Теорема. Главная и дополнительные экспоненты целочисленного нечётного порядка k образуют k-мерное линейное пространство относительно операции сложения и умножения на число.

Теорема. Главная и все дополнительные экспоненты порядка k образуют линейно независимую систему функций. Это следует из того, что определитель Вронского отличен от нуля

$$W_k = \det(\exp_k^{(p|\mu)}(x)) \neq 0.$$

Теорема. Всё экспоненты порядка нецелочисленных порядков и целочисленного порядка, равного единице, образуют одномерное линейное пространство.

Исходя из полученных результатов, можно сформулировать утверждение.

Теорема. Любая линейная комбинация инвариантных функций является инвариантной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Особенности некоторых элементарных функций дробного анализа целочисленных порядков // Перспективы развития фундаментальных наук: Труды VII Международ. конф. студентов и молодых учёных. – Томск, 20–23 апреля 2010 г. – Томск, 2010. – С. 536–537.
2. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
3. Чуриков В.А. Экспоненциальное вырождение в дробном анализе целочисленных порядков // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Междунар. Российско-Болгарского симп. – г. Нальчик, аул Хабез, 25–30 июня, 2010 г. – Нальчик, 2010. – С. 251–254.
4. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.

Поступила 29.08.2011 г.

УДК 621.52+511.52

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДТ-АНАЛОГА *L*(*t*)*R*(*t*)-АЛГОРИТМА

С.О. Симонян, А.К. Василян, М.Д. Тамазян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван

E-mail: cybinf@seua.am; ssimonyan@seua.am; aram028@yahoo.com; mher.tamazyan@gmail.com

Предложен простой численно-аналитический метод, с помощью которого легко определяются характеристические показатели матрицы монодромии.

Ключевые слова:
Неавтономная матрица, собственные значения-функции, матрица монодромии, дифференциально-тейлоровские преобразования, характеристические показатели.

Key words:
Non-autonomous matrix, own values-functions, monodrom matrix, differential-Taylor transformation, characteristical showings.

Введение. Допустим, что мы имеем неавтономную систему с периодическими коэффициентами, которая задана в следующем виде [1]

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \tag{1}$$

где $A(t)=(a_{ij}(t))$, $i,j=\overline{1,n}$, $X(t)=(x_1,(t),...,x_n(t))^T$ а элементы матрицы $A(t)$ периодические, т. е. $A(t+T)=A(t)$, где T – период.

Пусть $\Phi(T,t)$ – матрица монодромии системы (1), которая имеет вид [2]

$$\Phi(T,t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(T,t) & \varphi_{12}(T,t) & \cdots & \varphi_{1n}(T,t) \\ \varphi_{21}(T,t) & \varphi_{22}(T,t) & \cdots & \varphi_{2n}(T,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(T,t) & \varphi_{n2}(T,t) & \cdots & \varphi_{nn}(T,t) \end{bmatrix},$$

а

$$P(\lambda(t)) =$$
$$= (\lambda(t) - \lambda_1(t))^{m_1}(\lambda(t) - \lambda_2(t))^{m_2}\cdots(\lambda(t) - \lambda_k(t))^{m_k},$$
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m \leq n$$

– минимальный многочлен матрицы $\Phi(T,t)$ [3]. Функции

$$b_j(t) = \frac{1}{T}\ln\lambda_j(t), \quad j = \overline{1,k}, \tag{2}$$

где T – период; $\lambda_j(t)$; $i=\overline{1,k}$ – собственные значения-функции матрицы $\Phi(T,t)$ – называются характеристическими показателями решений системы (1).

Согласно [3], зная значения характеристических показателей, можно говорить об устойчивости системы (1). Будем искать характеристические показатели (2) для неавтономных матриц с помощью ДТ-аналога $L(t)R(t)$-алгоритма [4].

LR алгоритм [4] предназначен для разложения автономных матриц $A=(a_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ на множители – матрицы L и R, при которых

$$A = LR,$$

где L – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали порядка n, а R – верхняя треугольная матрица порядка n.

