УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ–РИМАНА ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В четырехмерном евклидовом пространстве рассматривается двумерное многообразие $U_{1,2}$ прямых l_1^4. С этим многообразием инвариантным образом ассоциируются двумерные многообразия $V_{2,2}^1$ и $V_{2,2}^2$ плоскостей L_2^1 и L_2^2. Поэтому на многообразии возникают отображения между соответствующими плоскостями L_2^1 и $L_2^2 \perp L_2^1$ (в каждом элементе $l_1^4 \in U_{1,2}$). Каждое из этих отображений определяется системой двух неоднородных квадратичных функций с двумя неизвестными или соответствующей комплексной функцией. Рассматриваются случаи, когда указанные функции являются дифференцируемыми в смысле Коши-Римана или гармоническими в некоторых или во всех точках соответствующих плоскостей L_2^1 или L_2^2. Доказывается существование указанных случаев.

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство E_4, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_j\}$ (j,k,l=1,2,3,4) с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{A} = \omega^j \overline{e}_j,\ d\overline{e}_j = \omega_j^k \overline{e}_k, \qquad D\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j,\ D\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j. \tag{1}$$

Здесь 1-формы ω_k^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0, \tag{2}$$

которые с учетом (1) вытекают из условия ортонормальности репера R:

$$\{\overline{e}_k, \overline{e}_j\} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

где символом $\{\overline{a},\overline{b}\}$ обозначается скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пространства E_4.

В пространстве E_4 рассматривается многообразие $U_{1,2}$ – двумерное многообразие прямых l_1^4. К этому многообразию $V_{2,2}^1$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$l_1^4 = (\overline{A}, \overline{e}_4). \tag{3}$$

В данной статье будет показана возможность применения результатов статьи [1] к многообразию $U_{1,2}$ в четырехмерном евклидовом пространстве E_4.

Из (3) с учетом (1, 2) следует, что на многообразии $U_{1,2}$ выполняются дифференциальные уравнения:

$$\omega^3 = A_\alpha^3 \omega^\alpha,\ \omega_4^f = A_{4\alpha}^f \omega^\alpha \Rightarrow \omega_f^4 = -A_{f\alpha}^4 \omega^\alpha;$$

$$(dA_\beta^3 - A_\gamma^3 \omega_\beta^\gamma + \omega_\beta^3 + (A_\gamma^3 A_{4\beta}^\gamma - A_{4\beta}^3)\omega^4) \wedge \omega^\beta = 0,$$

$$\begin{pmatrix} dA_{4\alpha}^f - A_{4\gamma}^f \omega^\gamma + A_{4\alpha}^h \omega_h^f + \\ + A_{4\beta}^f A_\alpha^3 \omega_3^\beta + A_{4\beta}^f A_{4\alpha}^\beta \omega^4 \end{pmatrix} \wedge \omega^\alpha = 0, \tag{4}$$

$(\alpha, \beta, \gamma = 1,2;\ f,h = 1,2,3)$.

Из (1) с учетом (3) замечаем, что с каждым элементом l_1^4 многообразия $U_{1,2}$ ассоциируется 3-вектор

$$[\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3], \tag{5}$$

ортогональный вектору $\overline{e}_4$ – направляющему вектору прямой l_1^4.

Из $d\overline{e}_4 = \omega_4^f \overline{e}_f = A_{4\alpha}^f \omega^\alpha \overline{e}_f$ получаем, что бивектор

$$[A_{41}^f \overline{e}_f; A_{42}^h \overline{e}_h] \tag{6}$$

параллелен касательной плоскости к сферическому изображению вектора $\overline{e}_4$.

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$A_{4\beta}^3 = 0 \Leftrightarrow \omega_4^3 = 0,\ B = \begin{vmatrix} A_{11}^4 & A_{12}^4 \\ A_{21}^4 & A_{22}^4 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

что с учетом (4) и (1) приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\omega_\alpha^3 = A_{\alpha\beta}^3 \omega^\beta,\ \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \qquad (dA_{\alpha\beta}^3 - A_{\gamma\beta}^3 \omega_\alpha^\gamma - A_{\alpha\gamma}^3 \omega_\beta^\gamma + A_{\alpha\chi}^3 A_{4\beta}^\gamma \omega^4) \wedge \omega^\beta = 0. \tag{8}$$

Из (8) замечаем, что канонизация ортонормального репера R, осуществленная по формулам (7), существует в соответствии с [2]. Геометрически эта канонизация характеризуется тем, что вектор

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] \tag{9}$$

параллелен бивектору (6). При этом из рассмотрения исключается случай B=0, когда бивектор (6) является неопределенным.

