УДК 681.5:330.43

# ИНЖЕНЕРНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА В ЗАДАЧАХ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

В.А. Кочегуров, Л.И. Константинова, В.Г. Гальченко

Томский политехнический универсистет
E-mail: gal@am.tpu.ru

*По аналогии с эконометрикой рассматриваются вопросы количественного системного анализа, при котором объект представляется в виде абстрактной модели без привязки к конкретной области с учетом особенности их математического описания. Вводится понятие системных единиц, характеризующих свойства динамических объектов, приводится физическое обоснование и устанавливается аналогия с единицами измерения в предметных областях.*

***Ключевые слова:***
*Эконометрика, система, математическая модель, обобщенные координаты, обобщенные векторы Лагранжа, системные единицы.*

***Key words:***
*Econometrics, system, mathematical model, generalized coordinates, generalized vectors of Lagrange, system unit.*

### Введение

По определению эконометрика, как научная дисциплина, изучает на основе математических методов (моделей) основные количественные закономерности процессов в реальных экономических системах [1]. В эконометрии наряду с достижениями экономического анализа широко используются современные аналитические и численные методы математики в приложении к моделированию систем. Количественный системный анализ построен на основе теории автоматов, в которой объект (система) рассматривается абстрактно, без привязки к конкретной предметной области и учитываются только особенности их математического описания.

Это обстоятельство приводит к определенным затруднениям при использовании математического аппарата в задачах системного анализа в эконометрии, когда необходима предметная интерпретация получаемых результатов, поскольку математические модели отражают основные закономерности классической математики и являются своего рода системным аналогом аналитических выражений. С другой стороны будет неправомерным не учитывать в системных аналогах способы измерения величин в реальных объектах, в которых могут присутствовать одновременно механические, электромагнитные, экономические и т. д. процессы.

Между всеми разнородными величинами реальных объектов можно усмотреть некоторую системную аналогию, на основе которой можно ввести измерительные системные шкалы и соответствующие единицы измерения, выделить в них основные и производные, опираясь на принципы баланса, подобия и сохранения размерности. Ниже делается попытка сформулировать основные общесистемные единицы, характеризующие свойства динамических систем и дать им физическое обоснование, позволяющее установить аналогию с единицами измерения в предметных областях. На этой основе можно будет разработать универсальный программный продукт системного представления исследуемых объектов и соответствующее алгоритмическое обеспечение их инженерного анализа.

### Объективно существующие системы и способы их представления

Существуют различные определения термина система, этот термин используется всегда, когда стремятся исследуемый или проектируемый объект представить как «нечто целое (единое), сложное,..., показав его, изобразив графически или описав математическим выражением (формулой, уравнением и т. п.)». В понятие системы входят элементы, связи, цель, наблюдатель, язык отображения, что помогает поставить задачу, наметить основные этапы и методы исследования систем.

Остается открытым вопрос – всегда ли материальна или нематериальна система. С одной стороны при абстрактном представлении объектов в виде систем исследователь должен обращать внимание на их овеществленность, материальность, с другой стороны система может трактоваться «как отображение, т. е. как нечто, существующее лишь в сознании исследователе как структура». В этом случае для решения задач системного анализа важно акцентировать внимание на том факте, что понятие системы используется как средство исследования проблемы. Бесспорным является следующее утверждение: «объективно существующие системы и понятие системы; понятие системы, используемое как инструмент познания системы, и снова реальная система, знания о которой обогатились системными представлениями – такова диалектика объективного и субъективного в системе». Это означает, что понятие системы можно применять как к существующим, материально реализованным предметам, так и к знаниям об этих предметах или о будущих их реализациях [2].

При этом одна и та же система может быть представлена на разных уровнях: теоретико-познавательном, научно-исследовательском (модели), проектном и инженерном (материальное воплощение). Для каждого уровня существуют свои особенности, законы, принципы, с помощью которых описывается поведение реальных систем. Такое представление систем называется стратифицированным, а уровни абстрагирования – стратами, и отражает основную закономерность теории систем – ее целостность, что дает возможность согласовать теоретические исследования с практическими приложениями. На рисунке приведено стратифицированное отображение системы, заимствованное из [3].

