УДК 514.76

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam@tpu.ru

Инвариантным аналитическим и геометрическим образом строится поле двумерных площадок, ассоциированных с указанным распределением. Доказывается существование конечного числа двумерных площадок, связанных в каждой точке отображением Коши−Римана. Приводится геометрическая характеристика случаев размерности пространства n=6 и n=8.

Ключевые слова:
Евклидово пространство, отображение.
Key words:
Euclidean spaces, mapping.

Введение

Как известно [1], распределения на дифференцируемых многообразиях занимают важное место в теории дифференциально-геометрических структур. Особое место среди распределений линейных подпространств в однородном пространстве занимает распределение двумерных площадок в многомерном евклидовом пространстве. Данная статья посвящена изучению распределения двумерных площадок в n-мерном евклидовом пространстве.

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞.

1. Аналитический аппарат

Рассматривается n-мерное евклидово пространство E_n, отнесенное к ортонормированному реперу $R=(\bar{A},\bar{e}_i)$, $(i,j,k=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\ d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j,$$

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\ D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\ \langle\bar{e}_i;\bar{e}_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0,\ i\neq j,\\1,\ i=j.\end{cases}\qquad(1)$$

Здесь символ $<\bar{x};\bar{y}>$означает скалярное произведение векторов $\bar{x},\bar{y}\in E_n$.

В пространстве E_n задается распределение

$$\Delta_{n,2}^1: A\to L_2=(\bar{A},\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2).\qquad(2)$$

Здесь символом $L_p=(\bar{X},\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,...\bar{x}_p)$ обозначается p-мерная плоскость (p-плоскость) $L_p\subset E_n$, проходящая через точку $X\in E_n$ параллельно линейно независимым векторам $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,...\bar{x}_p$.

В силу (1) и (2) дифференциальные уравнения распределения $\Delta_{n,2}^1$ имеют вид:

$$\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1}\omega^i,\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1=1,\ 2;\ \hat{\alpha}_1,\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\gamma}_1=\overline{3,\ n}),\qquad(3)$$

где величины $A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1}$ образуют внутренний дифференциальный объект в смысле Г.Ф. Лаптева [2] и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1}+A_{\alpha_1 i}^{\hat{\beta}_1}\omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1}-A_{\beta_1 i}^{\hat{\alpha}_1}\omega_{\alpha_1}^{\beta_1}-A_{\alpha_1 j}^{\hat{\alpha}_1}\omega_i^j=A_{\alpha_1 ij}^{\hat{\alpha}_1}\omega^j,$$

$$A_{\alpha_1[i,\ j]}^{\hat{\alpha}_1}=0.\qquad(4)$$

С учетом (1)–(3) замечаем, что в пространстве E_n определено распределение:

$$\Delta_{n,n-2}^2: A\to P_{n-2}^1=(\bar{A},\ \bar{e}_3,\ \bar{e}_4,\ \dots,\ \bar{e}_n)\perp L_2^1\qquad(5)$$

с дифференциальными уравнениями

$$\omega_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}=A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\alpha_1}\omega^i=-\omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}\Rightarrow A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\alpha_1}=-A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1}.\qquad(6)$$

2. Распределение $\Delta^2{}_{n,2}$ в пространстве $E_n(n>4)$

В подпространстве P_{n-2}^1 пространства E_n рассмотрим двумерную площадку L_2^2, которая определяет распределение

$$\Delta_{n,2}^2: A\to L_2^2\subset P_{n-2}^1,\ (n>4),\qquad(7)$$

и задаётся так, что

$$L_2^2=(\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_3,\ \bar{\varepsilon}_4)\Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2}=g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}x^{\alpha_2},\ x^{\alpha_1}=0.\qquad(8)$$

