СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.
2. Василян А.К. К вычислению коэффициентов-функций собственных многочленов матриц монодромии на основе дифференциальных преобразований // Вестник Инженерной Академии Армении. – 2011. – Т. 8. – № 2. – С. 175–179.
3. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
4. Богачев К.Ю. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 137 с.
5. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 360 с.
6. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
7. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Бадалян Г.А. $QR^{ДП}$ – алгоритм для разложения неавтономных матриц. // Вестник Инженерной Академии Армении. – 2004. – Т. 1. – С. 122–129.

Поступила 09.06.2011 г.

УДК 519.6

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО КВАЗИСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.А. Орлов, В.И. Рейзлин

Томский политехнический университет
E-mail: vir@tpu.ru

Рассматривается семейство равномерно распределенных последовательностей, обобщающих аналогичные конструкции Рота, Фора, Соболя. Доказывается, что все их последовательные участки определенной длины имеют хорошее распределение. Построенные последовательности могут использоваться в алгоритмах глобального поиска и прочих в качестве альтернативных к популярным ЛП$_\tau$-последовательностям.

Ключевые слова:
Квазислучайные последовательности, двоичные, р-ичные и ЛП-последовательности.
Key words:
Quasi-random sequences, binary, p-ary and an AS-sequence.

Равномерно распределенные последовательности с наилучшей (по порядку) асимптотикой часто называют квазислучайными. Именно такие последовательности (с некоторыми дополнительными свойствами равномерности) используют на практике для реализации алгоритмов Монте-Карло (так называемый метод квази-Монте-Карло), для вычисления многомерных интегралов, в случайном поиске, в задачах многокритериальной оптимизации, в планировании экспериментов и др. Свойства таких последовательностей и их исследование рассмотрены в [1–3]. В некоторых задачах, например таких, как построение равномерно распределенных векторов в конусе [4], важно не столько свойство независимости векторов, как свойство именно равномерности.

В настоящей статье рассматривается построение таких последовательностей для небольших n, где n – число членов последовательности.

Квазислучайными, в отличие от псевдослучайных, называют равномерно распределенные последовательности, элементы которых не обладают свойством независимости.

Последовательность X_n точек из d-мерного куба $I^d=[0,1)\times...\times[0,1)$ называется равномерно распределенной в I^d, если для любого блока $B=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times...\times[a_d,b_d)$, где $0\le a_i$, $b_i\le 1$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|X_n\cap B|}{n}=\coprod_{i=1}^{d}(b_i-a_i),$$

где $\coprod_{i=1}^{d}(b_i-a_i)$ означает копроизведение. Другими словами, последовательность равномерно распределена, если при больших n количество ее точек, попавших в какой-либо блок, пропорционально его объему. Если разбить куб на несколько равновеликих частей, то в каждой из них (при достаточно больших n) окажется примерно одинаковое число точек последовательности.

Однако для практических задач важно, чтобы равномерно распределенные последовательности обладали указанными свойствами не только для больших, но и для малых значений n.

Семейство последовательностей, рассматриваемых в настоящей работе, обобщает двоичные последовательности Ван дер Корпута и Рота и p-ичные последовательности Фора [5]. Эти последовательности в отечественной литературе называют, следуя И.М. Соболю [6–8], ЛП$_0$-последовательностями. Не отступая от традиции, распространим это название и на наши конструкции, т. к. обозначение «ЛП» в нашем контексте может означать, что *любой последовательный* участок X_n хорошо распределен.

Пусть $q=p^n$, где p – простое число. Назовем q-ичными отрезками ранга s интервалы $\frac{t}{q^s}+\left[0,\frac{1}{q^s}\right)$,

$0 \le t \le q^s-1$. Эти отрезки получаются при разбиении интервала $I=[0,1)$ на q^s равных отрезков. Обобщая это определение на многомерный случай, назовем q-ичным блоком ранга s параллелепипед $B_1 \times \ldots \times B_d$ в d-мерном кубе $I^d=[0,1)\times\ldots\times[0,1)$, где B_i – q-ичные отрезки рангов $s_1, s_2, \ldots, s_q$ соответственно, причем $s_1+\ldots+s_q=s$.

