

- соответствующей связности $C_1(\Delta_{m,2}^{(1)})$ переходит в параллельную двумерную площадку.
4. Образы площадки L_2^p в точке $A \in S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$, $m=2s$, при соответствующих аффинных отображениях

связности $C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$ при каждом $p=\overline{1,s}$, $m=2s$, переходят в соответствующие точки. Если при фиксированном p кручение связности $C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$ равно нулю, то эта связность локально плоская.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Классификация Коши–Римана многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 5–9.
- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормально-го расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.
- Ивлев Е.Т. О многообразии в n -мерном проективном пространстве P_n ($m>2$; $n<m(m+1)$) // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
- Аквис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
- Евтушек Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
- Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразия фигур: Межвуз. темат. сб. научн. трудов. – Калининград: Калининградский ун-т, 1982. – Вып. 15. – С. 32–37.

Поступила 02.12.2011 г.

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

У.Д. Молдоярв

Ошский государственный университет, Кыргызстан
E-mail: ular_osh@rambler.ru

Методом интегральных уравнений и сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова:

Нелокальная задача, интегральные условия, интегро-дифференциальное уравнение, сжимающее отображение, неподвижная точка, однозначная разрешимость

Key words:

Non-local problem, the integral conditions, integro-differential equation, a contraction mapping, fixed point, a unique solution, the Riemann function, the norm of the operator.

1. Постановка задачи. Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1, 2], процессы влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3] приводятся к таким задачам. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [4–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$, где F – заданная функция.

Уравнение (1) представляет собой канонический вид уравнения в частных производных

третьего порядка относительно старших производных по классификации работы [7], когда уравнение характеристик имеет один двукратный и один простой действительные характеристики.

Пусть $C^{m+n}(D)$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \quad (i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n).$$

Задача 1. Требуется найти решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2+1}(D)$ ур. (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) + \int_0^l T_1(x, y) u(x, y) dx = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u(x, 0) + \int_0^h T_2(x, y)u(x, y)dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ – заданные функции.

В случае, когда $T_1(x, y) \equiv 0$, задача 1 изучена в работе [8].

Пусть выполняются условия:

- 1) $\varphi_i(y) \in C[0, h]$ ($i=1, 2$), $\psi(x) \in C^2[0, \ell]$;
- 2) $T_i(x, y) \in C(\bar{D})$ ($i=1, 2$), $T_1(x, y) \in C^{0+1}(D)$,
 $T_2(x, y) \in C^{2+0}(D)$;

$$3) \quad \varphi_1(0) + \int_0^h T_2(0, y)\varphi_1(y)dy = \psi(0);$$

$$4) \quad F(x, y, u, p, q, r, s) \in C(\bar{D} \times R^5),$$

$$\max |F(x, y, u, p, q, r, s)| \leq H,$$

R^5 – пятимерное пространство переменных (u, p, q, r, s) ;

$$5) \quad |F(x, y, u, p, q, r, s) - F(x, y, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s})| \leq$$

$$\leq L(|u - \bar{u}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}| + |r - \bar{r}| + |s - \bar{s}|).$$

2. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Введем обозначение

$$\tau(x) = \psi(x) - \int_0^h T_2(x, y)u(x, y)dy,$$

$$g(y) = \varphi_2(y) - \int_0^\ell T_1(x, y)u(x, y)dx.$$

Тогда решение ур. (1), удовлетворяющее условию (2) и условиям

$$u_x(0, y) = g(y), \quad 0 < y < h, \quad u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < \ell,$$

представимо в виде

$$u(x, y) = \tau(x) + \varphi_1(y) - \varphi_1(0) + [g(y) - g(0)]x =$$

$$= \int_0^x d\xi \int_0^y \nu(x, \xi)F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta,$$

где $\nu(x, \xi) = x - \xi$ – функция Римана.