Здесь величины $\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}=\bar{e}_{\alpha_2}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}\bar{e}_{\hat{\alpha}_2}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые являются дифференциальными уравнениями распределения (7)

$$dg_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\beta}_2}\omega_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} - g_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_2}\omega_{\alpha_2}^{\beta_2} + \omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2 i}^{\hat{\alpha}_2}\omega^i,$$

$$(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2 = 3,\ 4;\ \hat{\alpha}_2,\ \hat{\beta}_2,\ \hat{\gamma}_2 = \overline{5,\ n};\ \ n > 4). \qquad (9)$$

Из (1), (5) и (8) следует, что каждой точке $A \in E_n$ (n>4) в P_{n-2}^1 отвечает (n–4)-плоскость

$$P_{n-4}^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_5, \ldots, \bar{\varepsilon}_n) \perp L_2^2 \Leftrightarrow x^{\alpha_2} = g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2} x^{\hat{\alpha}_2},\ x^{\alpha_1} = 0,$$

$$\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_2} = \bar{e}_{\hat{\alpha}_2} + g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}\bar{e}_{\alpha_2},\ g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2} = -g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}. \qquad (10)$$

В пространстве E_n рассматривается кривая $k(t)$, описываемая точкой $A \in E_n$ и определяемая параметрическими уравнениями

$$\omega^i = t^i\theta,\ D\theta = 0. \qquad (11)$$

Здесь величины t^i при фиксированных первичных параметрах, т. е. при ω^i=0, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $\delta t^i + t^j\pi_j^i = 0$, причем δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам [3].

Из (1) и (10) следует, что прямая

$$t = (\bar{A}, \bar{e}_i)\, t^i \qquad (12)$$

является касательной к кривой $k(t)$ в точке A. Поэтому в дальнейшем будем считать, что смещение в направлении (12) (или в направлении t) будет означать смещение по кривой $k(t)$.

Каждой точке $A \in E_n$ поставим в соответствие точки $X \in L_2^1$ и $Y \in L_2^2$ с радиус-векторами

$$\bar{X} = \bar{A} + x^{\alpha_1}\bar{e}_{\alpha_1},\ \ \bar{Y} = \bar{A} + y^{\alpha_2}\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}.$$

Пользуясь (1), (3), (4), (6) и (7)–(11), получаем:

$$\frac{d\bar{X}}{\theta} = (\cdots)^{\beta_1}\bar{e}_{\beta_1} + t^i\,(\delta_i^{\hat{\alpha}_1} + x^{\alpha_1}A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1})\,\bar{e}_{\hat{\alpha}_1}.$$

Символ (...) означает несущественные выражения.

Отсюда получается следующее отображение плоскостей L_2^1 и L_2^2, отвечающее точке $A \in E_n$ при каждом фиксированном направлении (12):

$$F_t^{12} : L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y^{\alpha_2} =$$

$$= \lambda\ [x^{\alpha_1}G_{\alpha_1 i}^{\alpha_2}t^i + (\delta_i^{\alpha_2} + g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}\delta_i^{\hat{\alpha}_2})\ t^i\ ],\ \lambda \neq 0. \qquad (13)$$

Здесь величины $G_{\alpha_1 i}^{\alpha_2}$ определяются по формулам

$$G_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} = A_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} + g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_2} \qquad (14)$$

и в силу (4), (6) и (9) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dG_{\alpha_1 i}^{\alpha_2} + G_{\alpha_1 i}^{\beta_2}\omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - G_{\beta_1 i}^{\alpha_2}\omega_{\alpha_1}^{\beta_1} -$$

$$-G_{\alpha_1 j}^{\alpha_2}\omega_i^j - A_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_2}\omega_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2} = G_{\alpha_1 ij}^{\alpha_2}\omega^j, \qquad (15)$$

причем явный вид величин $G_{\alpha_1 ij}^{\alpha_2}$ для нас несущественный.

