УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ–РИМАНА МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: luchinin@tpu.ru

Изучаются частные классы многомерных поверхностей в евклидовом пространстве, характеризуемые специальным видом отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормального расслоений, определённых нами в предыдущих публикациях.

Ключевые слова:
Многомерные евклидовы пространства, многомерные поверхности, отображения Коши–Римана.

Key words:
Multidimensional Euclidean spaces, multidimensional surfaces, Cauchy–Riemann mapping.

Введение

В статье [1] были изучены отображения Коши–Римана двумерных площадок касательной m-плоскости L_m и нормальной $(n-m)$-плоскости P_{n-m} поверхности S_m размерности m в евклидовом пространстве E_n. В этой же статье рассмотрены ассоциированные с указанными отображениями инвариантные геометрические образы.

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена главным образом изучению некоторых частных классов m-поверхностей $S_m \subset E_n$, характеризуемых отображениями Коши–Римана указанных площадок специального вида. Раздел 1 посвящен изучению в терминах раздела 2 статьи [1] попарно-ортогональных двумерных площадок $L_2^p \subset L_m$ ($p=\overline{1,s}$; $m=2s$ или $m=2s+1$) таких, что отображения f^{pq}: $L_2^p \to L_2^q$ ($p<q$; $p,q=\overline{1,s}$), отвечающие направлению $t \in L_m$, являются отображениями Коши–Римана.

В разделе 2 инвариантным геометрическим и аналитическим образом строится поле двумерных площадок $L_2^1 \subset P_{n-m}$. Поэтому все результаты, о которых идет речь в разделе 2 статье [1] и в разделе 1 данной статьи для заданной двумерной площадки $L_2^1 \subset P_{n-m}$, сохраняются в случае инвариантного определения площадки P_2^1. Раздел 3 данной статьи посвящен изучению специальных классов m-поверхностей $S_m \subset E_n$, характеризуемых тем, что все отображения f_t^1 и f_t^{pq}, указанные в разделе 2 статьи [1] и в разделе 1 данной статьи являются отображениями Коши–Римана при любом направлении $t \in L_m$. При этом подробное рассмотрение этих m-поверхностей сначала проводится в случае $n=m+2$, а затем на основании результатов разделов 1 и 2 делается вывод о существовании указанных m-поверхностей в случае $n>m+2$.

Все рассмотрения в данной статье носят, как и в статье [1], локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1].

1. Расщепление *m*-плоскости *L*m на двумерные плоскости

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R m-поверхности $S_m \subset E_n$, при которой в соответствии с [1. Ур. (25), (26)] в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ имеют место соотношения

$$A^1_{m+1,\hat{\alpha}_1} - A^2_{m+2,\hat{\alpha}_1} = 0, A^1_{m+2,\hat{\alpha}_1} + A^2_{m+1,\hat{\alpha}_1} = 0, \; H_{k_1} \neq 0. \quad (1)$$

Из [1. Ур. (1), (2), (4), (7)] и (1) получаем

$$\omega^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1} = A^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1\alpha}\omega^\alpha = -\omega^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}_1} = -A^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}_1\alpha}\omega^\alpha \Rightarrow A^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1\alpha} = -A^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}_1\alpha},$$

$$dA^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1\alpha} + A^{\hat{\beta}_1}_{\alpha_1\alpha}\omega^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\beta}_1} - A^{\hat{\alpha}_1}_{\beta_1\alpha}\omega^{\beta_1}_{\alpha_1} - A^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1\beta}\omega^\beta_\alpha = A^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1\alpha\beta}\omega^\beta. \quad (2)$$

С учетом [1. Ур. (10)–(15), (22)–(25)] и $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}=-g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}$ замечаем, что при канонизации ортонормального репера R типа (1) имеем

$$L_2^1=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2)\perp L_{m-2}^1=(\bar{A},\bar{e}_3,...,\bar{e}_m),\ (m>2). \quad (3)$$

С учетом (2) заключаем, что канонизация ортонормального репера R, осуществленная по формулам (1) в соответствии с [2] существует на любой m-поверхности $S_m\subset E_n$, на которой $H_{k_1}\neq 0$.

Каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ при $m>n$ поставим в соответствие двумерную площадку $L_2^2\subset L_{m-2}^1$ (см. (3)), которую определим уравнениями

$$L_2^2 \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2}=g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}x^{\alpha_2}, x^{\alpha_1}=0, x^a=0. \quad (4)$$

Поскольку пространство E_n евклидово, то с двумерной площадкой L_2^2 ассоциируется $(m-4)$-плоскость $L_{m-4}^2\subset L_{m-2}^2$, ортогональная L_2^2 и определяемая уравнениями

$$L_{m-4}^2 \Leftrightarrow x^{\alpha_2}=g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}x^{\alpha_2}, x^{\alpha_1}=0, x^a=0, g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=-g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}. \quad (5)$$

Тогда так же, как и в пунктах раздела 2 статьи [1], показывается, что каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ при $m>4$ сопоставляется отображение (при фиксированном $t\in L_m$)

$$f_t^2: P_2^1\to L_2^2 \Leftrightarrow x^{\alpha_2}=\lambda_2(G_{a_1\alpha}^{\alpha_2}y^{a_1}+G_\alpha^{\alpha_2})t^\alpha, \lambda_2\neq 0,$$

$$G_{a_1\alpha}^{\alpha_2}=A_{a_1\alpha}^{\alpha_2}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}A_{a_1\alpha}^{\hat{\alpha}_2}, G_\alpha^{\alpha_2}=\delta_\alpha^{\alpha_2}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}\delta_\alpha^{\hat{\alpha}_2}. \quad (6)$$

Геометрически отображение f_t^2 определяется так же, как и в случае отображения f_t^1: $P_2^1\to L_2^1$. Только в рассматриваемом случае роль $(m-2)$-плоскости будет играть линейное подпространство $L_2^1\cup L_{m-4}^2$.

Как и в случае теоремы 2.1 в [1] доказывается при $m>4$ следующая теорема.

Теорема 1.1. Каждой двумерной плоскости $P_2^1\subset P_{n-m}$, отвечающей точке $A\in S_m\subset E_n$, при $m>4$ в соответствующей m-плоскости L_m, касательной к S_m в точке A, отвечает конечное число двумерных площадок таких, что

$$f_t^2\to f_{tr}^2, \forall t\in L_{m-4}^2\perp L_2^2.$$

Здесь отображение f_{tr}^2 определяется так же, как и отображение f_{tr}^1 (см. определение 2.1 в [1]).

Заметим в соответствии с теоремой 1.1, что величины $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=-g_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}$, определяющие с учетом (5) и (6) двумерные площадки L_2^2, о которых идет речь в данной теореме, удовлетворяют с учетом [1. Ур. (23)] системе $k_2=2(m-4)$ алгебраических уравнений, аналогичной системе [1. Ур. (22)]. Только теперь в [1. Ур. (22), (23)] индексы $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1=1,2$; $\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\gamma}_1=\overline{3,m}$ надо заменить индексами $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2=3,4$; $\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2,\hat{\gamma}_2=\overline{5,m}$ $m>4$. Аналогичную систему индексов нужно иметь в виду всюду в [1, (26), (27)] и (1)–(3).

Проведем в случае $m>4$ канонизацию ортонормального репера R, аналогичную (1):

$$A_{m+1,\hat{\alpha}_2}^3-A_{m+2,\hat{\alpha}_2}^4=0, A_{m+1,\hat{\alpha}_2}^4+A_{m+2,\hat{\alpha}_2}^3=0,\ H_{k_2}\neq 0. \quad (7)$$

Здесь определитель H_{k_2} определяется по аналогии с определителем H_{k_1} (см.[1. Ур. (26)]). Как и в случае (2) при $m>4$ получаем соотношения

$$\omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=A_{\alpha_2\alpha}^{\hat{\alpha}_2}\omega^\alpha=-\omega_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2}=-A_{\hat{\alpha}_2\alpha}^{\alpha_2}\omega^\alpha \Rightarrow A_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}=-A_{\hat{\alpha}_2}^{\alpha_2},$$

$$dA_{\alpha_2\alpha}^{\hat{\alpha}_2}+A_{\alpha_2\alpha}^{\hat{\beta}_2}\omega_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2}-A_{\beta_2\alpha}^{\alpha_2}\omega_{\alpha_2}^{\beta_2}-A_{\alpha_2\beta}^{\hat{\alpha}_2}\omega_\alpha^\beta=A_{\alpha_2\alpha\beta}^{\hat{\alpha}_2}\omega^\beta.$$