Из (5) и (9) следует, что 3-вектор $[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3]$ параллелен бивектору $[\bar{e}_1,\bar{e}_2]$, а вектор $\bar{e}_3$ ортогонален бивектору $[\bar{e}_1,\bar{e}_2]$. Поэтому плоскость

$$L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \tag{10}$$

проходит через прямую $l_1^4=(\bar{A},\bar{e}_4)$ параллельно вектору $\bar{e}_3$.

Проведем дальнейшую канонизацию ортонормального репера R, при которой с учетом [1], (1.6), а также (7) и (8) имеем

$$A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0,\ B \neq 0, \tag{11}$$

что приводит с учетом (1) к соотношениям:

$$\omega^4 = A_\alpha^4 \omega^\alpha,\ (dA_\alpha^4 - A_\beta^4 \omega_\alpha^\beta) \wedge \omega^\alpha = 0.$$

Из (10) и (11) в соответствии с [2] замечаем, что указанная канонизация ортонормального репера R существует.

Как и в [1], см. [1] (5.2), находим уравнение фокусной коники K_2^{34} плоскости $L_2^2=(\bar{A},\bar{e}_3,\bar{e}_4)$:

$$K_2^{34} \subset L_2^2 : (A_{\hat{\alpha}1}^1 A_{\hat{\beta}3}^2 - A_{\hat{\alpha}2}^1 A_{\hat{\beta}1}^2)\, x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} +$$

$$+ A_{\hat{\alpha}\alpha}^\alpha x^{\hat{\alpha}} + 1 = 0,\ x^\alpha = 0.$$

Отсюда получаем, что прямая l_1^4 пересекает конику K_2^{34} в двух точках X_α с радиус-векторами $\bar{X}_\alpha=\bar{A}+t_\alpha\bar{e}_4$, где t_α – корни квадратного уравнения:

$$(A_{41}^1 A_{42}^2 - A_{42}^1 A_{41}^2)\, t^2 + (A_{41}^1 + A_{42}^2)\, t + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что при фиксации (11) точка A является серединой отрезка X_1X_2 (центром луча l_1^4). При этом из рассмотрения исключается случай $B \equiv -(A_{41}^1 A_{41}^1 + A_{42}^1 A_{41}^2) = 0$, когда точки X_α являются, в соответствии с (7) и (11), бесконечно удаленными на прямой l_1^4.

Замечание 1. Так как точка A – центр луча l_1^4, то каждое линейное подпространство

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2),\ L_3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \Rightarrow L_2^1 \subset L_3 \tag{12}$$

геометрически характеризуется тем, что оно проходит через точку A параллельно бивектору (9), 3-вектору (5), соответственно.

Из (10) и (12) следует, что с многообразием $U_{1,2}$ – двумерным многообразием прямых $l_1^4=(\bar{A},\bar{e}_4)$ в E_4 инвариантным образом ассоциируются многообразия $V_{2,2}^1$ и $V_{2,2}^2$, о которых идет речь в [1]. Поэтому к многообразию $U_{1,2}$ можно применить классификацию Коши-Римана многообразий $V_{2,2}^\alpha$, о которой шла речь в [1].

Определение. Многообразием $V_{1,2}^{\alpha r}$, $V_{1,2}^{\alpha a}$, $V_{1,2}^{12r}$, $V_{1,2}^{12a}$ следует называть многообразие $U_{1,2}$, у которого многообразия $V_{2,2}^\alpha$ являются многообразиями $V_{2,2}^{\alpha r}$, $V_{2,2}^{\alpha a}$, $V_{2,2}^{12r}$, $V_{2,2}^{12a}$, соответственно, в смысле определения (4.4) из [1]. Многообразие $V_{2,2}^{1r}$, у которого в каждом элементе точка $F_{1\alpha}$ (см. [1], (4.1)) совпадает с точкой A, называется многообразием $\dot{U}_{1,2}^{12r}$.