Геометрически отображение (13) характеризуется следующим образом [7. С. 34]:

$$y = AY = F_t^{12}X = \{T(X)_{k(t)} \cup L_2^1 \cup P_{n-4}^1\} \cap L_2^2. \qquad (16)$$

Здесь символ $T(Z)_{k(t)}$ означает касательную к линии $(Z)_{k(t)}$, описываемой точкой Z, соответствующей точке $A \in E_n$, вдоль кривой $k(t)$. При этом предполагается, что точка X не является фокусом плоскости L_2^1 в смысле [4] вдоль соответствующего фокального направления (12).

Из (13) замечаем, что отображение F_t^{12}, отвечающее точке $A \in E_n$, при фиксированных t^i определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов.

Определение 2.1. Отображение $F_t^{12}: L_2^1 \to L_2^2$, отвечающее точке $A \in E_n$, называется отображением F_{ta}^{12} или $F_t^{12} \to F_{ta}^{12}$, если определяющие его функции удовлетворяют условиям Коши–Римана [6].

Из (13) получаем, что в соответствии с определением 2.1 отображение F_t^{12} является отображением F_{ta}^{12} тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial y^4}{\partial x^1} \Leftrightarrow F_t^{12} \to F_{ta}^{12} \Leftrightarrow \begin{cases} (G_{1i}^3 - G_{2i}^4)\,t^i = 0, \\ (G_{1i}^4 + G_{2i}^3)\,t^i = 0, \end{cases} \qquad (17)$$

(t^i – фиксированы).

Из (17) в силу (14) и (15) вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Каждой плоскости $L_2^2 \subset P_{n-2}^1$, соответствующей точке $A \in E_n$, в пространстве E_n отвечает (n–2)-плоскость, проходящая через точку A:

$$\Gamma_{n-2} = \{t \in E_n\ \big|F_t^{12} \to F_{ta}^{12}\}. \qquad (18)$$

В соответствии с утверждением 2.1 и с учетом (17) линейное подпространство Γ_{n-2} определяется системой уравнений

$$\begin{cases} (G_{1i}^3 - G_{2i}^4)t^i = 0, \\ (G_{1i}^4 + G_{2i}^3)t^i = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь предполагается, что в общем случае выполняется условие

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} G_{11}^3 - G_{21}^4 & \cdots & G_{1n}^3 - G_{2n}^4 \\ G_{11}^4 + G_{21}^3 & \cdots & G_{1n}^4 + G_{2n}^3 \end{bmatrix} = 2.$$

3. Поля инвариантных площадок $L_2^2 \subset P_{n-2}^1$

В предыдущем разделе рассматривалось отображение $F_t^{12}: L_2^1 \to L_2^2$ при фиксированных t^i, что приводило при таких t^i к системам (17) или (19) при определении G_{n-2}. В данном пункте выясним существование инвариантных площадок L_2^2 в точке $A \in E_n$, при которых $F_t^{12} \to F_{ta}^{12}$ при определенных величинах t^i.

Теорема 3.1. Каждой точке $A \in E_n$ при n>4 в общем случае отвечает конечное число двумерных площадок $L_2^2 \subset P_{n-4}^1$ таких, что

$$F_t^{12} \to F_{ta}^{12},\ \forall t \in P_{n-4}^1 \subset P_{n-2}^1. \qquad (20)$$

Доказательство. Из (12) и (10) следует, что $t \in P_{n-4}^1$ тогда и только тогда, когда

$$t^{\alpha_2} = g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}t^{\hat{\alpha}_2},\quad t^{\alpha_1} = 0$$

$$(\alpha_1 = 1, 2;\ \alpha_2 = 3, 4;\ \hat{\alpha}_2 = \overline{5,\ n}) \qquad (21)$$

