УДК 621.384.647.001.5

ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В КОАКСИАЛЬНОМ МАГНИТОПЛАЗМЕННОМ УСКОРИТЕЛЕ

А.А. Сивков, Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева, А.М. Купцов

Томский политехнический университет
E-mail: vasileva.o.v@mail.ru

В коаксиальном магнитоплазменном ускорителе исследовано изменение скорости и массы плазменного сгустка в зависимости от координаты, определяемое как энергетическими характеристиками, так и газодинамическими закономерностями гиперзвуковых струйных течений в цилиндрическом канале. Установлена динамика распространения заряженных частиц в электромагнитном поле, графически представлен баланс энергии с учетом эрозии стенок канала. Показана адекватность теоретической модели экспериментальным данным.

Ключевые слова:
Плазма, изменение массы, потенциальная функция, заряженная частица, эрозия, баланс энергии, колебательный закон, динамика сгустка.

Key words:
Plasma, weight change, potential function, charged particle, erosion, balance of energy, oscillatory law, dynamics of a clot.

Коаксиальный магнитоплазменный ускоритель является электроэрозийным ускорителем, так как рабочий материал нарабатывается электроэрозийным путем с поверхности ускорительного канала. Поэтому исследования процесса электроэрозийного износа поверхности ускорительного канала с целью изучения характера износа по длине ствола, выявления наиболее значимого фактора, определяющего его значение, оптимизации электроэрозийной наработки рабочего материала и конструкции ускорителя является актуальной практической задачей.

Приведем экспериментальные данные работы [1, 2] по измерению скорости v в зависимости от координаты $v(x)$, рис. 1, *а*. Рядом приведен график скорости $v(x)$, представленной в виде сплайновой функции, позволяющей производить аналитические операции над функцией скорости $v(x)$, рис. 1, *б*.

Предварительно преобразуем зависимость скорости от координаты $v(x)$ в зависимость скорости от времени $v(t)$ с помощью соотношений:

- ускорение определяется выражением
$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=v(x)\frac{dv(x)}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dv^2(x)}{dx};$$
- время – $dt(x)=\dfrac{v'(x)}{a(x)}dx \to t(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{v'(x)}{a(x)}dx.$

После подстановки зависимостей $v(x)$ и $a(x)$ в интегральные и дифференциальные соотношения получаем аналитические зависимости $t(x)$ и $x(t)$, рис. 2.

Таким образом, полученная зависимость скорости от времени имеет колебательный характер, рис. 3. Следовательно, для адекватности моделирования динамики распространения плазменного сгустка необходимо учитывать изменение массы сгустка в процессе его распространения [1, 3–5]. Колебательный характер скорости можно объяснить, рассматривая динамику распространения заряженных частиц в электромагнитном поле.