Эти соотношения свидетельствуют о том, что в соответствии с [2] канонизация ортонормального репера R типа (7) существует на любой m-поверхности $S_m\subset E_n$, $m>4$, на которой $H_{k_1}\neq 0$.

Геометрически канонизация ортонормального репера типа (7) с учетом (4) и (5) такова, что

$$L_2^2=(\bar{A},\bar{e}_3,\bar{e}_4)\perp L_{m-4}^2=(\bar{A},\bar{e}_5,...,\bar{e}_m). \quad (8)$$

Продолжая аналогичным образом процесс по инвариантному определению двумерных площадок в m-плоскости L_m и проводя соответствующую канонизацию ортонормального репера R, мы придем в случаях $m>2p$ к нижеследующим соотношениям

$$p,q=\overline{1,s}; s=\frac{m}{2},\ m - \text{четное};$$

$$s=\frac{m-1}{2},\ m - \text{нечетное}. \quad (9)$$

$$A_{m+1,\hat{\alpha}_p}^{2p-1}-A_{m+2,\hat{\alpha}_p}^{2p}=0, A_{m+2,\hat{\alpha}_p}^{2p-1}+A_{m+1,\hat{\alpha}_p}^{2p}=0,$$

$$H_{k_p}\neq 0, k_p=2(m-2p). \quad (10)$$

$$\omega_{\alpha_p}^{\hat{\alpha}_p}=A_{\alpha_p\alpha}^{\hat{\alpha}_p}\omega^\alpha=-\omega_{\hat{\alpha}_p}^{\alpha_p}=$$

$$=-A_{\hat{\alpha}_p\alpha}^{\alpha_p}\omega^\alpha \Rightarrow A_{\alpha_p\alpha}^{\hat{\alpha}_p}=-A_{\hat{\alpha}_p\alpha}^{\alpha_p},$$

$$dA_{\alpha_p\alpha}^{\hat{\alpha}_p}+A_{\alpha_p\alpha}^{\hat{\beta}_p}\omega_{\hat{\beta}_p}^{\hat{\alpha}_p}-A_{\beta_p\alpha}^{\hat{\alpha}_p}\omega_{\alpha_p}^{\beta_p}-A_{\alpha_p\beta}^{\hat{\alpha}_p}\omega_\alpha^\beta=A_{\alpha_p\alpha\beta}^{\hat{\alpha}_p}\omega^\beta, \quad (11)$$

$$L_2^p=(\bar{A},\bar{e}_{2p-1},\bar{e}_{2p})\perp L_{m-2p}^1=$$

$$=(\bar{A},\bar{e}_{2p+1},...,\bar{e}_m),(m>2p),$$

$$f_t^p: P_2^1\to L_2^{\alpha_p}\Leftrightarrow x^{\alpha_p}=$$

$$=\lambda_p(G_{a_1\alpha}^{\alpha_p}y^{a_1}+G_\alpha^{\alpha_p})t^\alpha, \lambda_p\neq 0,$$

$$G_{a_1\alpha}^{\alpha_p}=A_{a_1\alpha}^{\alpha_p}, G_\alpha^{\alpha_p}=\delta_\alpha^{\alpha_p}, g_{\alpha_p}^{\hat{\alpha}_p}=-g_{\hat{\alpha}_p}^{\alpha_p}=0. \quad (12)$$

Причем по аналогии с вышеизложенным, когда индекс p принимал значения (9), получаем для всех значений этого индекса: $f_t^p\to f_{tr}^p$, $\forall t\in L_{m-2p}^{\alpha_p}$.