Из (14) в силу (17), утверждения 2.1 и (27) получаем, что условие (20) имеет место тогда и только тогда, когда $n_1=2(n-4)$ величин $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$ в точке $A\in E_n$ удовлетворяют следующей системе n_1 неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\varphi_{\hat\alpha_2}\equiv g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}(g^3_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{1\alpha_2}-g^4_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{2\alpha_2})+g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}(A^3_{1\alpha_2}-A^4_{2\alpha_2})+\\ +g^3_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{1\hat\alpha_2}-g^4_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{2\hat\alpha_2}-A^4_{2\hat\alpha_2}+A^3_{1\hat\alpha_2}=0,\\ \psi_{\hat\alpha_2}\equiv g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}(g^3_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{2\alpha_2}+g^4_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{1\alpha_2})+g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}(A^3_{2\alpha_2}+A^4_{1\alpha_2})+\\ +g^4_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{1\hat\alpha_2}+g^3_{\hat\beta_2}A^{\hat\beta_2}_{2\hat\alpha_2}+A^4_{1\hat\alpha_2}+A^3_{2\hat\alpha_2}=0,\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1,\beta_1=1,2;\ \hat\alpha_1,\hat\beta_1=\overline{3,n};\\ \alpha_2,\beta_2=3,4;\ \hat\alpha_2,\hat\beta_2=\overline{5,n}\end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (22):

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_{\hat\alpha_2}}{\partial g^{\beta_2}_{\hat\beta_2}} & \dfrac{\partial\psi_{\hat\alpha_2}}{\partial g^{\beta_2}_{\hat\beta_2}}\end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Подсчитаем ранг матрицы (23) при следующих нулевых значениях величин $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$:

$$g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}=0 \qquad (24)$$

что с учетом (22) приводит к следующим соотношениям:

$$A^4_{2\hat\alpha_2}-A^3_{1\hat\alpha_2}=0,\ A^4_{1\hat\alpha_2}+A^3_{2\hat\alpha_2}=0. \qquad (25)$$

С учетом (22), (24) и (25) замечаем, что в точке $A\in E_n$ ($n>4$) в общем случае существует следующий тождественно ненулевой минор порядка $n_1=2(n-4)$ матрицы (23):

$$B_2\equiv\det\begin{bmatrix}A^{\hat\alpha_2}_{15}\cdots A^{\hat\alpha_2}_{1n} & -A^{\hat\alpha_2}_{25}\cdots-A^{\hat\alpha_2}_{2n}\\ A^{\hat\beta_2}_{25}\cdots A^{\hat\beta_2}_{2n} & A^{\hat\beta_2}_{15}\ \cdots\ A^{\hat\beta_2}_{1n}\end{bmatrix}, \qquad (26)$$

здесь $\hat\alpha_2=\overline{5,n}$ – номера первых $(n-4)$ строк, $\hat\beta_2=\overline{5,n}$ – номера следующих $(n-4)$ строк. Поскольку определитель B_2 порядка $n_1=2(n-4)$ тождественно не равен нулю в точке $A\in E_n$, то система (22) в общем случае состоит из n_1 алгебраически независимых уравнений, а поэтому она допускает в общем случае конечное число решений относительно $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$. Теорема 3.1 доказана.

Отметим некоторые частные случаи.

Теорема 3.2. В общем случае при $n=6$, когда определитель

$$D_4\equiv\begin{vmatrix}A^5_{11} & A^6_{11} & -A^5_{21} & -A^6_{21}\\ A^5_{12} & A^6_{12} & -A^5_{22} & -A^6_{22}\\ A^5_{21} & A^6_{21} & A^5_{11} & A^6_{11}\\ A^5_{22} & A^6_{22} & A^5_{12} & A^6_{12}\end{vmatrix} \qquad (27)$$

не равен тождественно нулю в точке $A\in E_6$, точке A соответствует единственная двумерная площадка

$$\Gamma^1_2=\{t\in L^1_2\,|F_t\to F_{ta}\}. \qquad (28)$$

Доказательство. Из (11), (12) и (2) следует, что $t\in L^1_2$ тогда и только тогда, когда $t^{\hat\alpha_1}=0$. Поэтому с учетом (19) условие (28) выполняется тогда и только тогда, когда $n_1=2(n-4)=2(6-4)=4$ неизвестных $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$ удовлетворяет системе четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases}g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\alpha_1}-g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha_1}=A^4_{2\alpha_1}-A^3_{1\alpha_1},\\ g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\beta_1}+g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\beta_1}=-A^4_{1\beta_1}-A^3_{2\beta_1},\end{cases} \qquad (29)$$