Отсюда, подставляя значения $\tau(x)$ и $g(y)$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x, y) = \Phi(x, y) - \int_0^\ell xT_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi -$$

$$- \int_0^h T_2(x, \eta)u(x, \eta)d\eta -$$

$$- \int_0^\ell d\xi \int_0^h xT_1(\xi, 0)T_2(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y \Theta(x, \xi)F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta, \quad (5)$$

где

$$\Phi(x, y) = \psi(x) + \varphi_1(y) -$$

$$- \varphi_1(0) + [\varphi_2(y) - \varphi_2(0)]x + \int_0^\ell xT_1(0, \xi)0\psi(\xi)d\xi.$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений из (5) найдем производные

$$u_x(x, y) = \Phi_x(x, y) - \int_0^\ell T_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi -$$

$$- \int_0^h T_{2x}(x, \eta)u(x, \eta)d\eta - \int_0^h T_2(x, \eta)u_x(x, \eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^\ell d\xi \int_0^h T_1(\xi, 0)T_2(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta})d\eta; \quad (6)$$

$$u_y(x, y) = \Phi_y(x, y) - \int_0^\ell xT_{1y}(\xi, y)u(\xi, y)d\xi -$$

$$- \int_0^\ell xT_1(\xi, y)u_y(\xi, y)d\xi +$$

$$+ \int_0^x \Theta(x, \xi)F(\xi, y, u(\xi, y), u_\xi, u_y, u_{\xi\xi}, u_{\xi y})d\xi; \quad (7)$$

$$u_{xx}(x, y) = \Phi_{xx}(x, y) - \int_0^h T_{2xx}(x, \eta)u(x, \eta)d\eta -$$

$$- 2 \int_0^h T_{2x}(x, \eta)u_x(x, \eta)d\eta - \int_0^h T_2(x, \eta)u_{xx}(x, \eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^y F(x, \eta, u(x, \eta), u_x, u_\eta, u_{xx}, u_{x\eta})d\eta; \quad (8)$$

$$u_{xy}(x, y) = \Phi_{xy}(x, y) - \int_0^\ell T_{1y}(\xi, y)u(\xi, y)d\xi -$$

$$- \int_0^\ell T_1(\xi, y)u_y(\xi, y)d\xi +$$

$$+ \int_0^x F(\xi, y, u(\xi, y), u_\xi, u_y, u_{\xi\xi}, u_{\xi y})d\xi. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи 1 сведено к решению систему уравнений (5)–(9).

3. Решение системы уравнений методом сжимающих отображений. С этой целью систему уравнений запишем в виде

$$g = Ag, \quad (10)$$

где $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ – вектор-функция с компонентами $g_1 = u(x, y)$, $g_2 = u_x(x, y)$, $g_3 = u_y(x, y)$, $g_4 = u_{xx}(x, y)$, $g_5 = u_{xy}(x, y)$, а оператор $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ определяется на множестве функций $g \in C(\bar{D})$ и его компоненты определяются с помощью равенствами (5)–(9):

$$A_i g \equiv g_{0i} + \int_0^\ell K_{i1}g_1(\xi, y)d\xi + \int_0^\ell K_{i2}g_2(\xi, y)d\xi +$$

$$+ \int_0^h K_{i3}g_3(x, \eta)d\eta + \int_0^h K_{i4}g_4(x, \eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^h K_{i5}g_5(x, \eta)d\eta + \int_0^h K_{i6}g_6(x, \eta)d\eta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x K_{i7} F(\xi, y, g_1(\xi, y), g_2, g_3, g_4, g_5) d\xi + \\
 & + \int_0^y K_{i8} F(x, \eta, g_1(x, \eta), g_2, g_3, g_4, g_5) d\eta + \\
 & + \int_0^\ell d\xi \int_0^h K_{i9} g_1(\xi, \eta) d\eta + \\
 & + \int_0^x d\xi \int_0^y K_{i0} F(\xi, \eta, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) d\eta, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $K_{11} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{12} = 0$, $K_{13} = -T_2(x, \eta)$, $K_{14} = 0$, $K_{15} = 0$, $K_{16} = 0$, $K_{17} = 0$, $K_{18} = 0$, $K_{19} = -xT_1(\xi, 0)$, $T_2(\xi, \eta)$, $K_{10} = v(\xi, \eta)$, $K_{21} = -T_1(\xi, y)$, $K_{22} = 0$, $K_{23} = -T_2(x, \eta)$, $K_{24} = -T_2(x, \eta)$, $K_{25} = 0$, $K_{26} = 0$, $K_{27} = 0$, $K_{28} = 0$, $K_{29} = T_1(\xi, 0)$, $T_2(\xi, \eta)$, $K_{20} = 1$, $K_{31} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{32} = -xT_1(\xi, y)$, $K_{33} = K_{34} = 0$, $K_{35} = K_{36} = 0$, $K_{37} = v(x, \xi)$, $K_{38} = K_{39} = K_{30} = 0$, $K_{41} = K_{42} = 0$, $K_{43} = -T_2(x, \eta)$, $K_{44} = -2T_2(x, \eta)$, $K_{45} = 0$, $K_{46} = -T_2(x, \eta)$, $K_{47} = 0$, $K_{48} = 1$, $K_{49} = 0$, $K_{40} = 0$, $K_{51} = -T_1(\xi, y)$, $K_{52} = -T_1(\xi, y)$, $K_{53} = K_{54} = K_{55} = K_{56} = 0$, $K_{57} = 1$, $K_{58} = 0$, $K_{59} = K_{50} = 0$, а $g_{01} = \Phi(x, y)$, $g_{02} = \Phi_x(x, y)$, $g_{03} = \Phi_y(x, y)$, $g_{04} = \Phi_{xx}(x, y)$, $g_{05} = \Phi_{xy}(x, y)$, компоненты вектора $g_0 = (g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04}, g_{05})$.