<u>$L(t)R(t)$-алгоритм и ДТ-преобразования.</u> Не вдаваясь в подробности, по аналогии LR-алгоритма для автономных матриц [4], представим соответствующую последовательность вычислительных операций с целью нахождения собственных значений-функций $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ для неавтономных матриц $A(t)=(a_{ij}(t))$, $i, j=\overline{1,n}$. Имеем [4]:

<u>Шаг 1.</u> Рассчитываются неизвестные элементы первой строки матрицы $R(t)$:

$$R_{1k}(t) = A_{1k}(t), \quad k = 1,n.$$

<u>Шаг 2.</u> Рассчитываются неизвестные элементы первого столбца матрицы $L(t)$:

$$L_{i1}(t) = A_{i1}(t) / R_{11}(t), \quad i = \overline{2,n}.$$

<u>Шаг 3.</u> Рассчитываются неизвестные элементы второй строки матрицы $R(t)$:

$$R_{2k}(t) = A_{2k}(t) - L_{21}(t)R_{1k}(t), \quad k = 2,n.$$

<u>Шаг 4.</u> Рассчитываются неизвестные элементы второго столбца матрицы $L(t)$:

$$L_{i2}(t) = (A_{i_2}(t) - L_{i1}(t)R_{12}(t)) / R_{22}(t), \quad i = \overline{3,n}.$$

....

Далее рассчитываются неизвестные элементы i-й строки матрицы $R(t)$:

$$R_{ik}(t) = A_{ik}(t) - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}(t)R_{jk}(t),$$

$$k \geq i > 1, \; i = \overline{3,n}, \; k = \overline{2,n},$$

а затем – неизвестные элементы i-го столбца матрицы $L(t)$:

$$L_{ik}(t) = (A_{ik}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}(t)R_{jk}(t)) / R_{kk}(t),$$

$$1 < k < i, \quad i = \overline{3,n}, \quad k = \overline{2,n}.$$

Чтобы получить собственные значения – функции $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ матрицы $A(t)$, надо рассчитывать также следующую последовательность:

$$A_1(t) = A(t), \quad R_1(t) = R(t), \quad L_1(t) = L(t),$$

$$A_{m+1}(t) = R_m(t) \cdot L_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и если $m \to \infty$, тогда матрица $A_{m+1}(t)$ становится диагональной, при которой ее диагональные элементы и являются собственными значениями функции матрицы $A(t)$.

Очевидно, что использование $L(t)R(t)$-алгоритма в приведенном виде при практических расчетах нецелесообразно или вообще невозможно (особенно при более или менее больших размерах матриц $A(t)$). Поэтому, имея ввиду неоспоримые преимущества дифференциальных преобразований [5] при решении неавтономных задач, для решения рассматриваемой проблемы в настоящей работе представим ДТ-аналог $L(t)R(t)$-алгоритма с использованием дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразований [6]:

$$X(K) = H \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K}_{|t=t_\upsilon},$$

$$K = \overline{0,\infty} \quad \risingdotseq \quad x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\upsilon}{H} \right)^K \cdot X(K),$$

где $X(K)$ – изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ (функция целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$); H – некоторая постоянная (масштабный коэффициент); t_v – центр аппроксимации; $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот.

<u>Математический аппарат ДТ-аналога $L(t)R(t)$-алгоритма.</u> С учетом [4] применительно к матрице $\Phi(T,t)$ имеем:

$$\Phi_1(T,0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{(1)}(T,t) & \Phi_{12}^{(1)}(T,t) & \cdots & \Phi_{1n}^{(1)}(T,t) \\ \Phi_{21}^{(1)}(T,t) & \Phi_{22}^{(1)}(T,t) & \cdots & \Phi_{2n}^{(1)}(T,t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_{n1}^{(1)}(T,t) & \Phi_{n2}^{(1)}(T,t) & \cdots & \Phi_{nn}^{(1)}(T,t) \end{bmatrix}_{t=t_0},$$

....