Изучение систем можно начинать с любой страты. При этом на каждой страте могут разрабатываться и применяться свои модели, но необходимо помнить, что система сохраняет свое назначение до тех пор, пока не меняется ее представление на самой верхней страте, определяющей концепцию или замысел системы, которые раскрываются (детализируются) в страте модели на каждом уровне. Естественно страты в общем случае выделяют произвольно, но неизменно должны соблюдаться правила количественных соотношений величин, определяющих поведение системы. Имеется проблема установления соответствия и измерения системных величин на разных уровнях, особенно когда они являются разнотипными.

#### Исследование систем

Для исследования систем могут быть использованы традиционные методы, вытекающие непосредственно из конкретной предметной области, а также методы, развитые на основе их абстрактного представления. Специалистами в области прикладной математики широко используются методы, заимствованные из теории управления, определяющие поведение модели систем в известном пространстве состояний.


***Рисунок.*** *Стратифицированное отображение системы*

Модель поведения системы «М» реального объекта «О» является тогда, когда выполняются условия:

- реальный объект воспринимается так, что в нем выделяется существенное и несущественное;
- существенным величинам объекта «О» сопоставлены соответствующие величины объекта «М»;
- определены соотношения между существенными величинами конкретного объекта «О» и соответствующие соотношениям между образцами этих величин объекта «М».

Модели поведения должны адекватно отражать поведение реальных объектов в смысле соответствия между причинами и следствиями. Имеются классические задачи исследования систем:

- моделирование (анализ);
- прогнозирование;
- идентификация;
- управление.

Эти задачи связаны с поведением систем, которое определяется траекторией изображающей точки в пространстве их состоянии, перемещающейся во времени под действием внутренних и внешних сил. Для непрерывных систем эта траектория непрерывная, а для дискретных – дискретная. Она характеризуется пространственными координатами, временем и действующими вдоль траектории силами. В динамических системах под действием скачкообразных сил траектория не становится разрывной, а изменяется непрерывно от своего исходного состояния до установившегося текущего значения. Этот эффект замедления в механике называется инерцией, измеряется в единицах массы, в электротехнике такой эффект называется запаздыванием, в социальных системах глубокой памяти измеряется в единицах времени. По аналогии можно ввести для оценки подобных эффектов в абстрактных системах обобщенные единицы измерения, характеризующие инерционные свойства в поведении систем. Определив эти единицы измерения основными, относительно их не трудно установить все производные, пользуясь правилами адекватных измерений и принципом подобия.

#### Введение основных единиц измерения системных величин

Системы и их математические модели являются аналогом объектов материального мира, главным свойством которых является, как отмечалось ориентированное движение за счет внешних и внутренних взаимодействий в пространстве и времени. Природа взаимодействий может быть разная – за счет обмена энергии или за счет обмена информацией и др., но неоспоримым является факт, что, обмениваясь любой энергией, материальные объекты как бы информируют друг друга о своем состоянии и тем самым определяют траекторию направленного движения. Поэтому в системных моделях нет необходимости уточнять вид взаимодействия, а достаточно оценивать результаты через изменение координат траектории в пространстве системных переменных, изменяющихся во времени, которые удобно отсчитывать в условных безразмерных единицах. В частности, можно воспользоваться методами измерения, применяемыми в радиотехнике, теории информации. Введем для измерения системных переменных системную единицу [*И*]. Путем введения масштаба для каждой системной переменной можно варьировать точность их измерения, аналогично введем системную переменную для измерения времени – тайм $[t_m]$. На основе введенных единиц можно определить единицы, характеризующие эффекты движения систем.

В качестве примера рассмотрим уравнение состояния автономных систем, широко используемое в теории управления [4]:

$$\dot{X}(t) = F(X(t)). \qquad (1)$$

Здесь $X(t)$ – переменные состояния системы, единицы измерения:

$$t = [t_m], \quad X = [Vl], \quad \dot{X} = \frac{[Vl]}{[t_m]}.$$

Из уравнения $\ddot{X}(t) = \frac{\partial F}{\partial X}\dot{X}(t)$, где $\frac{\partial F}{\partial X}$ – матрица Якоби, введем меру инерционного замедления:

$$M_r = [m_{1r}, m_{2r}, ..., m_{nr}]^T$$

и соответствующие силы, определяющие покоординатные движения на интервале $dt$:

$$Q(t) = M_r\ddot{X}(t),$$

где

$$M_\tau = \begin{bmatrix} m_{1\tau} & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_{2\tau} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{n\tau} \end{bmatrix}$$

и $m_{1\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\partial f_1^T \partial f_2}{\partial x \partial x}}}$, $m_{2\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\partial f_2^T \partial f_2}{\partial x \partial x}}}$, $m_{n\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\partial f_n^T \partial f_n}{\partial x \partial x}}}$.