Норму g определим равенством

$$\|g\| = \max_{1 \leq i \leq 5} \max_{(x, y) \in D} (g_i(x, y)).$$

В силу свойств заданных функций (1, 2) заключаем, что

$$\exists M > 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D} : \|g_0\| \leq M.$$

Пусть оператор A осуществляет отображение шара

$$S(g_0, M) = \{g : \|g - g_0\| \leq M\}.$$

Тогда

$$\forall g \in S(g_0, M) : \|g\| \leq 2M.$$

В силу свойств заданных функций (1)–(4) также заключаем, что

$$\exists T > 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D} : \max |K_{ij}| \leq T,$$

$$T = \text{const}, i = \overline{1, 5}, j = \overline{0, 9}.$$

Пусть выполняется условие

$$Q(\ell, h) = T(2\ell + 4h + \ell h) \left(2 + 5L + \frac{H}{M} \right) < 1. \quad (12)$$

Покажем, что при выполнении условия (12) оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Пусть $g \in S(g_0, M)$. Тогда из (11) следует, что $Ag \in C(D)$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 |A_i g - g_{0i}| & \leq \int_0^\ell |K_{i1}| |g_1(\xi, y)| d\xi + \\
 & + \int_0^\ell |K_{i2}| |g_2(\xi, y)| d\xi + \int_0^h |K_{i3}| |g_1(x, \eta)| d\eta + \\
 & + \int_0^h |K_{i4}| |g_2(x, \eta)| d\eta + \int_0^h |K_{i5}| |g_3(x, \eta)| d\eta + \\
 & - \int_0^h |K_{i6}| |g_4(x, \eta)| d\eta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x |K_{i7}| |F(\xi, y, g_1(\xi, y), g_2, g_3, g_4, g_5)| d\xi + \\
 & + \int_0^y |K_{i8}| |F(x, \eta, g_1(x, \eta), g_2, g_3, g_4, g_5)| d\eta + \\
 & + \int_0^\ell d\xi \int_0^h |K_{i9}| |g_1(\xi, \eta)| d\eta + \\
 & + \int_0^x d\xi \int_0^y |K_{i0}| |F(\xi, \eta, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)| d\eta < \\
 & < T(2M + H)(2\ell + 4h + \ell h).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|Ag - g_0\| & = \max_{1 \leq i \leq 5} \max_{(x, y) \in D} |A_i g - g_{0i}| < \\
 & < T(2M + H)(2\ell + 4h + \ell h) = \\
 & = T \left(2 + \frac{H}{M} \right) (2\ell + 4h + \ell h) < Q(\ell, h)M.
 \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что при выполнении условия (12) имеет место неравенство

$$\|Ag - g_0\| < Q(\ell, h)M < M.$$

Это означает, что оператор A отображает шар в себя, т. е. $Ag \in S(g_0, M)$. Теперь покажем, что оператор A при выполнении условия (12) является сжимающим отображением. Пусть $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)})$, $g^{(2)} = (g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)}, g_5^{(2)})$ произвольные два вектора, принадлежащие шару $S(g_0, M)$. Тогда из условия (5) следует, что $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$:

$$\begin{aligned}
 & \left| F(x, y, g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)}) - \right. \\
 & \left. - F(x, y, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)}, g_5^{(2)}) \right| \leq \\
 & \leq L \sum_{i=1}^5 |g_i^{(1)} - g_i^{(2)}| \leq 5L \|g^{(1)} - g^{(2)}\|.
 \end{aligned}$$