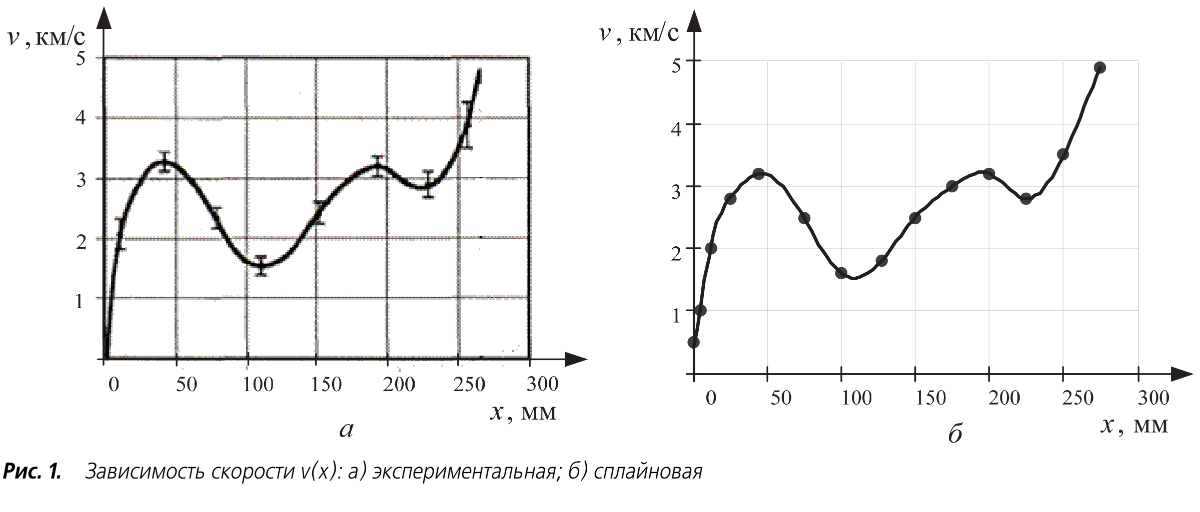

Рис. 1. *Зависимость скорости v(x): а) экспериментальная; б) сплайновая*

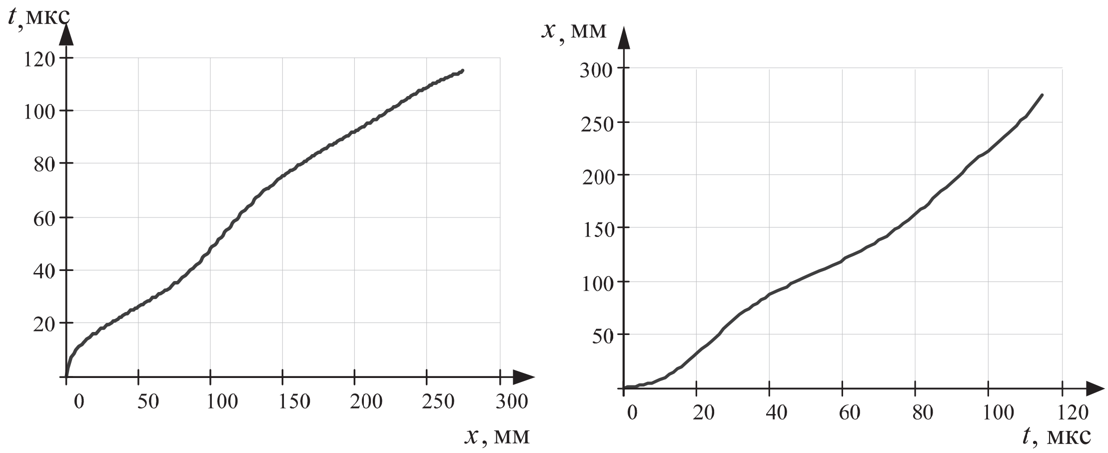

Рис. 2. *Аналитические зависимости t(x) и x(t)*

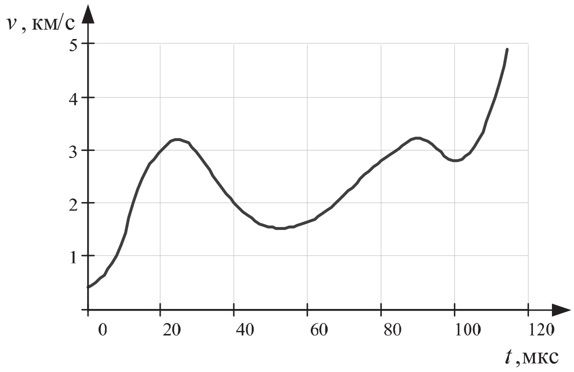

Рис. 3. *Зависимость скорости плазменного сгустка от времени v(t)*

Динамика заряженных частиц

Магнитное поле плазменного укорителя можно представить как суперпозицию независимых ортогональных полей, создаваемых плазменным шнуром $\mathbf{H}_{\text{Пл}}=H_\varphi(r)$ (аксиальное поле) и индуктором $\mathbf{H}_{\text{Инд}}=\{H_\gamma(z,r),H_z(z,r)\}$ [2, 5, 6].

Поскольку нас интересует поле в области, ограниченной электродным стволом, то поле индуктора в этой области можно считать однородным, не зависящем от координат и имеющем только z-компоненту H_z=const. Напомним, что линии равного векторного потенциала A есть силовые линии магнитного поля. Кроме магнитных полей имеется и электрическое поле электродной системы ствол-жгут, определяемое выражениями:

$$\varphi(x,y)=-\frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}\ln(r(x,y)/R_2),$$

$$E(x,y)=-\frac{d\varphi(x,y)}{dr}=\frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r(x,y)}.$$

где $\varphi(x,y)$ – потенциал электрического поля; U_0 – напряжение, равное 3 кВ [2]; R_2, R_1 – радиусы электрода ствола и плазменного жгута соответственно; $E(x,y)$ – напряженность электрического поля.