где $\Phi_{ij}^{(1)}(T,t)=\Phi_{ij}(T,t)$, $i,j=\overline{1,n}$, а

$$\Phi_1(T,K) = \frac{H^K}{K!} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial^K \Phi_{11}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \frac{\partial^K \Phi_{12}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \cdots & \frac{\partial^K \Phi_{1n}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} \\ \frac{\partial^K \Phi_{21}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \frac{\partial^K \Phi_{22}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \cdots & \frac{\partial^K \Phi_{2n}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^K \Phi_{n1}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \frac{\partial^K \Phi_{n2}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} & \cdots & \frac{\partial^K \Phi_{nn}^{(1)}(T,t)}{\partial t^K} \end{bmatrix}_{t=t_0},$$

$$K = \overline{1,\infty}.$$

Кроме того, согласно [2] имеем $\Phi_{ij}^{(1)}(q+l)=\Phi_{ij}^{(1)}(l)$, $l=\overline{1,q}$, где q – некоторое число, зависящее от конкретных характеристик элементов исходной матрицы.

Далее, для каждой из $\Phi_1(T,K)$, $K=\overline{0,\infty}$ матриц осуществим следующую последовательность вычислительных операций:

<u>Шаг 1.</u> Рассчитываем неизвестные элементы первой строки матрицы $R(K)$:

$$R_{1k}(K) = \Phi_{1k}^{(1)}(T,K), \; k = \overline{1,n}, \; K = \overline{0,\infty}.$$

<u>Шаг 2.</u> Рассчитываем неизвестные элементы первого столбца матрицы $L(K)$:

$$L_{i1}(K) = \left| \Phi_{i1}^{(1)}(T,K) / R_{11}(K) \right| =$$

$$= \frac{\Phi_{i1}^{(1)}(T,K) - \sum_{l=1}^{K} \Phi_{i1}^{(1)}(T,K-l) \cdot R_{11}(l)}{R_{11}(0)},$$

$$i = \overline{2,n}, \; K = \overline{0,\infty}.$$

Здесь и далее знак $|\div|$ – знак T-деления [6].

Шаг 3. Рассчитываем неизвестные элементы второй строки матрицы $R(K)$:

$$R_{2k}(K) = \Phi^{(1)}_{2k}(T,K) - L_{21}(K)\cdot R_{1k}(K) =$$

$$= \Phi^{(1)}_{2k}(T,K) - \sum_{l=0}^{K} L_{21}(K-l)\cdot R_{1k}(l),$$

$$k=\overline{2,n},\ K=\overline{0,\infty}.$$

Здесь и далее знак – знак T – умножение (свертка) [6].

Шаг 4. Рассчитываем неизвестные элементы второго столбца матрицы $L(K)$:

$$L_{i2}(K) = \left|\frac{[\Phi^{(1)}_{i2}(T,K) - L(K)_{i1}\cdot R_{12}(K)]}{R_{22}(K)}\right| =$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{l}\Phi^{(1)}_{i2}(T,K) - \sum\limits_{l=0}^{K} L(K-l)_{i1}\cdot R_{12}(l) - \\ -\sum\limits_{l=1}^{K}\left(\left[\Phi^{(1)}_{i2}(T,K) - \sum\limits_{p=0}^{K} L(K-p)_{i1}\cdot R_{12}(p)\right]\times \right. \\ \left. \times R_{22}(l)\right)\end{array}\right)}{R_{22}(0)},$$

$$i=\overline{3,n}, K=\overline{0,\infty}.$$

....

Далее рассчитываем неизвестные элементы i-й строки матрицы $R(K)$:

$$R_{ik}(K) = \Phi^{(1)}_{ik}(T,K) - \sum_{j=1}^{i-1}(L_{ij}(K)\cdot R_{jk}(K)) =$$

$$= \Phi^{(1)}_{ik}(T,K) - \sum_{j=1}^{i-1}\left(\sum_{l=0}^{K} L_{ij}(K-l)\cdot R_{jk}(l)\right),$$

$$k \ge i > 1,\ i=\overline{3,n},\ k=\overline{2,n},\ K=\overline{0,\infty},$$

а потом – неизвестные элементы i-го столбца матрицы $L(K)$:

$$L_{ik}(K) = \left|\frac{\left[\Phi^{(1)}_{ik}(T,K) - \sum\limits_{j=1}^{k-1}(L(K)_{ij}\cdot R_{jk}(K))\right]}{R_{kk}(K)}\right| =$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{l}\Phi^{(1)}_{ik}(T,K) - \sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\sum\limits_{l=0}^{K} L(K-l)_{ij}\cdot R_{jk}(l)\right) - \\ -\sum\limits_{l=1}^{K}\left(\left[\Phi^{(1)}_{ik}(T,K) - \sum\limits_{p=0}^{K} L(K-p)_{ij}\cdot R_{jk}(p)\right]\times \right. \\ \left. \times R_{kk}(l)\right)\end{array}\right)}{R_{kk}(0)},$$

$$1<k<i,\ i=\overline{3,n},\ k=\overline{2,n},\ K=\overline{0,\infty}.$$

Чтобы получить собственные значения матриц $\Phi_1(T,K)$, $K=\overline{0,\infty}$ необходимо рассчитывать также следующую последовательность:

$$\Phi_{m+1}(T,K) = R_m(K)\cdot L_m(K), \qquad m=1,2,3,$$

и, если $m\to\infty$, то матрица $\Phi_{m+1}(T,K)$ становится диагональной, а ее элементы являются собственными значениями $\lambda_i(K)$, $i=\overline{1,n}$ матриц $\Phi_1(T,K)$, $K=\overline{0,\infty}$.

Собственные значения-функции $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ матрицы $\Phi(T,t)$ будем искать, используя обратные ДТ-преобразования [6], в соответствии с которыми

$$\lambda_i(t) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_\upsilon}{H}\right)^K\cdot\lambda_i(K),\quad i=\overline{1,n}.$$

Пример. Рассмотрим матрицу

$$\Phi(T,t) = \begin{bmatrix}\cos t & 1\\ 0 & \sin t\end{bmatrix},$$

для которой очевидно $T=2\pi$, $\lambda_1(t)=\cos t$, $\lambda_2(t)=\sin t$, а характеристические показатели имеют вид:

$$b_1(t) = \frac{1}{T}\ln\lambda_1(t) = \frac{1}{T}\ln\cos t,$$

$$b_2(t) = \frac{1}{T}\ln\lambda_2(t) = \frac{1}{T}\ln\sin t.$$

Используя ДТ-преобразования ($t_0=0$, $H=1$) и отпустив период $T=2\pi$, имеем: $\Phi_1(T,t)=\Phi(T,t)$, откуда:

$$\Phi_1(0) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(0) & \Phi^{(1)}_{12}(0)\\ \Phi^{(1)}_{21}(0) & \Phi^{(1)}_{22}(0)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\cos 0 & 1\\ 0 & \sin 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(1) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(1) & \Phi^{(1)}_{12}(1)\\ \Phi^{(1)}_{21}(1) & \Phi^{(1)}_{22}(1)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-\sin 0 & 0\\ 0 & \cos 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(2) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(2) & \Phi^{(1)}_{12}(2)\\ \Phi^{(1)}_{21}(2) & \Phi^{(1)}_{22}(2)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-\cos 0 & 0\\ 0 & -\sin 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(3) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(3) & \Phi^{(1)}_{12}(3)\\ \Phi^{(1)}_{21}(3) & \Phi^{(1)}_{22}(3)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}\sin 0 & 0\\ 0 & -\cos 0\end{bmatrix} = \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(4) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(4) & \Phi^{(1)}_{12}(4)\\ \Phi^{(1)}_{21}(4) & \Phi^{(1)}_{22}(4)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4!}\begin{bmatrix}\cos 0 & 0\\ 0 & \sin 0\end{bmatrix} = \frac{1}{4!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(K) = \begin{bmatrix}\Phi^{(1)}_{11}(K) & \Phi^{(1)}_{12}(K)\\ \Phi^{(1)}_{21}(K) & \Phi^{(1)}_{22}(K)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(K-4)!}{K!}\Phi_1(K-4),\quad K=\overline{5,\infty}.$$