Таким образом, из (9)–(12) следует, что m-плоскость L_m, касательная к $S_m\subset E_n$ в точке A, расщепляется на попарно ортогональные пересекающие только в точке двумерные площадки, т. е.

$$L_m=\begin{cases}\left\{\bigcup_{p=1}^{s-1}L_2^p\right\}\cup\{L_2^m=(\bar{A},\bar{e}_{m-1},\bar{e}_m)\},\\ s=\dfrac{m}{2},\quad m-\text{четное},\\ \left\{\bigcup_{p=1}^{s}L_2^p\right\}\cup\{L_1^m=(\bar{A},\bar{e}_m)\},\\ s=\dfrac{m-1}{2},\quad m-\text{нечетное}.\end{cases} \quad (13)$$

Здесь в случае нечетного m прямая $L_2^m=(\overline{A},\overline{e}_m)$ ортогональна $(m-1)$-плоскости $L_{m-1}\subset L_m$, проходящей через двумерные площадки $L_2^1, L_2^2,...L_2^{m-1}$, т. е.

$$L_{m-1}=(\overline{A},\overline{e}_1,...,\overline{e}_{m-1}). \tag{14}$$

2. Инвариантное определение двумерной площадки P_2^1 в $(n-m)$-плоскости P_{n-m}

В разделе 2 статьи [1] и в предыдущем разделе двумерная площадка $P_2^1\subset P_{n-m}$, отвечающая точке $A\in S_m\subset E_n$, предполагалась заданной. Данный раздел 2 будет посвящен инвариантному определению этой двумерной площадки в точке $A\in S_m$.

Замечание 2.1. В случае $n=m+2$, т. е. в случае m-поверхности S_m в E_{m+2} нормальное (оснащающее) линейное подпространство является двумерной площадкой $P_2=P_2^1=(\overline{A},\overline{e}_{m+1},\overline{e}_{m+2})$. Следовательно, для этого случая верны все результаты предыдущего раздела. Поэтому с учетом неравенств [1. Ур. (5)] всюду в данном разделе будем предполагать $n>m+2$.

2.1. Локальные центроаффинные преобразования линейных подпространств L_m и P_{n-m}

Из [1. Ур. (6)–(8)] следует, что каждой точке $X\in P_{n-m}$ с радиус-вектором

$$\overline{X}=\overline{A}+x^a\overline{e}_a, \tag{15}$$

отвечающей точке $A\in S_m\subset E_n$, соответствует локальное центроаффинное преобразование $\Pi(X)=\{x^aA^\alpha_{a\beta}+\delta_\beta^\alpha\}$ m-плоскости L_m в себя с центром в точке A.

Геометрически это преобразование каждое направление

$$l=(\overline{A},\overline{e}_\beta)t^\beta\in L_m \tag{16}$$

переводит в направление $u=(\overline{A},\overline{e}_\alpha)u^\alpha$, $u^\alpha=\{x^aA^\alpha_{a\beta}+\delta_\beta^\alpha\}t^\beta$. Геометрически это направление параллельно пересечению m-плоскости L_m с линейным подпространством, проходящим через P_{n-m} и касательную к линии, описываемой нефокальной в смысле [3] точкой $X\in P_{n-m}$ в направлении (16).

Рассмотрим с учетом (15) прямую AX, которую параметрически зададим так:

$$y^a=\tau\cdot x^a. \tag{17}$$

Текущим точкам прямой (17) будут отвечать в силу $\Pi(X)$ центроаффинные преобразования $\Pi(X,\tau)=\{\tau\cdot x^aA^\alpha_{a\beta}+\delta_\beta^\alpha\}$.

Следовательно, бесконечно удаленной точке прямой (17) отвечает локальное центроаффинное преобразование

$$\widehat{\Pi}(x)=\{x^aA^\alpha_{a\beta}\}, \tag{18}$$

которое называется усеченным преобразованием m-плоскости L_m в себя, соответствующим прямой $x=(\overline{A},\overline{e}_a)\,x^a=AX$.