Компоненты напряженности электрического поля $E(x,y)$ по осям x и y будут соответственно:

$$E_x(x,y)=\frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$E_y(x,y)=\frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)}\frac{y}{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

Для ограничения траектории движения частиц в пределах ствола введена потенциальная функция $U(x,y)$ – «потенциальная яма», имеющая аналитический вид:

$$U(x,y)=\beta[1-\mathrm{e}^{-\rho(x,y)^{48}\alpha}], \qquad (2)$$

и ее силовая функция, которая определяется выражением с учетом (1) и (2):

$$\mathbf{F}=-\nabla U(x,y),\ F_x(x,y)=$$
$$=-48\beta\rho(x,y)^{46}\alpha x\mathrm{e}^{-\rho(x,y)^{48}\alpha},$$
$$F_y(x,y)=-48\beta\rho(x,y)^{46}\alpha y\mathrm{e}^{-\rho(x,y)^{48}\alpha},$$
$$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Входящие безразмерные коэффициенты имеют значения: $\beta=10^4$, $\alpha=10^{-60}$.

Пространственный вид потенциальной функции и силовое поле показаны на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлена локализация силы $\mathbf{F}(x,y)=-\nabla U(x,y)$.

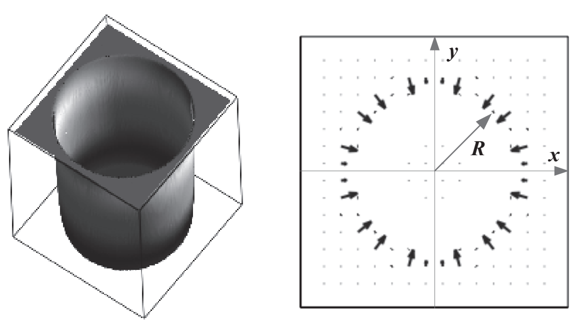

Рис. 4. *Пространственное распределение потенциальной ямы U(x,y) и силовое поле* ***F****(x,y)=−∇U(x,y)*

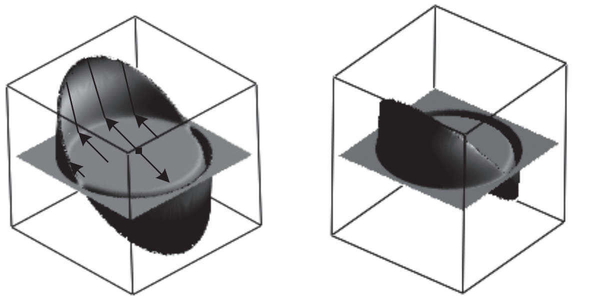

Рис. 5. *Компоненты градиента потенциальной функции* $\mathbf{F}(x,y)=-\nabla U(x,y)$, $F_x=-\partial U(x,y)/\partial x$, $F_y=-\partial U(x,y)/\partial y$ *по оси x и y соответственно*

На рис. 5 продемонстрировано, что максимальная сила будет действовать на частицу при ее перпендикулярном падении на стенки. При ее падении под углом к стенке эта сила уменьшается.

На основе полученных соотношений запишем уравнение динамики заряженных частиц в электромагнитных полях в векторной форме [7]:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{B}\times\mathbf{v} + e\mathbf{E} - \nabla U(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}.$$

Систему дифференциальных уравнений второго порядка запишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в развернутом виде для каждой компоненты координаты и скорости:

$$\frac{dx}{dt} = v_x,\ \frac{dy}{dt} = v_y,\ \frac{dz}{dt} = v_z,$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m}(B_y v_z - B_z v_y) + \frac{e}{m}E_x - \frac{1}{m}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m}(B_z v_x - B_x v_z) + \frac{e}{m}E_y - \frac{1}{m}\frac{\partial U(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m}(B_x v_y - B_y v_z) + \frac{e}{m}E_z.$$

Решение дифференциальных уравнений решалось методом Рунге–Кутта с фиксированным шагом с числом дискретизации $N=10^3$. Результаты расчетов приведены ниже. Все частицы имели одинаковую массу, заряд (+) и продольную компоненту скорости. Начальные значения поперечных скоростей и исходных координат частиц задавались различные. Относительные значения поперечных скоростей и координаты по отношению к радиусу электрода приведены на рис. 6. Видно, что при больших поперечных скоростях получаются большие радиусы. При заданной конфигурации электромагнитного поля частицы движутся по спирали.

Траектория, усредненная по ларморовскому периоду, тоже представляет собой спираль более низкой частоты. Таким образом, при распространении частиц центр окружности, по которой вращаются частицы в поперечной плоскости, движется по низкочастотной спирали. Соприкасаясь со стенками, частицы вызывают эрозию, в результате которой изменяется масса плазмы. Плазменный сгусток представлен в виде плазменного шнура [2]. Таким образом, масса пучка меняется по колебательному закону (рис. 7, *б*).