Теорема. Многообразие $\dot{U}_{1,2}^{12r}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Проведем канонизацию ортонормального репера R типа ([1], (6.3)), что в силу (7) и (1) приведет к соотношению

$$\omega_1^2 = A_{1\alpha}^2 \omega^\alpha.$$

Из ([1], (4.1, 2.6, 3.1–3.3, 4.2)) и (8) с учетом определения (4.4) из [1] и определения (1) получаем, что многообразие $\dot{U}_{1,2}^{12r}$ определяется конечными соотношениями:

$$\begin{gathered} A_2^3 = A_1^4 = 0,\ A_1^3 = A_2^4 \neq 0,\ B_2^3 = B_4^1 = 0, \\ A_{11}^3 = -A_{22}^3 = -A_{11}^4 = A_{22}^4 = C \neq 0, \\ C^2 + A_{12}^4 A_{21}^4 \neq 0,\ A_{12}^4 + A_{21}^4 + A_{12}^3 + A_{21}^3 = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

в силу которых с учетом соотношения $\omega_1^2=A_{1\alpha}^2\omega_a$ на многообразии $\dot{U}_{1,2}^{12r}$ выполняются дифференциальные уравнения:

$$\begin{gathered} \omega^3 = A_1^3 \omega^1,\ \omega^4 = A_1^3 \omega^2,\ \omega_4^3 = 0, \\ \omega_1^3 = C\omega^1 + A_{12}^3 \omega^2,\ \omega_2^3 = A_{21}^3 \omega^1 - C\omega^2, \\ \omega_1^4 = -C\omega^1 + A_{12}^4 \omega^2,\ \omega_2^4 = A_{21}^4 \omega^1 + C\omega^2, \\ \omega_1^2 = A_{11}^2 \omega^1 + A_{12}^2 \omega^2. \end{gathered} \tag{14}$$

Внешнее дифференцирование системы (13) и использование (1) приводит к дифференциальному уравнению

$$dA_1^3 = \bar{A}_{1\alpha}^3 \omega^\alpha \tag{15}$$

и к квадратичным уравнениям:

$$\begin{gathered} dA_{21}^3 \wedge \omega^1 - dC \wedge \omega^2 = \tilde{A}_{21}^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dC \wedge \omega^1 + dA_{12}^3 \wedge \omega^2 = \tilde{A}_{12}^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ -dC \wedge \omega^1 + dA_{12}^4 \wedge \omega^2 = \tilde{A}_{12}^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dA_{21}^4 \wedge \omega^1 + dC \wedge \omega^2 = \tilde{A}_{21}^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dA_{11}^2 \wedge \omega^1 + dA_{12}^2 \wedge \omega^2 = \tilde{A}_1^2 \omega^1 \wedge \omega^2, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\bar{A}_{12}^3 = (A_{21}^3 - A_{12}^3) + A_1^3 A_{11}^2 - (A_1^3)^2 A_{12}^3 - (A_1^3)^2,$

$$\begin{gathered} \bar{A}_{11}^3 = (A_{21}^4 - A_{12}^4) - A_1^3 A_{12}^3 + (A_1^3)^2 C + (A_1^3)^2 A_{21}^4, \\ \tilde{A}_{21}^3 = -A_{21}^3 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) + \\ + C(A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) - A_{12}^3 + C A_{12}^2, \\ \tilde{A}_{12}^3 = C(-2A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ - A_{12}^3 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{12}^2 A_{21}^3, \\ \tilde{A}_{12}^4 = C(2A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ - A_{12}^4 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{12}^2 A_{21}^4, \\ \tilde{A}_{21}^4 = -A_{21}^4 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ - C(2A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{11}^2 A_{12}^4, \\ \tilde{A}_1^2 = -A_{11}^2 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ - A_{12}^2 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) - (2C^2 + A_{12}^3 A_{21}^3 + A_{12}^4 A_{21}^4). \end{gathered} \tag{17}$$

Внешнее дифференцирование ур. (15) с учетом (1) и (14) приводит к квадратичному уравнению

$$d\overline{A}_{11}^{3} \wedge \omega^{1} + d\overline{A}_{12}^{3} \wedge \omega^{2} = \ddot{A}_{1}^{3}\omega^{1} \wedge \omega^{2}, \tag{18}$$

где
$$\begin{aligned} \ddot{A}_{1}^{3} = &-\overline{A}_{11}^{3}(\overline{A}_{11}^{2} - A_{1}^{3}A_{12}^{3} + A_{1}^{3}C) - \\ &-\overline{A}_{12}^{3}(A_{12}^{2} + A_{11}^{3}C + A_{1}^{3}A_{21}^{4}). \end{aligned} \tag{19}$$