Введем единицу измерения замедления – indecel [idc]. Тогда обобщенная сила $Q(t)$ будет иметь единицу измерения: $Q(t) = \dfrac{[\mathrm{idc}][Vl]}{[t_m]^2}$, которую назовем tensor [tns].

Количество движения вдоль каждой координаты (импульс) определиться:

$$p_1(t) = m_{1\tau}\dot{x}_1(t),$$

$$p_2(t) = m_{2\tau}\dot{x}_2(t), ..., \; p_n(t) = m_{n\tau}\dot{x}_n(t).$$

Тогда системная сила $Q$ равна

$$Q(t) = \frac{\partial P(t)}{\partial t} = CP(\dot{X}(t)),$$

где

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2 m_{1\tau}}{\partial x_2 m_{2\tau}} & ... & \dfrac{\partial f_1 m_{1\tau}}{\partial x_n m_{n\tau}} \\ \dfrac{\partial f_2 m_{2\tau}}{\partial x_1 m_{1\tau}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial f_2 m_{2\tau}}{\partial x_n m_{n\tau}} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial f_n m_{n\tau}}{\partial x_n m_{1\tau}} & ... & ... & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Матрица $C$ характеризует упругие свойства системы, ее единица измерения: $C = \dfrac{1}{[t_m]}$.

Работа, совершаемая системной силой, равна:

$$W = \int_{\Omega x} Q^T(t)dX(t) = \int_T (M_\tau \ddot{X}(t)^T \dot{X}(t)dt =$$

$$= \int_{\Omega x} (d\dot{X})^T M_\tau T\dot{X}(t) = \frac{1}{2}\dot{X}(t)^T M_\tau \dot{X}(t). \qquad (2)$$

Здесь единицы измерения энергии:

$$W = [\mathrm{idc}]\left[\frac{Vl}{t_m}\right]^2.$$

Из приведенных системных единиц могут быть получены любые производные.

### Системные переменные состояния и обобщенные векторы Лагранжа

В механике движения для описания процессов широко используются обобщенные векторы Лагранжа $q\{q_1, q_2, ..., q_n\}$и $\dot{q}\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n\}$. Для них введено понятие функции Лагранжа $L_k(q,\dot{q})$, определяющей энергетическое состояние объекта как разность между кинетической энергией $W_k(q,\dot{q})$, зависящей в общем случае от $q$ и $\dot{q}$, и потенциальной энергией $W_n(q)$, зависящей только от $q$:

$$L(q,\dot{q}) = W_k(q,\dot{q}) - W_n(q).$$

Частная производная кинетической энергии по вектору скорости называется обобщенным импульсом:

$$P(q,\dot{q}) = \frac{\partial W(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}.$$

Частная производная потенциальной энергии $W_n(q)$ по обобщенному вектору $q$ называется обобщенной силой:

$$\Phi(q) = \frac{\partial W_n(q)}{\partial q}.$$

Обобщенная сила является результирующей всех сил, действующих внутри системы. Такой подход во многих случаях может оказаться предпочтительнее описания систем через уравнения состояния. Для этого надо перейти от переменных состояния систем к обобщенным координатам.

### Переход к обобщенным координатам

Примем, что новые координаты $q$ не зависят от производных старых координат и переход к новым координатам определяется нелинейным преобразованием $X(t)=X(q,\dot{q})$.

Отсюда $\dot{X}(t) = \dfrac{\partial X(q)}{\partial q^T}\dfrac{dq(t)}{dt} = \dot{X}(q,\dot{q})$.