Из (16) и (18) с учетом [1. Ур. (1), (6)–(8)] следует, что каждому направлению $t\in L_m$, отвечающему точке $A\in S_m$, сопоставляется локальное центроаффинное преобразование нормальной $(n-m)$-плоскости в себя с центром в точке $A\in S_m$:

$$P(t)=\{B^b_{a\alpha\beta}t^\alpha t^\beta\}. \tag{19}$$

Здесь симметрические по α и β величины $B^b_{a\alpha\beta}$ определяются по формулам и удовлетворяют в силу [1. Ур. (4), (7)] дифференциальным уравнениям

$$B^b_{a\alpha\beta}=\frac{1}{2}A^\gamma_{a(\alpha}A^b_{\beta)\gamma};$$

$$dB^b_{a\alpha\beta}+B^c_{a\alpha\beta}\omega^b_c-B^b_{c\alpha\beta}\omega^c_a-$$

$$-B^b_{a\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha-B^b_{a\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta=B^b_{a\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma, \tag{20}$$

причем явный вид величин, стоящих при ω^γ, для нас несущественен.

Геометрически преобразование (19) любую прямую $x=(\overline{A},\overline{e}_a)x^a\in P_{n-m}$ переводит в прямую $u=P(t)x$ в нормальной плоскости P_{n-m}, проходящую через точку $A\in S_m$, которая является пересечением нормальной $(n-m)$-плоскости P_{n-m} с линейным подпространством, проходящим через L_m и содержащим первую дифференциальную окрестность прямой $v=\widehat{\Pi}(x)t$ вдоль нефокального в смысле [3] направления $t=(\overline{A},\overline{e}_\alpha)t^\alpha\in L_m$.

2.2. Поля инвариантных квадратичных геометрических образов в L_m и P_{n-m}

Из (18) и (19) следует, что каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ в линейных подпространствах L_m и P_{n-m} сопоставляются квадратичные геометрические образы, определяемые соответствующими уравнениями:

1) $(n-m-1)$-мерная квадрика $Q^2_{n-m-1}\subset P_{n-m}$ второго порядка

$$Q^2_{n-m-1}=\{X\in P_{n-m}\,|\,\mathrm{ter}[\Pi(X)^2]=0\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{ab}x^ax^b+2A^\alpha_{a\alpha}x^a+m=0, x^\beta=0. \tag{21}$$

Здесь симметрические величины A_{ab} определяются по формулам и удовлетворяют с учетом [1. Ур. (4), (6)] соответствующим дифференциальным уравнениям

$$A_{ab}=A^\alpha_{a\beta}A^\beta_{b\alpha},\ dA_{ab}-A_{cb}\omega^c_a-A_{ac}\omega^c_b=A_{ab\alpha}\omega^\alpha. \tag{22}$$

Причем явный вид величин $A_{ab\alpha}$ для нас несущественен.

2) $(n-m-1)$-мерный конус $K^2_{n-m-1}\subset P_{n-m}$ второго порядка с вершиной в точке A

$$K^2_{n-m-1}=\{x=(A,x^a)\in P_{n-m}\,\big|\,\mathrm{ter}[\widehat{\Pi}(x)]^2=0\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{ab}t^at^b=0, x^\beta=0. \tag{23}$$

Из (21) и (22) следует, что конус K^2_{n-m-1} является асимптотическим конусом для квадрики Q^2_{n-m-1}.

3) $(m-1)$-мерный конус $k^2_{m-1}\subset L_m$ второго порядка с вершиной в точке $A\in S_m$

$$k=\{t\in L_m\,|\,\mathrm{ter}P(t)=0\}\Leftrightarrow B_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta=0, t^{\hat\beta}=0. \tag{24}$$

Здесь симметрические величины $B_{\alpha\beta}=B^a_{a\alpha\beta}$ с учетом (21) и (22) удовлетворяют дифференциальным уравнениям $dB_{\alpha\beta}-B_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha-B_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta=B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma$.