С учетом этого обстоятельства перепишем систему уравнений равновесия напряжения, тока и динамики сгустка:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m(t)}\frac{i^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}L(z) - \frac{v(t)}{m(t)}\frac{dm(t)}{dt} \\ \frac{d}{dt}i = \dfrac{-i\frac{\partial L(z)}{\partial z} + U_C - iR + U_0}{L(z)} \\ \frac{d}{dt}U_C = -\frac{i}{C} \end{cases}.$$

В качестве модели изменения массы $m(t)$ выберем функцию:

$$m(t)=m_0(1+\xi\sin(\omega t)),$$

где $m_0=10^{-7}$ кг, $\xi=0,2$, $\omega=6\cdot10^5$.

Результаты расчетов приведены на рис. 7; видно, что они находятся в удовлетворительном согла-

а *б* *в*

Рис. 6. *Результаты расчета уравнения динамики заряженных частиц в электромагнитных полях: а) начальные положение координат и поперечные величины и направления скоростей; б) проекция траектории частиц на плоскость x, y; в) вид пространственной траектории частиц*

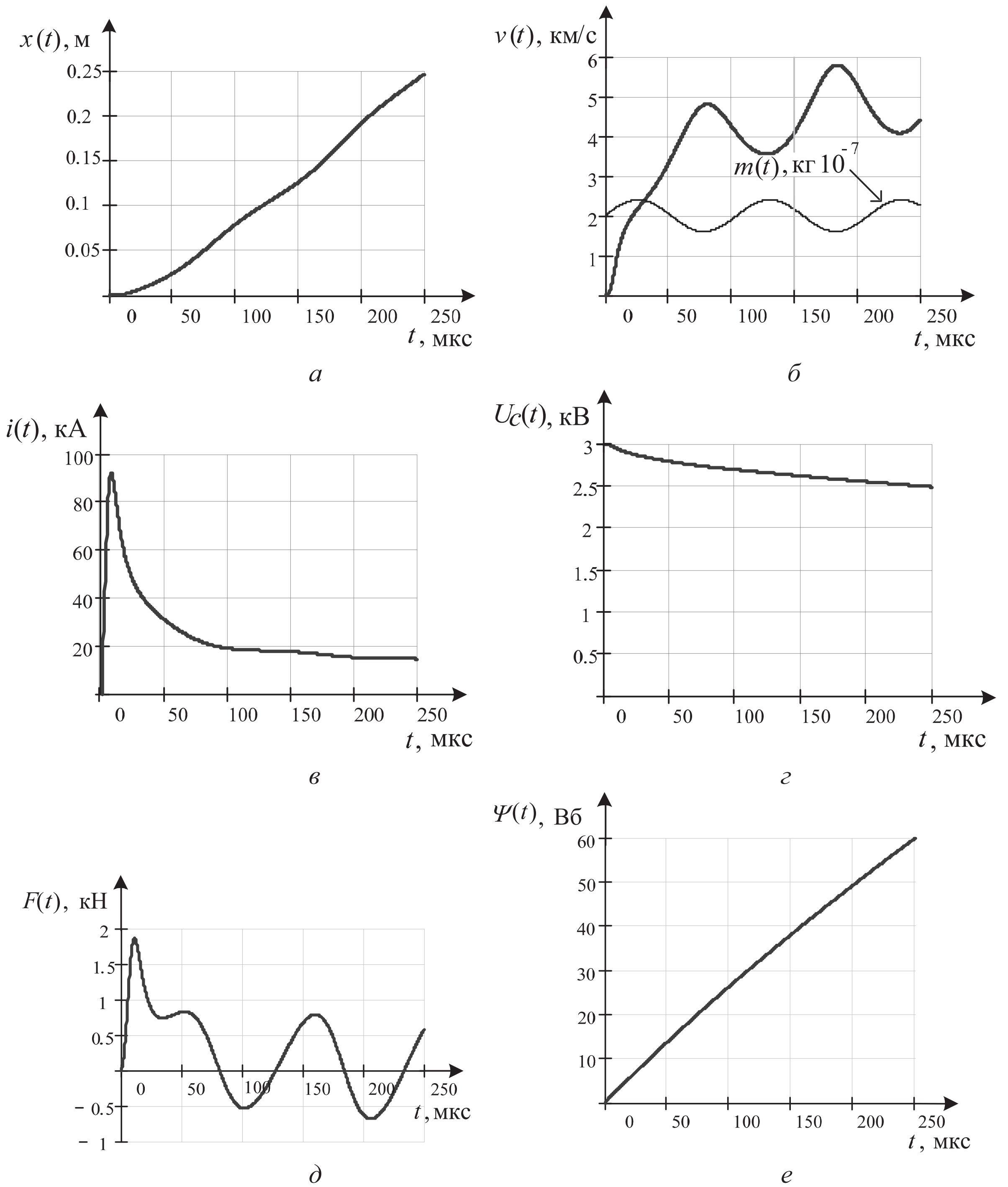

Рис. 7. *Результаты расчетов параметров математической модели с учетом эрозии при $C=12\cdot10^{-3}$ Ф, $L_0=1{,}722\cdot10^{-7}$ Гн, $L'=4{,}6\cdot10^{-7}$ Гн, $U_0=3$ кВ: а) координата распространения; б) скорость сгустка; в) ток; г) напряжение на конденсаторе; д) сила; е) потокосцепление*