Тогда кинетическая и потенциальная энергия определяются как:

$$W_k(\dot{X}(q,\dot{q})) = W_k(q,\dot{q}), \quad W_П(X(q)) = W_П(q).$$

Вычислим $\frac{\partial W_k(q,\dot q)}{\partial q}$ и $\frac{\partial W_k(q,\dot q)}{\partial \dot q}$.

$$\frac{\partial W_k(\dot X(q,\dot q))}{\partial q} = \frac{\partial W_k^T}{\partial \dot X}\frac{d\dot X}{dq} =$$

$$= \frac{\partial \dot X^T}{\partial q}\frac{dW_k}{d\dot X} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial X^T}{\partial q}\right]P(\dot X),$$

$$\frac{\partial W_k(X(q,\dot q))}{\partial q} = \frac{\partial \dot X^T}{\partial \dot q}\frac{dW_k}{d\dot X} = \frac{\partial \dot X^T}{\partial \dot q}P(\dot X) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot q}\left[\dot q^T\frac{\partial X^T(t)}{\partial q}\right]P(\dot X) = \frac{\partial X^T}{\partial q}P(\dot X).$$

Обозначим $Q_{Li} = \frac{\partial W_П}{\partial \dot q} + \frac{\partial X^T}{\partial q_i}\frac{dP(q,\dot q)}{dt} = Q_{Пi} + Q_{ki}$.

Величина $Q_{Li}$ характеризует внутренние и внешние силы, действующие в системе за счет потенциальной и кинетической энергии. Окончательно можно записать:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_k(q,\dot q)}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial W_k(q,\dot q)}{\partial q_i} = Q_{W_{ki}}$$

и $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q_i} = Q_{Li}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Таким образом, для описания системы в обобщенных координатах используется $n$ дифференциальных уравнений 2-го порядка, что естественно дает возможность полнее исследовать процессы системы, содержащие циклические составляющие. От этих уравнений нетрудно перейти к каноническим уравнениям Гамильтона.

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i},$$

где $H=W_k+W_П$ – полная энергия системы.

### Равновесные сбалансированные модели функционирования динамических систем

Исследования по моделированию динамических систем по большей части носят прикладной характер, базируются на основных законах естествознания и связаны с построением математических зависимостей, наилучшим образом объясняющих результаты наблюдений на реальных объектах. Важным свойством любых систем, независимо от природы (физические, биологические, экономические и др.), является их способность при функционировании сохранять неизменными свои показатели в условиях случайных возмущений и взаимодействия с внешней средой. Это свойство внутренней саморегуляции систем определяется наличием совокупности обратных связей и сложных приспособительных реакций, направленных на устранение или максимальное ограничение факторов, нарушающих относительное динамическое постоянство показателей внутренней среды. В биологических системах такие приспособительские реакции называются гомеостазом [5].

Понятие гомеостаза с полным основанием можно использовать при исследовании динамических свойств любых систем, в функционировании которых заложены принципы обратной связи и управления. В этом случае в пространстве состояний системы можно выделить некоторую ограниченную область, определяемую как гомеостатическая, в которой обеспечиваются условия внутренней саморегуляции и нормальное функционирование систем в условиях изменяющейся внешней среды и случайных возмущений. Нарушение условий саморегуляции в области гомеостаза указывает на появление дефектов во внутренней структуре системы. Явление гомеостаза образно можно сравнить со свойством восстановления своих геометрических форм упругих тел, находящихся под действием механических сил. Появление остаточных эффектов (не сохранение геометрических форм) в реакциях на механические воздействия указывает на нарушение внутренней структуры тел и их упругих свойств.

При моделировании представляет интерес поведение системы, обладающей гомеостатическими свойствами, т. е. сопровождаемое обменом энергии расходуемой на изменение внутреннего состояния и на работу, совершаемую системой. Обменные процессы в системах подчиняются фундаментальным законам сохранения энергии и непрерывности.

При малых колебаниях переменных состояния систему можно рассматривать как линейную и её поведение полностью определяется характером равновесия. При больших колебаниях поведение системы не может быть описано линейными зависимостями, и оно носит достаточно сложный характер.

В соответствии с (1) поведение динамической системы, или характер изменения во времени переменных состояния $X$ в пространстве состояний за счет внутренних и внешних источников энергии определяется некоторой силовой функцией $F(X(t))$.