Элементы первой строки матрицы $R(0)$:

$$R_{11}(0) = \Phi^{(1)}_{11}(0) = 1,\ R_{12}(0) = \Phi^{(1)}_{12}(0) = 1,$$

а элементы первых строк матриц $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, $R(4)$:

$$R_{11}(1)=0,\ R_{12}(1)=0;\ \ R_{11}(2)=-1/2!,\ R_{12}(2)=0;$$

$$R_{11}(3)=0,\ R_{12}(3)=0;\ \ R_{11}(4)=1/4!,\ R_{12}(4)=0.$$

Первый столбец матрицы $L(0)$ имеет вид:

$$L_{11}(0)=1, L_{21}(0)=\left|\Phi_{21}^{(1)}(0)/R_{11}(0)\right|=0,$$

а элементы первых столбцов матриц $L(1)$, $L(2)$, $L(3)$, $L(4)$:

$$L_{11}(1)=0, L_{21}(1)=0;\ \ L_{11}(2)=0, L_{21}(2)=0;$$

$$L_{11}(3)=0, L_{21}(3)=0;\ \ L_{11}(4)=0, L_{21}(4)=0.$$

Теперь вычислим элементы второй строки матрицы $R(0)$. Имеем:

$$R_{21}(0)=0, R_{22}(0)=\Phi_{22}^{(1)}(0)-L_{21}(0)R_{12}(0)=0-0=0,$$

а элементы вторых строк матриц $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, $R(4)$:

$$R_{21}(1)=0, R_{22}(1)=1;\ \ R_{21}(2)=0, R_{22}(0)=0;$$

$$R_{21}(3)=0, R_{22}(3)=-1/3!;\ \ R_{21}(4)=0, R_{22}(4)=0.$$

Второй столбец матрицы $L(0)$ имеет вид:

$$L_{12}(0)=0, L_{22}(0)=1,$$

а элементы вторых столбцов матриц $L(1)$, $L(2)$, $L(3)$, $L(4)$:

$$L_{12}(1)=0,\ L_{22}(1)=0;\ L_{12}(2)=0,\ L_{22}(2)=0;$$

$$L_{12}(3)=0,\ L_{22}(3)=0;\ L_{12}(4)=0,\ L_{22}(4)=0.$$

Следовательно, матрицы $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, $R(4)$ и $L(1)$, $L(2)$, $L(3)$, $L(4)$ соответственно имеют вид:

$$R(0)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, R(1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, R(2)=\begin{bmatrix}-1/2!&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$R(3)=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1/3!\end{bmatrix}, R(4)=\begin{bmatrix}1/4!&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$L(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, L(1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, L(2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$L(3)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, L(4)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

На следующей итерации имеем:

$$\Phi_2(0)=R(0)L(0)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_2(1)=R(1)L(0)+R(0)L(1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, \Phi_2(2)=$$

$$=R(2)L(0)+R(1)L(1)+R(0)L(2)=$$

$$=\begin{bmatrix}-1/2!&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_2(3)=R(3)L(0)+R(2)L(1)+R(1)L(2)+R(0)L(3)=$$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1/3!\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1/2!&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

$$\Phi_2(4)=R(4)L(0)+R(3)L(1)+R(2)L(2)+R(1)L(3)+$$

$$+R(0)L(4)=\begin{bmatrix}1/4!&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&-1/3!\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-1/2!&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{4!}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Так как очевидно, что

$$\Phi_2(0)=\Phi_1(0),\ \text{то}\ \ \lambda_1(0)=1, \lambda_2(0)=0;$$

$$\Phi_2(1)=\Phi_1(1),\ \ \lambda_1(1)=0, \lambda_2(1)=1;$$

$$\Phi_2(2)=\Phi_1(2),\ \ \lambda_1(2)=-1/2!, \lambda_2(2)=0;$$

$$\Phi_2(3)=\Phi_1(3),\ \ \lambda_1(3)=0, \lambda_2(3)=-1/3!;$$

$$\Phi_2(4)=\Phi_1(4),\ \ \lambda_1(3)=1/4!, \lambda_2(3)=0,$$

то в соответствии с обратными дифференциально-тейлоровскими преобразованиями получим:

$$\lambda_1(t)=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots=\cos t,$$

$$\lambda_2(t)=t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+\cdots=\sin t.$$

Следовательно:

$$b_1(t)=\frac{1}{T}\ln\cos t,\quad b_2(t)=\frac{1}{T}\ln\sin t,$$

которые полностью совпадают с вышеприведенными точными аналитическими соотношениями.