$(\alpha_1,\beta_1=1,2)$ с основным определителем (27), который, как легко видеть, не равен нулю в точке A. Поэтому система (29) имеет в общем случае единственное решение относительно $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$. Теорема 3.2 доказана.

Теорема 3.3. В общем случае при $n=8$ точке $A\in E_8$ отвечает конечное число $(n-4)$-плоскостей

$$\Gamma^2_{n-4}=\{t\in L^1_2\cup L^2_2\,|F_t\to F_{ta}\}. \qquad (30)$$

Доказательство. Как и в теоремах 3.1 и 3.2 показывается, что условие (30) выполняется при $t\in L_2^1\cup L_2^2$ тогда и только тогда, когда $n_1=2(n-4)=$ $=2(8-4)=8$ величин $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$ удовлетворяет системе восьми алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\varphi_{\alpha_1}\equiv g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\alpha_1}-g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha_1}+A^3_{1\alpha_1}-A^4_{2\alpha_1}=0,\\ \psi_{\alpha_1}\equiv g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha_1}+g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\alpha_1}+A^4_{1\alpha_1}+A^3_{2\alpha_1}=0,\\ \varphi_{\alpha_2}\equiv g^{\hat\beta_2}_{\alpha_2}(A^3_{1\hat\beta_2}-A^4_{2\hat\beta_2}+g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\hat\beta_2}-g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\hat\beta_2})+\\ +g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\alpha_2}-g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha_2}+A^3_{1\alpha_2}-A^4_{2\alpha_2}=0,\\ \psi_{\alpha_2}\equiv g^{\hat\beta_2}_{\alpha_2}(A^4_{1\hat\beta_2}+A^3_{2\hat\beta_2}+g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\hat\beta_2}+g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\hat\beta_2})+\\ +g^3_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha_2}+g^4_{\hat\alpha_2}A^{\hat\alpha_2}_{1\alpha_2}+A^4_{1\alpha_2}+A^3_{2\alpha_2}=0,\end{cases}$$

$$(\alpha_1,\beta_1=1,\ 2;\ \hat\alpha_2,\hat\beta_2=\overline{5,\ 8};\ \alpha_2,\beta_2=3,\ 4). \qquad (31)$$

Как и в случае системы (22) доказывается, что система (31) состоит в общем случае из алгебраически независимых уравнений. Поэтому она определяет в общем случае конечное число решений относительно $g^{\hat\alpha_2}_{\alpha_2}=-g^{\alpha_2}_{\hat\alpha_2}$. Теорема 3.3 доказана.

Выше были выделены случаи $n=6$ и $n=8$ инвариантного определения в точке $A\in E_n$ двумерной площадки L_2^2, геометрически отличного от общего случая, о котором идет речь в начале данного раздела. Далее приведем другие геометрические характеристики случаев $n=6$ и $n=8$.

Точке $A\in E_n$ сопоставим точку $Z\in P^1_{n-2}$ с радиус-вектором:

$$\overline{Z}=\overline{A}+z^{\hat\alpha_1}\overline{e}_{\hat\alpha_1}\quad(\hat\alpha_1,\ \hat\beta_1=\overline{3,\ n}).$$