Обозначим функциональное состояние системы при ее нормальном функционировании $F(X(t))=F(X_0(t))$. Тогда при малых отклонениях значений $X(t)$ от $X_0(t)$ уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\ddot X(t) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}\cdot \dot X(t). \tag{3}$$

Нормальное функционирование систем в условиях изменяющейся внешней среды и случайных возмущений обеспечивается за счет саморегуляции и поддерживается поступлением в систему дополнительных сбалансированных внешних ресурсов, потребность в которых пропорциональна уровню $X(t)$. Введем понятие темпов относительного изменения прироста переменных состояния в единицу времени, обеспечивающих сбалансированное динамическое равновесное состояние на любом отрезке траектории $X(t)$.

$$K_{Ti}^* = \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t\, x_i(t)}.$$

При устремлении $\Delta t$ к нулю имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0} K_{Ti}^{*} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x_i(t+\Delta t)}{\Delta t x_i(t)} = \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = K_{Ti}\,(t).$$

Отсюда $\dot{x}(t)=K_{Ti}x_i(t)$ или $\dot{X}(t)=K_T X(t)$ где $K_T$ – диагональная матрица с элементами $K_{Ti}$.

Подставляя в уравнение (3):

$$\ddot{X}(t) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} K_T X(t).$$

Введем обобщенные переменные состояния $P(t)=K_T X(t)$ и $Q(t)=\dot{X}(t)$, их можно еще назвать фазовыми переменными. Тогда $n$ дифференциальных уравнений второго порядка можно записать в виде $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = K_T Q(t),$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} P(t).$$

В случае устойчивых систем эти уравнения описывают системы, состоящие из $n$ взаимосвязанных гармонических осцилляторов. Собственные числа матриц $K_T$ и $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$ определяют частотные свойства систем и являются мерой, определяющей темпы изменения переменных состояния.

Можно ввести скалярную величину, характеризующую энергию системы в пространстве обобщенных координат:

$$W(P(t),\ Q(t)) = \frac{P^T(t)\dfrac{\partial F(x)}{\partial x}}{2} + \frac{Q^T(t) K_T Q}{2}.$$

Тогда уравнения (2) можно записать

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\partial W(P(t),Q(t))}{\partial Q} = K_T Q(t),$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\partial W(P(t),Q(t))}{\partial P} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} P(t).$$

Эти уравнения можно объединить, если ввести переменную

$$Z(t) = \{P(t),Q(t)\} =$$

$$= \{Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t), Z_{n+1}(t), ..., Z_{2n}(t)\};$$

$$Z(t) = M_Z Z(t)$$

где $M_Z = \begin{bmatrix} 0 & K_T \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}.$

При кососимметричной матрице $M_z$ описываемая система является самосопряженной, и для нее выполняется условие

$$(Z^T(t)Z(t)) = \|Z(t)\|^2 = \text{const}.$$

По определению квадрат нормы характеризует энергию системы.

Условие кососимметричной матрицы $M_z$ выполняется при $K_T^* = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$.

Фактически это условие определяет условия равновесного сбалансированного динамического функционирования системы. При малых отклонениях переменных состояния оно остается постоянным.

Рассмотрим одиночный гармонический осциллятор. Для него

$$\ddot{x}(t) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot x(t) = 0,$$

$$\dot{x}(t) = k_T x(t).$$

Введем обобщенные переменные $p(t)=k_T x(t)$, $q(t)=\dot{x}(t)$.

Тогда

$$\frac{dp(t)}{dt} = k_T q(t), \quad \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x} p(t).$$

Обозначим $z_1(t)=p(t)$, $z_2(t)=q(t)$.

Тогда

$$\dot{z}(t) = M_Z z(t),$$

где $M_Z = \begin{bmatrix} 0 & k_T \\ -\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}.$

При $k_T = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ система становится самосопряженной и

$$(z^T(t)z(t) = z_1^2(t) + z_2^2(t) = p^2(t) + q^2(t) = \text{const} = c.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$k_t^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) = c^2, \quad \frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

где $a = \frac{c}{k_T}$, $b = c$.

Уравнение (4) является уравнением эллипса с полуосями $a$ и $b$.

