1}) v^{\alpha}, \quad (25)$$

где v^{α} — фиксированы, а величины $G_{\alpha_1 \alpha}^{m+\beta_1}$ и $G_{\alpha}^{m+\beta_1}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} G_{\alpha_1 \alpha}^{m+\beta_1} &= A_{\alpha_1 \alpha}^{m+\beta_1} + h_{m+\beta_1}^{m+\beta_1} A_{\alpha}^{m+\beta_1}, \\ G_{\alpha}^{m+\beta_1} &= A_{\alpha}^{m+\beta_1} + h_{m+\beta_1}^{m+\alpha_1} A_{\alpha}^{m+\beta_1}. \end{aligned} \quad (26)$$

По аналогии с [3. С. 6] и [4. Ур. (15)] отображение (27) с учетом [1. Ур. (9, 25, 28)] геометрически означает, что

$$Y = F_v X = \Gamma_2^1 \cap \{T(X)_v \cup L_m \cup \Gamma_{m-2}^1 \cup \Gamma_{n-2m}^1\}.$$

Здесь $T(X)_v$ означает касательную к нефокальной, в смысле [1], линии $(X)_v$, описываемой точкой X в направлении $v = (\bar{B}, \bar{e}_a)$ $v^{\alpha} \in L_m^1$.

Определение 2.1. Отображение $F_v : L_2^1 \rightarrow \Gamma_2^1$, отвечающее элементу $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ при каждом фиксированном направлении $v = (\bar{B}, \bar{e}_a)$ $v^{\alpha} \in L_m^1$, называется отображением Коши–Римана или $F_v \rightarrow F_v(K.-P.)$, если определяющие его функции удовлетворяют условиям Коши–Римана [5. С. 188–189]:

$$\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^2}. \quad (27)$$

Если эти условия выполняются при любых направлениях $v \in L_m^1$, то отображение F_v называется аналитическим или отображением $F_v \rightarrow F_v(K.-P.)$.

Определение 2.2. Двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$, отвечающая в каждом элементе $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ двумерной плоскости $L_2^1 \subset L_m$ при отображениях $F_v \rightarrow F_v$

($K.-P.$) при всех направлениях $v \in L_{m-2}^1 \subset L_m^1$, называется двумерной площадкой Коши–Римана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. Каждому элементу $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$ в общем случае отвечает в Γ_m единственная двумерная плоскость Γ_2^1 Коши–Римана, соответствующая площадке $L_2^1 \subset L_m$.

Доказательство. Из (25) и (27) в соответствии с определением 2.1 отображение (24) будет при каждом фиксированном направлении $v \in L_m^1$, отвечающим элементу $l_1^n \in G_m^1$, будет отображением $F_v \rightarrow F_v(K.-P.)$ тогда и только тогда, когда выполняются на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ следующие соотношения:

$$(G_{1\alpha}^{m+1} - G_{2\alpha}^{m+2}) v^{\alpha} = 0, \quad (G_{1\alpha}^{m+2} + G_{2\alpha}^{m+1}) v^{\alpha} = 0. \quad (28)$$

В соответствии с определением 2.2 из (28) с учетом (26), (20) и (21) следует, что двумерная площадка $\Gamma_2^1 \subset \Gamma_m$ будет двумерной площадкой Коши–Римана тогда и только тогда, когда величины $h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1} = -h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1}$, общее число которых равно $k_1 = 2(m-2)$, удовлетворяют в общем случае следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} A_{1\alpha_1}^{m+\beta_1} h_{m+\beta_1}^{m+1} - A_{2\alpha_1}^{m+\beta_1} h_{m+\beta_1}^{m+2} = A_{2\alpha_1}^{m+2} - A_{1\alpha_1}^{m+1}, \\ A_{2\alpha_1}^{m+\beta_1} h_{m+\beta_1}^{m+1} + A_{1\alpha_1}^{m+\beta_1} h_{m+\beta_1}^{m+2} = -A_{2\alpha_1}^{m+1} - A_{1\alpha_1}^{m+2}. \end{cases} \quad (29)$$