Используя это условие из (11) получим

$$|A_i g^{(1)} - A_i g^{(2)}| \leq T(2\ell + 4h + \ell h)(1 + 5L) \|g^{(1)} - g^{(2)}\|, i = \overline{1, 5}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\| & \leq T(2\ell + 4h + \ell h)(1 + 5L) \|g^{(1)} - g^{(2)}\| < \\
 & < Q(\ell, h) \|g^{(1)} - g^{(2)}\|.
 \end{aligned}$$

Так как, в силу неравенства (12) $Q(\ell, h) < 1$, то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха [9] в шаре $S(g_0, M)$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение ур. (10). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)})$ можно однозначно определить все компоненты вектора g и тем самым определить решение задачи 1 в области D и установить, что построенное решение принадлежит классу $C^{2+1}(D)$. Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (1)–(5) и (12), то система уравнений (5)–(9) определяет в области $D^* = \{(x, y) : 0 < x < \ell^*, 0 < y < h^*\}$ единственное решение задачи 1, принадлежащее классу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. — 1963. — V. 21. — P. 155–160.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13. — № 2. — С. 294–304.
3. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 1. — С. 72–81.
4. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Украинский математический журнал. — 1990. — Т. 42. — № 1. — С. 132–135.
5. Пулькина Л.С. Смешенная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. — 2003. — Т. 74. — Вып. 3. — С. 435–445.
6. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. — 2008. — № 2 (61). — С. 22–28.
7. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 10. — С. 1734–1745.
8. Сопуев А., Молдоярлов У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // Матер. Междунар. юбилейной научной конф., посвящ. 15-летию образования КРСУ. — Бишкек: КРСУ, 2008. — С. 188–192.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

Поступила 10.11.2011 г.

УДК 519.63

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.П. Зимин

Томский политехнический университет
E-mail: zimmin@ido.tpu.ru

Предложено развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Такой анализ необходим на этапах алгоритмизации нелинейных краевых задач и верификации моделей. Обоснован выбор фазовых плоскостей для анализа решений краевой задачи о распределении параметров низкотемпературной плазмы термоэмиссионного преобразователя.

Ключевые слова:

Краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный преобразователь энергии.

Key words:

Boundary value problem, method of phase plane, low-temperature plasma, thermionic converter.

Введение

Первая фаза вычислительного эксперимента (ВЭ) состоит из нескольких этапов: создание и исследование модели; её алгоритмизация; программирование алгоритма; сравнение модельных и экспериментальных результатов — верификации модели [1]. Эффективность исследования и алгоритмизации модели зависит от выбора адекватных математических методов её анализа. Например, на этапе алгоритмизации традиционно применяют один из математических методов, который позволяет построить алгоритм преобразования непрерывной модели в дискретную, пригодную для анализа на ПЭВМ. Вместе с тем, на первых двух этапах ВЭ важным является определение области допустимых решений модели, выявление и изучение общих характерных свойств этих решений, которые необходимо учитывать при алгоритмизации.

Кроме этого, остается окончательно не решенной проблема выбора критериев сравнения модельных и экспериментальных результатов на этапе верификации модели. Этот этап ВЭ существен-

ным образом влияет как на фазу калибровки модели, так и на фазу прогноза: он должен давать направление модификации модели и определять обоснованность экстраполяции результатов моделирования.

Все это вместе взятое требует поиска новых и развитие имеющихся методов анализа математических моделей. Для анализа решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на разных этапах ВЭ широко применяется метод фазовой плоскости [2–7]. Данная статья посвящена развитию метода фазовой плоскости, его применению к анализу решений краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП).

Применение метода фазовой плоскости для краевых задач систем дифференциальных уравнений с частными производными

Понятия фазового пространства, связанных с ним структур, а также метод фазовой плоскости могут быть расширены и применены для краевой