2.3. Инвариантная двумерная площадка $P_2^1 \subset P_{n-m}$

Из (22) и (23) заключаем, что конус $K^2_{n-m-1} \subset P_{n-m}$, отвечающий точке $A \in S_m$, в общем случае не вырождается в конус, по крайней мере, с прямолинейной вершиной, проходящей через точку A, т. е. общем случае det $[A_{ab}] \neq 0$. Поэтому можно ввести в рассмотрение величины $A^{\alpha\gamma}$ по формулам $A^{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Из (22) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $A^{\alpha\gamma}$

$$dA^{\alpha\gamma} + A^{\beta\gamma}\omega^\alpha_\beta + A^{\alpha\beta}\omega^\gamma_\beta = A^{\alpha\gamma}_\sigma \omega^\sigma ;$$

$$A^{\alpha\gamma}_\sigma = -A_{\beta\tau\sigma} A^{\beta\alpha} A^{\tau\gamma} . \qquad (25)$$

Из (21) следует, что $(n-m-1)$-плоскость Γ_{n-m-1} в P_{n-m}, проходящая через точку $A \in S_m$ и являющаяся линейной полярой точки A относительно квадрики $Q^2_{n-m-1} \subset P_{n-m}$, определяется уравнениями

$$A^\alpha_{a\alpha} x^a = 0, \ x^\beta = 0. \qquad (26)$$

Полюсом этой $(n-m-1)$-плоскости Γ_{n-m-1} относительно конуса K^2_{n-m-1} в силу (23) и (24)–(26) является прямая

$$\tilde{p} = (\bar{A}, \bar{e}_a)\tilde{p}^a \subset P_{n-m} . \qquad (27)$$

Здесь величины $\tilde{p}^a$ определяются по формулам и удовлетворяют в силу [1, (4), (6)] и (25) соответствующим дифференциальным уравнениям

$$\tilde{p}^a = A^{ab} A^\beta_{b\beta}, d\tilde{p}^a + \tilde{p}^b \omega^a_b = \tilde{p}^a_\alpha \omega^\alpha ,$$

$$\tilde{p}^a_\alpha = A^{ab}_\alpha A^\beta_{b\beta} + A^{ab} A^\beta_{b\alpha\beta} . \qquad (28)$$

С другой стороны, из [1. Ур. (2)] и (27) заключаем, что прямая $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} = (\bar{A}, \bar{e}_b)\tilde{q}^b \subset P_{n-m} , \qquad (29)$$

где

$$\tilde{q}^b = -A^\alpha_{b\alpha}, \ d\tilde{q}^b + \tilde{q}^a \omega^b_a = \tilde{q}^b_\alpha \omega^\alpha , \ \tilde{q}^b_\alpha = -A^\beta_{b\beta\alpha} ,$$

проходит через точку $A \in S_m$ перпендикулярно $(n-m-1)$-плоскости $\Gamma_{n-m-1} \subset P_{n-m}$.

Из (27)–(29) следует, что в общем случае в точке $A \in S_m$

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} \tilde{p}^{m+1} & \tilde{p}^{m+2} & \dots & \tilde{p}^n \\ \tilde{q}^{m+1} & \tilde{q}^{m+2} & \dots & \tilde{q}^n \end{bmatrix} = 2, \qquad (30)$$

т. е. в общем случае прямые $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ не параллельны. Поэтому каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ можно поставить в соответствие двумерную площадку P_2^1 как линейную оболочку прямых (27) и (29).

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R, при которой с учетом (27)–(30) имеем $\tilde{p}^{\hat{a}_1}=0$, $\tilde{q}^{\hat{a}_1}=0$, $\tilde{p}^{m+1}\tilde{q}^{m+2} - \tilde{q}^{m+1}\tilde{p}^{m+2} \neq 0$. Тогда получаются дифференциальные уравнения (11), а сама эта канонизация геометрически означает инвариантный выбор двумерной площадки $P_2^1 \subset P_{n-m}$ в виде [1. Ур. (10)], т. е. в виде

$$P_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} P_{n-m-2} =$$

$$= (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, ..., \bar{e}_n) \perp P_2^1, (n-m > 2). \qquad (31)$$

Поэтому все результаты раздела 2 в [1] и раздела 1, полученные для случая $n=m+2$, будут иметь место и в случае $n-m>2$. При этом в данном случае все рассуждения, о которых идет речь в указанных разделах, надо проводить в направлении $(n-m-2)$-плоскости $P_{n-m-2} \subset P_{n-m}$.