Пусть точка $Z\in P^1_{n-2}$ описывает характеристический элемент $H\subset P^1_{n-2}$ в любом направлении $t\in L_2^1$ ($t^{\hat\alpha_1}=0$), т. е. точка H и вся ее первая дифференциальная окрестность не выходят из P^1_{n-2} вдоль $t\in L_2^1$. Тогда из

$$d\overline{Z}=(\cdots)^{\hat\alpha_1}\overline{e}_{\hat\alpha_1}+t^i(\omega^{\beta_1}+z^{\hat\beta_1}\omega^{\beta_1}_{\hat\beta_1})\overline{e}_{\beta_1} \qquad (32)$$

с учетом (6) и (11) при любом $t^{\hat\alpha_1}$ получаем следующую систему четырех линейных уравнений с $(n-2)$ неизвестными $z^{\hat\alpha_1}$, определяющих характеристический элемент $H_{n-6}\subset P^1_{n-2}$:

$$H_{n-6}\Leftrightarrow z^{\hat\alpha_1}A^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1\beta_1}+\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}=0,\ z^{\gamma_1}=0,$$
$$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1=1,\ 2;\ \hat\alpha_1=\overline{3,\ n}). \qquad (33)$$

Из (33) и (32) следует, что (n–6)-плоскость $H_{n-6}\subset P^1_{n-2}$ существует при $n-2\geq 4\Leftrightarrow n\geq 6$. В частности, в пространстве E_6 подпространство H_{n-6} является точкой $H_0\subset P_4^1$, в пространстве E_7 – прямой $H_1\subset P_5^1$, в пространстве E_8 – двумерной площадкой $H_2\subset P_6^1$ и т. д.

Из (32) в соответствии с [4] и с учетом (33), (2) и (3) заключаем, что множество всех фокусов $Z\in P^1_{n-2}$ вдоль фокальных направлений $t\in L_2^1$, отвечающих точке $A\in E_n$, образует фокусный конус K^2_{n-3} второго порядка с вершиной $H_{n-6}\subset P^1_{n-2}(n>6)$:

$$K^2_{n-3}:\quad A_{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1} z^{\hat{\alpha}_1} z^{\hat{\beta}_1} + A^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}_1\alpha_1} z^{\hat{\alpha}_1} + 2 = 0, \qquad (34)$$

где

$$A_{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1} = \frac{1}{2}\left(A^1_{(\hat{\alpha}_1|1|}A^2_{\hat{\beta}_1)2} - A^2_{(\hat{\beta}_1|1|}A^1_{\hat{\alpha}_1)2}\right). \qquad (35)$$

Проведем в точке $A\in E_n$ такую канонизацию ортогонального репера $R=\{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, при которой имеют место соотношения (25) и $B_2\neq 0$ (см. (26)). Из (4), (14), (15), (24) и $B_2\neq 0$ получаем

$$\omega^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2} = A^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2 i}\omega^i,$$

$$dA^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2 i} + A^{\hat{\beta}_2}_{\alpha_2 i}\omega^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_2} - A^{\hat{\alpha}_2}_{\beta_2 i}\omega^{\beta_2}_{\alpha_2} - A^{\hat{\alpha}_2}_{\beta_2 j}\,\omega_i^{\ j} = A^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2 ij}\,\omega^j.$$

Здесь явный вид величин $A^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2 ij}$ для нас несущественный, причем в силу (1) имеем

$$\omega^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2} = -\omega^{\alpha_2}_{\hat{\alpha}_2} = -A^{\alpha_2}_{\hat{\alpha}_2 i}\omega^i \Leftrightarrow A^{\alpha_2}_{\hat{\alpha}_2 i} = -A^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2 i}. \qquad (36)$$

Из (34) следует, что канонизация ортонормального репера R, осуществленная по формулам (25) и $B_2\neq 0$, в соответствии с [5] существует на любом распределении $\Delta^1_{n,2}:A\to L^1_2$, на котором $B_2\neq 0$. В соответствии с теоремой 3.1 и с учетом (24), (25), (8), (10) и (14) эта канонизация характеризуется тем, что

$$L^2_2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \perp P^1_{n-4} = (\bar{A}, \bar{e}_5, \ldots, \bar{e}_n), \ (n>4). \qquad (37)$$

Здесь плоскость L_2^2 в точке $A\in E_n$ геометрически определена в теореме 3.1. В случае B=0 плоскость L^2_2 определяется бесконечным числом способов.