Таким образом, q-ичные отрезки – это просто одномерные q-ичные блоки.

Последовательные участки множества целых неотрицательных чисел $kq^s+\{0,q^s-1\}$, $k=0,1,2,\ldots$ назовем q-ичными участками ранга s. Точно так же будем называть и соответствующие участки произвольных последовательностей.

Определение 1. Последовательность X_n точек из I^d назовем ЛП-последовательностью, если каждый ее q-ичный участок ранга s имеет ровно по одной общей точке с каждым q-ичным блоком того же ранга.

Теорема 1.

1. Проекции ЛП-последовательности на k-мерные грани куба I^d также являются ЛП-последовательностями.
2. ЛП-последовательности равномерно распределены в I^d.

Эти утверждения легко проверяются, поэтому мы не будем приводить доказательства.

Приведем примеры ЛП-последовательностей.

Любое число x из интервала $I=[0,1)$ можно записать в q-ичной системе счисления в виде $x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{q^{i+1}}$, $0 \le x_n \le q-1$. Заметим, что q-ично рациональные числа, т. е. числа вида $\frac{t}{q^s}$, $0 \le t \le q^s-1$, имеют две различных q-ичных записи:

$$x=\sum_{i=0}^{s}\frac{x_i}{q^{i+1}}+\sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{q-1}{q^i}$$

$$\text{и}\quad x=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{x_i}{q^{i+1}}+\frac{x_s+1}{q^{s+1}}+\sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{0}{q^i}.$$

Каждое неотрицательное целое число n можно записать в q-ичной системе счисления $n=n_0+n_1q+n_2q_2+\ldots+n_sq^s$, $0 \le n_i \le q-1$ и $n_s \ne 0$. Обозначим номер старшей q-ичной цифры как $r(n)$. Число $\tilde{n}=n_s+n_{s-1}q+\ldots+n_0q^s$ назовем инверсным к n. Сопоставим каждому n q-ично рациональное число $h(n)=\frac{\tilde{n}}{q^{r(n)+1}}=\sum_{i=0}^{s}\frac{n_i}{q^{i+1}}$. Таким образом, множество целых неотрицательных чисел вкладывается отображением h в интервал $I=[0,1)$. Очевидно, что последовательность $h(n)$ является одномерной ЛП-последовательностью.

На самом деле справедливо даже более сильное утверждение:

Теорема 2.

Любые q^s последовательных точек из $(h(n))|_{n=0}^{\infty}$ лежат в разных q-ичных отрезках ранга s.

Доказательство. Пусть t – произвольное неотрицательное целое. Нетрудно видеть, что $\{(t+a) \bmod q^s\colon a\in\{0, q^s-1\}\}=\{0, q^s-1\}$. Отсюда следует, что когда a пробегает множество $\{0, q^s-1\}$, первые s q-ичных цифр числа $t+a$ принимают все возможные значения. Дальнейшее очевидно.

Построим теперь целое семейство ЛП-последовательностей.

Каждому целому неотрицательному числу $n=n_0+n_1q+\ldots+n_sq^s$, представленному его q-ичной записью, сопоставим бесконечномерный вектор $\bar{n}=<n_0,n_1,\ldots,n_s,0,0,\ldots>$.

Теорема 3.

Пусть $A=(a_{ij})$ i, $j\in\{0,1,\ldots,\infty\}$, $0 \le a_{ij} \le q-1$, бесконечная матрица над конечным полем F_q, такая, что все ее подматрицы $A_s=(a_{ij})$, $i,j\in\{0,1,\ldots,s\}$ не вырождены, и пусть $A(n)$ – число, соответствующее произведению

$$A\cdot\bar{n}=<\ldots,\sum_{k=0}^{r(n)}a_{mk}n_k\ldots>,$$

(вычисления здесь проводятся в арифметике поля F_q).

1. Последовательность $h(A(n))$ – ЛП-последовательность.
2. Для $h(A(n))$ справедливо утверждение теоремы 2.

Доказательство.

Для того, чтобы $h(A(n))$ была ЛП-последовательностью, необходимо и достаточно выполнение следующего требования: для любого вектора $<t_0,t_1,\ldots,t_s,0,0,\ldots>$ и любого s система уравнений $\sum_{k=0}^{s}a_{mk}n_k=t_m$, $m=0,1,\ldots,s$ должна иметь единственное решение.