3. О поверхностях $S^I_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ в E_n

Рассмотренные в предыдущих разделах и разделе 2 в [1] поля некоторых геометрических образов, ассоциированных с m-поверхностью S_m в n-мерном евклидовом пространстве E_n, позволяют при всех m и n, удовлетворяющих неравенствам [1. Ур. (5)], провести одну из возможных классификаций многомерных поверхностей в евклидовом пространстве.

3.1. Случай m-поверхности S_m в E_{m+2}

В соответствии с замечанием 2.1 для m-поверхности $S_m \subset E_{m+2}$ касательная m-плоскость L_m к S_m в точке A расщепляется на линейные двумерные площадки (13).

Рассмотрим любые две из этих площадок, отвечающих точке $A \in S_m$:

$$L_2^p = (\bar{A}, \bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2p}), L_2^q = (\bar{A}, \bar{e}_{2q-1}, \bar{e}_{2q}), \ (p < q).$$

Так же, как и в пункте 1 (см. [1. Ур. (18)–(20)], (5), (6)) показывается, что точке $A \in S_m \subset E_{m+2}$ отвечают при фиксированном направлении $t \in L_m$ отображения

$$f_t^{pq} : L_2^p \to L_2^q \Leftrightarrow y^{\alpha_q} = \mu_p (x^{\beta_p} A^{\alpha_q}_{\beta_p\alpha} + \delta^{\alpha_q}_\alpha) t^\alpha ,$$

$$(\mu_p \neq 0).$$

Геометрически каждое из этих отображений характеризуется аналогично отображению [1. Ур. (18)]. По аналогии с определением 1.1 имеем

$$f_t^{pq} \to f_{tr}^{pq} \Leftrightarrow (A^{2q-1}_{2p-1,\alpha} - A^{2q}_{2p,\alpha}) t^\alpha = 0,$$

$$(A^{2q}_{2p-1,\alpha} + A^{2q-1}_{2p,\alpha}) t^\alpha = 0;$$

$$(p < q, t^\alpha - \text{фиксированы}). \qquad (32)$$

Определение 3.1. m-поверхность $S_m \subset E_{m+2}$ называется m-поверхностью Коши–Римана типа I, если в каждой ее точке

$$f_t^p \to f_{tr}^p , \ \forall t \in L_m \qquad (33)$$

и m-поверхностью Коши–Римана типа II, если в каждой ее точке

$$f_t^p \to f_{tr}^p ; f_t^{pq} \to f_{tr}^{pq} , \ \forall t \in L_m \qquad (34)$$

при всех значениях чисел p и q ($p<q$).

Из (11) и (32) с учетом (33) и (34) следует, что каждая из поверхностей $S^I_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ Коши–Римана первого и второго типа, соответственно характеризуется соотношениями:

$$S^I_{m,m+2} \Leftrightarrow A^{m+1}_{2p-1,\alpha} - A^{m+2}_{2p,\alpha} = 0, A^{m+2}_{2p-1,\alpha} + A^{m+1}_{2p,\alpha} = 0, \qquad (35)$$

(здесь α изменяется от 1 до m, а индекс p изменяется по закону (9)).

$$S^{II}_{m,m+2} \Leftrightarrow A^{m+1}_{2p-1,\alpha} - A^{m+2}_{2p,\alpha} = 0, A^{m+2}_{2p-1,\alpha} + A^{n+1}_{2p,\alpha} = 0,$$
$$A^{2q-1}_{2p-1,\alpha} - A^{2q}_{2p,\alpha} = 0, A^{2q}_{2p-1,\alpha} + A^{2q-1}_{2p,\alpha} = 0. \qquad (36)$$

Здесь индексы p и q изменяются по закону (9) причем $p<q$.