сии с экспериментальными данными. Заметим, что изменения массы и изменения скорости находятся в противофазах (рис. 7, *б*).

В балансе энергии добавляется еще одно слагаемое – эффективная потенциальная энергия, обусловленная изменением массы и равная величине [2]:

$$U_{Эф}(t)=\frac{1}{2}\int_0^t v^2(t)\frac{dm(t)}{dt}dt.$$

Отсюда баланс энергии записывается в виде:

$$\frac{U_0^2C}{2}=\frac{mv^2(t)}{2}+\int_0^t i^2(t)R(t)dt+\frac{u_C^2(t)C}{2}+$$

$$+\frac{i^2(t)L(z(t))}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t v^2(t)\frac{dm(t)}{dt}dt.$$

Графическое представление баланса энергии приведено на рис. 8.

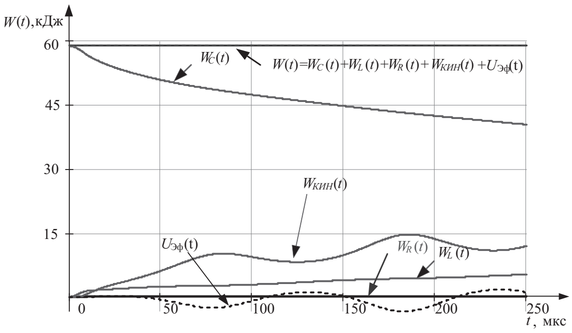

Рис. 8. *Временная зависимость баланса энергии*

Ниже приводится таблица сравнения экспериментальных и расчетных данных.

Таблица. *Сравнение экспериментальных и расчетных данных*

Величина	Эксперимент	Теория
Индуктивность, L_0, Гн	$(2...6)\cdot10^{-7}$	$1,72\cdot10^{-7}$
Скорость, v, м/с	4...10	6
Ток, I, кА	80...120	90
Пространственная характеристика процесса, x, мм	240	250
Ускорение, a, км/с^2	$2\cdot10^5$	$1,8\cdot10^5$

Таким образом, показана адекватность разработанной модели коаксиального магнитоплазменного ускорителя с учетом эрозии, вызванной распространением частиц по низкочастотной спирали.

Низкочастотное спиральное движение есть суперпозиция движений:

- поперечного, обусловленного вращением частиц в поперечном направлении к магнитному полю и ограниченного потенциальным барьером, моделирующим поперечные размеры цилиндра;
- продольного – движение частиц вдоль оси цилиндра, параллельно магнитному полю. Это движение обусловлено магнитным давлением, толкающим плазменную субстанцию к выходу из цилиндра. Соприкасаясь со стенками, частицы вызывают эрозию цилиндра и изменение массы плазмы.

Выводы

Предложен вид потенциальной функции и силового поля, моделирующей пространственное ограничение разлета частиц плазмы. Установлены общие закономерности электроэрозийного износа поверхности ускорительного канала коаксиального магнитоплазменного ускорителя, которые определяются как энергетическими характеристиками, так и газодинамическими закономерностями гиперзвуковых струйных течений в цилиндрическом канале. Рассчитан баланс энергии с учетом эрозии.

Приведена таблица сравнения экспериментальных и теоретических данных, свидетельствующая в пользу удовлетворительной работы предложенной математической модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект № 09-08-01110.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивков А.А., Герасимов Д.Ю., Цыбина А.С. Электроэрозийная наработка материала в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе для нанесения покрытий // Электротехника. – 2005. – № 6. – С. 25–38.
2. Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Васильева О.В., Купцов А.М. Математическое моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 4. – С. 33–41.
3. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2008. – 613 с.
4. Колесников П.М. Электродинамическое ускорение плазмы. – М.: Атомиздат, 1971. – 388 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1992. – 664 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. – М.: Наука, 2001. – 222 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. – М.: Наука, 2001. – 533 с.

Поступила 18.05.2011 г.