Площадь эллипса равна

$$S_{эл} = \pi ab = \pi \frac{c^2}{k_T}.$$

Она остается неизменной со временем, если взаимосвязь между $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ не нарушается, и является энергетической характеристикой осциллятора. Отсюда

$$k_T = \frac{S_{эл}}{\pi c^2} = \text{const}.$$

Это выражение показывает, что показатель $k_T$ является количественной оценкой степени сохранения внутренних свойств динамических систем и определяет их гомеостатические свойства. Это обстоятельство может быть использовано для формирования обобщенных комплексных показателей, характеризующих состояние системы.

На практике для оценки темпов относительного изменения переменных состояния удобно использовать статические показатели, вычисляемые в, частности, по среднегеометрическим значениям.

**Выводы**

Обосновано использование методов эконометрии в задачах системного анализа. Введены основные системные единицы, позволяющие получать объективные численные оценки исследуемых процессов, не вдаваясь в их конкретное физическое содержание.

На основе понятия «гомеостаз» получены условия и критерии оценки сбалансированного равновесного динамического функционирования систем.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лопатников Л. Экономико-математический словарь. – М.: Изд-во ABY, 1996. – 700 с.
2. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
3. Системный анализ и принятие решений: словарь-справочник / под общ. ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козловой. – М.: Высшая школа, 2004. – 612 с.
4. Сю Д., Майер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение, 1972. – 530 с.
5. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление.– М.: Мир, 1989. – 474 с.

*Поступила 25.03.2011 г.*

УДК 621.01:519.242

# МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Янушевскис, А.Г. Мельников, И.Д. Кактабулис

Рижский технический университет, Латвия
E-mail: janush@latnet.lv

*Предложена ресурсосберегающая методика оптимизации формы элементов механических систем создаваемых средствами автоматизированного проектирования. Методикой предусматривается планирование расположения контрольных точек полигона неоднородных рациональных B-сплайнов, задающих проектируемую форму, и построение соответствующих метамоделей, использующихся в дальнейшем для оптимизации. Показана эффективность методики как при решении тестового примера так и при оптимизации формы диска для крепления измерительной аппаратуры на оси колесной пары вагона. Приведены полученные формы и соответствующие количественные показатели.*

***Ключевые слова:***
*Оптимизация формы, неоднородные рациональные B-сплайны, планирование экспериментов, метамодель, тензометрическая колесная пара вагона.*

***Key words:***
*Shape optimization, non-uniform rational B-splines, design of experiments, metamodel, tensometric wheel pair of wagon.*

Создание конкурентно способных продуктов в наши дни, как правило, включает этап оптимизации формы элементов механических систем. Для оптимизации формы и топологической оптимизации конструкций широкое распространение получили разновидности метода гомогенизации [1, 2], который подразумевает рассмотрение каждого элемента конечно-элементной модели конструкции как композита, содержащего материал и пустоты. Ищется такое отношение материала и пустот, чтобы максимизировать поставленный критерий, например, безразмерный коэффициент эффективности:

$$PI = \frac{\sigma_{0,\max} v_0}{\sigma_{i,\max} v_i},$$

где $\sigma_{0,\max}$ – максимальное значение эквивалентных напряжений в первоначальной конструкции; $v_0$ – начальный объём конструкции; $\sigma_{0,\max}$ и $v_i$ – соответствующие значения переменных, полученные при $i$-й итерации.

Метод особенно успешно применяется [3 и др.] для оптимизации оболочечных конструкций. Однако его применение может быть затруднительным, так как количество параметров оптимизации может быть огромным (сотни тысяч и даже более миллиона) и для решения задачи требуется мощное программное обеспечение и вычислительные ресурсы. В случае оптимизации твёрдых тел полученные оптимальные формы часто трудно реализуемы или даже принципиально нереализуемы технологически. Поэтому актуальна разработка альтернативных подходов.

Предлагаемая альтернативная методика оптимизации формы элементов механических систем предусматривает применение высококачественных метамоделей и использование на соответствующих этапах программное обеспечение геометрического моделирования и метода конечных элементов (МКЭ), а также программ для оптимизации и аппроксимации. Разработанная методика основывается на последовательном использовании CAD/CAE