Из дифференциальных уравнений [1. Ур. (7)] и (11) с учетом (10), (32), (35) и (36) замечаем, что на m-поверхностях $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ выполняются следующие дифференциальные уравнения

$$S^{I}_{m,m+2}: \omega^{2p-1}_{m+1} - \omega^{2p}_{m+2} = 0, \omega^{2p}_{m+1} + \omega^{2p-1}_{m+2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega^{m+1}_{2p-1} - \omega^{m+2}_{2p} = 0, \omega^{m+1}_{2p} + \omega^{m+2}_{2p-1} = 0; \qquad (37)$$

$$S^{II}_{m,m+2}: \omega^{m+1}_{2p-1} - \omega^{m+2}_{2p} = 0, \omega^{m+1}_{2p} + \omega^{m+2}_{2p-1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega^{2q-1}_{2p-1} - \omega^{2q}_{2p} = 0, \omega^{2q}_{2p-1} + \omega^{2q-1}_{2p} = 0. \qquad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что m-поверхность $S^{II}_{m,m+2}$ является частным случай m-поверхности $S^{I}_{m,m+2}$.

3.2. В общем случае для m-поверхности S_m в E_n предполагается, что числа m и n удовлетворяют неравенствам [1. Ур. (5)] и $n-m>2$. В соответствии с (31) заметим, что все результаты, изложенные в пункте 3.1 в случае $n=m+2$, справедливы и для случая $n>m+2$. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Многомерные поверхности Коши–Римана $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ существуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.
2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. – 1962. – № 2. – С. 231–240.
3. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 02.12.2011 г.

УДК 514.76

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ КОШИ–РИМАНА В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mal: luchinin@tpu.ru

Изучаются геометрические свойства многомерных поверхностей Коши–Римана в евклидовом пространстве. С этой целью привлекаются, в частности, индуцированные связности в касательных и нормальных расслоениях указанных поверхностей.

***Ключевые слова**:*
Многомерные евклидовы пространства, многомерные поверхности, характеристики, связности.
***Key words**:*
Multidimensional Euclidean spaces, multidimensional surfaces, characteristics, connectivity.

Введение

В статье [1] были изучены частные классы m-поверхностей $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Данная статья является продолжением статей [1, 2] и посвящена изучению некоторых геометрических свойств этих поверхностей. Рассматриваются некоторые поля геометрических образов поверхности $S_m \subset E_n$, которые позволяют выявить дополнительные геометрические свойства поверхностей $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$. В случае четномерной m-поверхности $S^{II}_{m,m+2} \subset E_{m+2}$ изучаются индуцированные связности на $S_m \subset E_n$. На m-поверхностях $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ в случае $n \geq m+2$ (см. [1. Ур. (37), (38)]) выполняются дифференциальные уравнения:

$$S^{I}_{m,m+2}: \omega^{m+1}_{2p-1} - \omega^{m+2}_{2p} = 0, \omega^{m+1}_{2p} + \omega^{m+2}_{2p-1} = 0.$$
$$S^{II}_{m,m+2}: \omega^{m+1}_{2p-1} - \omega^{m+2}_{2p} = 0, \omega^{m+1}_{2p} + \omega^{m+2}_{2p-1} = 0;$$
$$\omega^{2q-1}_{2p-1} - \omega^{2q}_{2p} = 0, \omega^{2q}_{2p-1} + \omega^{2q}_{2p} = 0, \ (p<q). \qquad (1)$$

Все обозначения и терминология, а также значения индексов соответствуют принятым [1–6].

1. Поля некоторых инвариантных геометрических образов

Для выяснения свойств m-поверхностей $S^{I}_{m,m+2}$ и $S^{II}_{m,m+2}$ рассмотрим в случаях 1) и 2) на m-поверхности S_m поля некоторых инвариантных геометрических образов.

1) Каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ поставим в соответствие гиперплоскость $\Gamma_{n-1} \supset L_m$, определяемую уравнением $x_a x^a = 0$. Тогда в соответствии с [3] получаем, что множество Φ^{m}_{n-1} всех касательных (фокальных) к $S_m \subset E_n$ гиперплоскостей Γ_{n-1}, проходящих вдоль направления [2. Ур. (9)] через L_m и бесконечно близкую к L_m первого порядка, определяется в тангенциальных координатах x_a ортонормального репера R уравнением