Заключение. Предложенный ДТ-аналог $L(t)R(t)$-алгоритма достаточно прост при реализации на ЭВМ и обычно требует меньше итерационных шагов, чем ДТ-аналог $Q(t)R(t)$-алгоритма. Он может быть эффективно использован для вычисления характеристических показателей матриц монодромии неавтономных периодических матриц различных динамических систем для исследования вопросов устойчивости последних.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.
2. Василян А.К. К вычислению коэффициентов-функций собственных многочленов матриц монодромии на основе дифференциальных преобразований // Вестник Инженерной Академии Армении. – 2011. – Т. 8. – № 2. – С. 175–179.
3. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
4. Богачев К.Ю. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 137 с.
5. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 360 с.
6. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
7. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Бадалян Г.А. QR[ДП] – алгоритм для разложения неавтономных матриц. // Вестник Инженерной Академии Армении. – 2004. – Т. 1. – С. 122–129.

Поступила 09.06.2011 г.

УДК 519.6

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО КВАЗИСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.А. Орлов, В.И. Рейзлин

Томский политехнический университет
E-mail: vir@tpu.ru

Рассматривается семейство равномерно распределенных последовательностей, обобщающих аналогичные конструкции Рота, Фора, Соболя. Доказывается, что все их последовательные участки определенной длины имеют хорошее распределение. Построенные последовательности могут использоваться в алгоритмах глобального поиска и прочих в качестве альтернативных к популярным ЛП$_\tau$-последовательностям.

Ключевые слова:
Квазислучайные последовательности, двоичные, p-ичные и ЛП-последовательности.

Key words:
Quasi-random sequences, binary, p-ary and an AS-sequence.

Равномерно распределенные последовательности с наилучшей (по порядку) асимптотикой часто называют квазислучайными. Именно такие последовательности (с некоторыми дополнительными свойствами равномерности) используют на практике для реализации алгоритмов Монте-Карло (так называемый метод квази-Монте-Карло), для вычисления многомерных интегралов, в случайном поиске, в задачах многокритериальной оптимизации, в планировании экспериментов и др. Свойства таких последовательностей и их исследование рассмотрены в [1–3]. В некоторых задачах, например таких, как построение равномерно распределенных векторов в конусе [4], важно не столько свойство независимости векторов, как свойство именно равномерности.

В настоящей статье рассматривается построение таких последовательностей для небольших n, где n – число членов последовательности.

Квазислучайными, в отличие от псевдослучайных, называют равномерно распределенные последовательности, элементы которых не обладают свойством независимости.

Последовательность X_n точек из d-мерного куба $I^d=[0,1)\times...\times[0,1)$ называется равномерно распределенной в I^d, если для любого блока $B=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times...\times\times[a_d,b_d)$, где $0\le a_i$, $b_i\le 1$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|X_n\cap B|}{n}=\prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i),$$

где $\prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i)$ означает копроизведение. Другими словами, последовательность равномерно распределена, если при больших n количество ее точек, попавших в какой-либо блок, пропорционально его объему. Если разбить куб на несколько равновеликих частей, то в каждой из них (при достаточно больших n) окажется примерно одинаковое число точек последовательности.

Однако для практических задач важно, чтобы равномерно распределенные последовательности обладали указанными свойствами не только для больших, но и для малых значений n.

Семейство последовательностей, рассматриваемых в настоящей работе, обобщает двоичные последовательности Ван дер Корпута и Рота и p-ичные последовательности Фора [5]. Эти последовательности в отечественной литературе называют, следуя И.М. Соболю [6–8], ЛП$_0$-последовательностями. Не отступая от традиции, распространим это название и на наши конструкции, т. к. обозначение «ЛП» в нашем контексте может означать, что *любой последовательный* участок X_n хорошо распределен.

Пусть $q=p^n$, где p – простое число. Назовем q-ичными отрезками ранга s интервалы $\dfrac{t}{q^s}+\left[0,\dfrac{1}{q^s}\right)$,