Это требование очевидным образом выполняется.

Матрица A для каждого s определяет невырожденное преобразование пространства F_q^s в себя. Поэтому, когда n пробегает множество $\{(t+a)\colon a\in\{0,q^s-1\}\}$, первые s q-ичных цифр чисел $A(t+n)$ принимают все возможные значения. Дальнейшее очевидно.

Построим теперь многомерные ЛП-последовательности.

Теорема 4.

Пусть $A=(C_k^m\delta_{km})$, $k,m\in\{0,1,\ldots,\infty\}$, где C_k^m – биномиальные коэффициенты, $C_k^m=0$ при $k \le m$, и пусть $d \le q$.

Тогда последовательность $(h(n),h(A(n)),h(A^2(n)),\ldots,h(A^{d-1}(n)))$ является d-мерной ЛП-последовательностью.

Доказательство. Общий элемент матрицы A^i имеет вид $C_k^m i^{k-m}$, причем для $i=0$ полагаем, $i^{k-m}=\delta_{km}$. Последовательность $(h(n),h(A(n)),h(A^2(n)),\ldots,h(A^{d-1}(n)))$ будет d-мерной ЛП-последовательностью, если для любого s и для любых $v_1,v_2,\ldots,v_d$, таких, что $0 \le v_1 \le s$ и $v_1+v_2+\ldots+v_d=s$ будет невырожденной матрица A_s, составленная по следующему правилу:

Первые v_1 строк берутся из матрицы A^0, следующие v_2 строк – из матрицы A^1, и т. д., последние v_d строк – из матрицы A^d.

Предположим обратное, т. е., что эта матрица вырождена. Тогда найдется отличный от 0 вектор $\bar{n}=<n_0,n_1,\ldots n_{s-1},0,0,\ldots>$ такой, что $A_s\bar{n}=0$.

Рисунок. *Распределения последовательностей из семи точек*

Рассмотрим полином $n(x)=n_0+n_1x+...+n_{s-1}x^{s-1}$ над полем F_q. Вырожденность матрицы A_s эквивалентна тому, что каждый элемент $i\in\{0, d-1\}$ будет корнем всех гиперпроизводных [9] порядков $0,1,...,\nu_{i+1}$, т. е. является корнем полинома $n(x)$ кратности не менее ν_{i+1}. А это означает, что полином степени $s-1$ имеет не менее s корней. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Так же как и одномерные, построенная последовательность обладает свойством, сформулированном в теореме 2.

Приведем на рисунке примеры распределения различных последовательностей из семи точек в единичном квадрате.

Видно, что квазислучайная последовательность (построена с помощью одного из вышеописанных семейств) обладает лучшей равномерностью по сравнению с равномерной сеткой и псевдослучайной последовательностью. В более сложных многомерных случаях можно оценивать равномерность распределения с помощью метода, описанного в [1].

Итак, в настоящей работе вводится новое семейство равномерно распределенных последовательностей (ЛП-последовательности), обобщающих конструкции Рота, Фора, Соболя [5–8]. Доказывается, что все последовательные участки ЛП-последовательности определенной длины имеют хорошее распределение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболь И.М. Рэйндж – количественная мера неравномерности распределения // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 14. – № 6. – С. 119–127.
2. Асоцкий Д.И., Соболь И.М. О последовательностях точек для оценки несобственных интегралов методами квази-Монте-Карло // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – № 3. – С. 411–415.
3. De Doncker E., Guan Y. Error bounds for the integration of singular functions using equidistributed sequences // Journal of Complexity. – 2003. – V. 19. – № 3. – P. 259–271.
4. Рейзлин В.И. Эффективный метод построения псевдослучайных векторов, равномерно распределенных в гиперконусе // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 41–43.
5. Кейперс Л., Нидеррайтер Г. Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
6. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
7. Соболь И.М. Вычисление несобственных интегралов при помощи равномерно распределенных последовательностей // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 2. – С. 278–281.
8. Соболь И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985. – 32 с.
9. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. – В 2-х т. – М.: Мир, 1988. – 820 с.

Поступила 05.10.2011 г.