Анализ квадратичных уравнений (16) с учетом (17) и (13) приводит к дифференциальному уравнению:

$$dH = H_{1}\omega^{1} + H_{2}\omega^{2}, \tag{20}$$

где
$$\begin{aligned} H &= A_{12}^{3} + A_{12}^{4} = -A_{21}^{3} - A_{21}^{4}, \\ H_{1} &= \tilde{A}_{12}^{3} + \tilde{A}_{12}^{4} = A_{1}^{3}(C + A_{21}^{4}), \\ H_{2} &= A_{11}^{2}(A_{12}^{2} + 2A_{12}^{4}) + \\ &+ A_{1}^{3}(A_{12}^{3} + A_{12}^{4})(C - A_{12}^{3}) - A_{12}^{3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Внешнее дифференцирование ур. (20) с учетом (1) приводит к квадратичному уравнению

$$dH_{1} \wedge \omega^{1} + dH_{2} \wedge \omega^{2} = H_{12}\omega^{1} \wedge \omega^{2}, \tag{22}$$

где
$$\begin{aligned} H_{12} = &-H_{1}(A_{11}^{2} - A_{1}^{3}A_{12}^{3} + A_{1}^{3}C) + \\ &+ H_{2}(A_{12}^{2} + A_{1}^{3}C + A_{1}^{3}A_{21}^{4}). \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, функции A_{1}^{3}, C, A_{12}^{3}, A_{21}^{3}, A_{12}^{4}, A_{21}^{4}, A_{11}^{2}, A_{12}^{2}, среди которых в силу (13, 15, 17, 20 и 21) будет пять независимых, удовлетворяют пяти независимым квадратичным уравнениям – трем независимым в (16) и двум (18) и (22) с учетом (19) и (23). Поэтому в силу леммы С.В. Бахвалова [3] заключаем, что многообразие $\dot{U}_{1,2}^{12r}$ существует и определяется с произволом пяти функций одного аргумента.

Теорема доказана.

Замечание 2. Поскольку многообразие $\dot{U}_{1,2}^{12r}$ является частным случаем многообразий $U_{1,2}^{\alpha r}$ и $\dot{U}_{1,2}^{1a}$, то эти многообразия существуют. Вопрос о существовании многообразия $U_{1,2}^{12a}$ будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазырина Е.Д. Классификация Коши-Римана двумерных многообразий центрированных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 10–14.
2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
3. Бахвалов С.В. Замечания к методу подвижного трехгранника // Математический сборник. – 1940. – 7(49). – № 2. – С. 321–326.

УДК 530.12:531.51

СМЕЩЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО СВЕЧЕНИЯ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет
E-mail: lav_@list.ru

На основе исследования уравнения геодезических линий в однородной и изотропной Вселенной с метрикой Логунова рассмотрен эффект красного смещения фотонов. Показано, что интерпретация Логунова красного смещения имеет место и в случае вакуумоподобной космологической среды.

Введение

Обычно считается, что для любой нестатической космологической модели собственное расстояние между пробными частицами, измеряемое с помощью приложенной к ним "жесткой линейки", меняется со временем ввиду зависимости $g_{\mu\nu}$ от t. Поэтому считается, что свет, излучаемый частицами (туманностями), испытывает красное смещение из-за Доплер-эффекта, связанного с общим расширением Вселенной, хотя реальность жесткости линейки космологического масштаба сомнительна [1–6].

Принципиально иная интерпретация красного смещения для обычной среды возникает в теории Логунова. Дело в том, что для метрики Логунова [7] смешенные компоненты тензора Риччи равны нулю, так что из уравнений Гильберта-Эйнштейна-Логунова следует, что соответствующие компоненты тензора энергии-импульса космологической жидкости также равны нулю. Отсюда делается вывод [8], что пространственные компоненты скорости равны нулю. Последнее означает, что реально красное смещение связано не с движением галактик, а согласно принципу геометризации Логунова $\tilde{g}_{\mu\nu}=\tilde{\gamma}_{\mu\nu}+\tilde{\Phi}_{\mu\nu}$, с изменением гравитационного поля $\tilde{\Phi}_{\mu\nu}$ со временем, которому, по-видимому, подвержены лишь гравитационные поля скоплений галактик, т.к. только при таком масштабе имеет смысл понятие однородности космологической среды. Изменение же гравитационного поля может быть обусловлено постоянной составляющей скалярного потенциала [9], имитирующей космологическую постоянную.

Так как для вакуумоподобной среды $\varepsilon+p=0$, то из равенства