Основным определителем D_{k_1} порядка k_1 системы (29) является определитель:

$$D_{k_1} = \begin{vmatrix} A_{13}^{m+3} & \cdots & A_{1,m}^{m+3} & -A_{23}^{m+3} & \cdots & -A_{2,m}^{m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{23}^{2m} & \cdots & A_{1,m}^{2m} & -A_{23}^{2m} & \cdots & -A_{2,m}^{2m} \\ A_{23}^{m+3} & \cdots & A_{2,m}^{m+3} & A_{13}^{m+3} & \cdots & A_{1,m}^{m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{23}^{2m} & \cdots & A_{2,m}^{2m} & A_{13}^{2m} & \cdots & A_{1,m}^{2m} \end{vmatrix}.$$

Здесь в величинах $A_{\alpha_1, m}^{m+\alpha_1}$ запятая в нижних индексах ставится для того, чтобы первый индекс отличать от второго, равного m во избежание путаницы с верхним индексом $m+\alpha_1$ преимущественно при $\alpha_1 = m$.

Положив, например, $A_{2\alpha_1}^{m+\beta_1} = 0$, $A_{1\alpha_1}^{m+\beta_1} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}$, мы убеждаемся в том, что определитель D_{k_1} равен 1. Поэтому основной определитель D_{k_1} тождественно не равен нулю на многообразии G_m^1 . Следовательно, система (29) в силу теоремы Крамера имеет конечное число решений относительно $h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1} = -h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1}$.

Теорема 2.2 доказана.

Проведем на многообразии G_m^1 такую канонизацию ортонормального репера R , при которой

$$A_{2\alpha_1}^{m+2} - A_{1\alpha_1}^{m+1} = 0, \quad A_{1\alpha_1}^{m+1} + A_{1\alpha_1}^{m+2} = 0, \quad D_{k_1} \neq 0. \quad (30)$$

Тогда из [1. ур. (1), (3), (16)] с учетом (30) замечаем, что на многообразии $G_m^1 \subset E_n$ при $m > 2$, $n \geq m+1$ имеют место дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha_1+m}^{m+\beta_1} &= -\omega_{m+\beta_1}^{\alpha_1+m} = -A_{m+\beta_1, \alpha}^{\alpha_1+m} \omega_n^{\alpha} = \\ &= A_{m+\alpha_1, \alpha}^{m+\beta_1} \omega_n^{\alpha} \Rightarrow -A_{m+\beta_1, \alpha}^{\alpha_1+m} = A_{m+\alpha_1, \alpha}^{m+\beta_1}; \\ dA_{m+\alpha_1, \alpha}^{m+\beta_1} + A_{m+\alpha_1, \alpha}^{m+\beta_1} \omega_{m+\beta_1}^{\alpha_1+m} - A_{m+\beta_1, \alpha}^{m+\beta_1} \omega_{m+\alpha_1}^{m+\beta_1} - \\ &- A_{m+\alpha_1, \beta}^{m+\beta_1} \omega_{\alpha}^{\beta} = A_{m+\alpha_1, \alpha\beta}^{m+\beta_1} \omega_n^{\beta}; \\ \omega_2^{m+2} - \omega_1^{m+1} &= (A_{2\alpha_1}^{m+2} - A_{1\alpha_1}^{m+1}) \omega_n^{\alpha_1}; \\ \omega_2^{m+1} + \omega_1^{m+2} &= (A_{2\alpha_1}^{m+1} + A_{1\alpha_1}^{m+2}) \omega_n^{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь явный вид величин несущественный. Из (31) в соответствии с [2] заключаем, что канонизация репера R типа (30) на многообразии G_m^1 в общем случае существует. Из (29) в силу (30) следует, что при указанном выборе репера R на многообразии G_m^1 величины $h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1} = -h_{m+\alpha_1}^{m+\alpha_1} = 0$.

Геометрически это означает, что в силу (2) и (3) теперь в m -плоскости Γ_m имеем:

$$\Gamma_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \bar{e}_{m+4}), \quad \Gamma_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+5}, \dots, \bar{e}_{2m}). \quad (32)$$

Замечание 2.2. Двумерные площадки (16) и (32), определенные в каждом элементе $l_1^n \in G_m^1$, будут использованы при одной из возможных классификаций многообразий G_m^1 . Это будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Многообразие прямых в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2011. — Т. 319. — № 2. — С. 5–8.
2. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2003. — Т. 306. — № 6. — С. 5–7.
3. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m -плоскостей

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958. — 687 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). — 1962. — № 2. — Р. 231–240.