Замечание 3.1. Из (25) и (3) следует, что в точке $A\in E_n$ имеют место дифференциальные уравнения:

$$\omega_2^4 - \omega_1^3 = (A^4_{2\alpha_{12}} - A^3_{1\alpha_{12}})\,\omega^{\alpha_{12}},$$
$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = (A^4_{1\alpha_{12}} + A^3_{2\alpha_{12}})\,\omega^{\alpha_{12}},$$
$$(\alpha_{12},\ \beta_{12},\ \gamma_{12} = 1, 2, 3, 4). \qquad (38)$$

Замечание 3.2. Из (5), (19), (36), (25) и того, что ранг матрицы (23) равен двум, следует, что

$$\Gamma_{n-2}\cap\Gamma^1_{n-2} = \Gamma^1_{n-4} = (\bar{A}, \bar{e}_5, \ldots, \bar{e}_n).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4. Пусть в точке $A\in E_n$ выполняются условия:

1. Двумерная площадка $L_2^2\subset P^1_{n-2}$, о которой идёт речь в теореме 3.3, не принадлежит H_{n-6} (n>8); не содержит H_0 (n=6), не содержит H_1 (n=7) H_1 (n=7); не совпадает с H_2 (n=8).

2. Функции, определяющие отображение F_t^{12}: $L^1_2\to L^2_2$, удовлетворяют условиям Коши–Римана при любом $t\in E_n$.

3. Распределение $\Delta^1_{n,2}:A\to L^1_2$ является голономным [1].

Тогда коника $Q_1^2=L^1_2\cap K^2_{n-3}$ является окружностью с центром в точке $A\in E_n$.

Доказательство. Из (1)–(3) следует, что интегральные кривые, описываемые точкой $A\in E_n$ и принадлежащие распределению $\Delta^1_{n,2}$ в смысле [1], определяются дифференциальными уравнениями Пфаффа

$$\omega^{\hat{\alpha}_1} = 0. \qquad (39)$$

С учётом (1) и в соответствии с [1] заключаем, что система (41) является вполне интегрируемой, т. е. распределение $\Delta^1_{n,2}$ является голоморфным, тогда и только тогда, когда

$$D\omega^{\hat{\alpha}_1}\wedge\omega^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1} = 0 \Leftrightarrow A^{\hat{\alpha}_1}_{12} = A^{\hat{\alpha}_1}_{21}. \qquad (40)$$

Из (13)–(17), (25), (38) и (40) с учётом (39) и условия 2 теоремы, заключаем, что в точке $A\in E_n$ выполняются соотношения

$$A^4_{2\alpha_1} = A^3_{1\alpha_1},\ A^4_{1\alpha_1} = -A^3_{2\alpha_1},\ A^{\alpha_2}_{12} = A^{\alpha_2}_{21}.$$

Тогда из (35) получаем следующие соотношения

$$A_{34} = 0,\ A_{33} = A_{44} = -(A^1_{31})^2 - (A^1_{41})^2.$$

Поэтому из (34) и (37) следует, что коника Q_1^2, о которой идёт речь в настоящей теореме, определяется уравнениями

$$Q^2_1 \Leftrightarrow (x^3)^2 + (x^4)^2 = r^2,\ x^{\alpha_1} = 0,\ x^{\hat{\alpha}_2} = 0,$$

где

$$r = \frac{1}{\sqrt{(A^1_{31})^2 + (A^1_{41})^2}}.$$

Это означает, что Q_1^2 – окружность с центром в точке A радиуса r. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
4. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
6. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центрированных 2-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве E_m(m>4) // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 4. – С. 5–9.
7. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Сер. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.

Поступила 28.03.2011 г.