Поступила 10.03.2011 г.

УДК 517.54

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМ ИСКАЖЕНИЯ

Л.М. Бер

Томский политехнический университет
E-mail: berlm@tpu.ru

Для однолистных функций с симметрией вращения получены оценки, обобщающие теоремы Г.М. Голузина об искажении хорд.

Ключевые слова:

Однолистные функции, симметрия вращения, искажение хорд, оценки.

Key words:

Schlicht functions, symmetry of rotation, Distortion of chords, estimations.

§ 1. Области с разрезами

Пусть $D, 0 \in D$, — односвязная область. Пусть $S(n)$, $n \in \mathbb{N}$, — класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и отображающих этот круг на область D_0 , полученную из D исключением n ($n \in \mathbb{N}$) простых непересекающихся жордановых дуг.

Пусть $S'(n)$ — подкласс класса $S(n)$ тех функций, которые отображают единичный круг на плоскость с разрезом по простой жордановой дуге, идущей в бесконечность. Согласно [1] любую функцию класса $S(n)$ можно записать в виде предела последовательности функций подкласса $S'(n)$, в котором каждая функция $f(z)$ представима в E в виде

$$\tilde{f}(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau} f(z, \tau), \quad (1)$$

где $f(z, \tau)$, как функция от z , голоморфна и однолистка в круге E , $|f(z, \tau)| < 1$ в E и $f(0, \tau)=0$, $f'_z(0, \tau)=1$, а, как функция от τ ($0 \leq \tau < \infty$), является решением дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{df}{dz} = -f \sum_{k=1}^n \delta_k(\tau) \frac{\mu_k(\tau) + f}{\mu_k(\tau) - f},$$

удовлетворяющим начальному условию

$$f(z, 0) = z.$$

Здесь $\mu_k(\tau)$ — управляющие функции, кусочно-непрерывные и по модулю равные единице в промежутке $0 \leq \tau < \infty$.

Пусть $f(z) \in S'(n)$ и $f(z, \tau)$ — функция, соответствующая $f(z)$. Для любых точек $z_v, v=1, \dots, n$, $n \geq 1$ положим для краткости $f_v = f(z_v, \tau)$.

Непосредственным вычислением получаем следующие равенства при $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left[e^{-\tau n} \frac{f_v^n - f_{v'}^n}{f_v^n f_{v'}^n} \right] &= \\ &= -n + \frac{n f_v^{n-1}}{f_v^n - f_{v'}^n} \frac{\partial f_v}{\partial \tau} - \frac{n f_{v'}^{n-1}}{f_v^n - f_{v'}^n} \frac{\partial f_{v'}}{\partial \tau} - \frac{n}{f_v} \frac{\partial f_v}{\partial \tau} - \frac{n}{f_{v'}} \frac{\partial f_{v'}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left[1 - f_v^n \bar{f}_{v'}^n \right] &= -n \frac{f_v^{n-1} \bar{f}_{v'}^{n-1}}{1 - f_v^n \bar{f}_{v'}^n} \left[f_v \frac{\partial f_{v'}}{\partial \tau} + f_{v'} \frac{\partial f_v}{\partial \tau} \right]. \end{aligned}$$

Используя уравнение Левнера, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left[e^{-\tau} \frac{f_v - f_{v'}}{f_v f_{v'}} \right] &= \\ &= -2 f_v \bar{f}_{v'} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau) - f_v)(\mu_k(\tau) - f_{v'})}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \left[e^{-\tau n} \frac{f_v^n - f_{v'}^n}{f_v^n f_{v'}^n} \right] &= \\ &= 2 n f_v f_{v'} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k - f_v)(\mu_k - f_{v'})} \times \\ &\times \left[\frac{\mu_k(\tau)(f_v^{n-1} - f_{v'}^{n-1})}{f_v^n - f_{v'}^n} - \frac{1}{2} \right], \quad n \geq 2, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln [1 - f_v^n \bar{f}_{v'}^n] &= 2 n f_v^n \bar{f}_{v'}^n \frac{1 - f_v \bar{f}_{v'}}{1 - f_v^n \bar{f}_{v'}^n} \times \\ &\times \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau) - f_v)(\mu_k(\tau) - f_{v'})}, \quad n \geq 1. \quad (4) \end{aligned}$$