

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»



ISSN 1684-8519

ИЗВЕСТИЯ

ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 322, № 2, 2013

Математика и механика.
Физика

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ

г. Томск

ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Редакционный совет:

Чубик П.С. (председатель), д.т.н., ректор ТПУ (г. Томск)
Пестряков А.Н. (заместитель председателя),
д.х.н., проректор ТПУ по НИИ (г. Томск)
Алексеенко С.В., д.ф.-м.н.,
член-корреспондент РАН (г. Новосибирск)
Болдырев В.В., д.х.н., академик РАН (г. Новосибирск)
Боровиков Ю.С., к.т.н. (г. Томск)
Гуляев Ю.В., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)
Дамамм Ж., PhD, д.н. (Франция)
Дмитриев А.Ю., к.т.н. (г. Томск)
Долматов О.Ю., к.т.н. (г. Томск)
Ершов Ю.Л., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Новосибирск)
Замятин А.В., к.т.н. (г. Томск)
Клименов В.А., д.т.н. (г. Томск)
Конторович А.Э., д.г.-м.н., академик РАН (г. Новосибирск)
Крёнинг М., PhD, д.н. (Германия)
Летников Ф.А., д.г.-м.н., академик РАН (г. Иркутск)
Месяц Г.А., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)
Михайленко Б.Г., д.ф.-м.н.,
академик РАН (г. Новосибирск)
Накоряков В.Е., д.т.н., академик РАН (г. Новосибирск)
Панин В.Е., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Томск)
Сигов А.С., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)
Сигфуссон Т.И., PhD, д.н. (Исландия)
Третьяков Ю.Д., д.х.н., академик РАН (г. Москва)
Турнаев В.И., д.и.н. (г. Томск)
Филиппов Г.А., д.т.н., академик РАН (г. Москва)
Чайковский Д.В., к.ф.н. (г. Томск)
Шень Джаоли, PhD, д.н. (Китай)
Яковлев А.Н., к.ф.-м.н. (г. Томск)

Редакционная коллегия:

Пестряков А.Н. (председатель, главный редактор), д.х.н.
Коробейников А.Ф. (зам. председателя), д.г.-м.н.
Глазырин А.С. (главный редактор Издательства ТПУ), к.т.н.
Могильницкий С.Б. (учёный секретарь), к.ф.-м.н.
Барышева Г.А., д.э.н.
Григорьев В.П., д.ф.-м.н.
Заворин А.С., д.т.н.
Иванчина Э.Д., д.т.н.
Ильин А.П., д.ф.-м.н.
Корниенко А.А., д.ф.н.
Лавринович В.А., д.т.н.
Погребной В.К., д.т.н.
Савичев О.Г., д.г.н.
Тузовский А.Ф., д.т.н.
Шаманин И.В., д.ф.-м.н.

Журнал зарегистрирован Министерством
Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ № 77-16615 от 24 октября 2003 г.
Учредитель: Томский политехнический университет

Издается с 1903 г.

BULLETIN OF THE TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY

Editorial Board:

Chubik P.S. (Chairman), D.E., rector of TPU (Tomsk)
Pestryakov A.N. (Deputy Chairman) D. Chem.,
pro-rector of TPU for Research and Innovation (Tomsk)
Aleksenko S.V., D. Phys. and Math. Sc.,
corresponding member of RAS (Novosibirsk)
Boldyrev V.V., D. Chem., member of RAS (Novosibirsk)
Borovikov Yu.S., Candidate of Science (Tomsk)
Gulyaev Yu.V., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)
Damamm G., D. Phys. and Math. Sc. (France)
Dmitriev A.Yu., Candidate of Science (Tomsk)
Dolmatov O.Yu., Candidate of Science (Tomsk)
Ershov Yu.L., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Novosibirsk)
Zamyatin A.V., Candidate of Science (Tomsk)
Klimenov V.A., D.E. (Tomsk)
Kontorovich A.E., D. Geol. and Mineral. Sc., member of RAS (Novosibirsk)
Kröning M., Dr.h.c. (Germany)
Letnikov F.A., D. Geol. and Mineral. Sc., member of RAS (Irkutsk)
Mesyats G.A., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)
Mikhailenko B.G., D. Phys. and Math. Sc.,
member of RAS (Novosibirsk)
Nakoryakov V.E., D. E., member of RAS (Novosibirsk)
Panin V.E., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Tomsk)
Sigov A.S., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)
Sigfusson T.I., Ph. D. (Iceland)
Tretyakov Yu.D., D. Chem., member of RAS (Moscow)
Turnaev V.I., Ph. D. (Tomsk)
Filippov G.A., D.E., member of RAS (Moscow)
Chaikovsky D.V., Candidate of Science (Tomsk)
Shen Zhaoli, Ph. D. (China)
Yakovlev A.N., Candidate of Science (Tomsk)

Editorial:

Pestryakov A.N. (Chairman, Editor in Chief), D. Chem.
Korobeinikov A.F. (Deputy Editor in Chief), D. Geol. and Mineral. Sc.
Glazyrin A.S. (Editor in Chief), Candidate of Science
Mogilnitsky S.B. (Science Secretary), Candidate of Phys. and Math. Sc.
Barysheva G.A., Ec. D.
Grigoriev V.P., D. Phys. and Math. Sc.
Zavorin A.S., D.E.
Ivanchina E.D., D.E.
Ilyin A.P., D. Phys. and Math. Sc.
Kornienko A.A., Ph. D.
Lavrinovich V.A., D.E.
Pogrebnoy V.K., D.E.
Savichev O.G., D. Geogr. Sc.
Tuzovsky A.F., D.E.
Shamanin I.V., D. Phys. and Math. Sc.

Подписной индекс по каталогу
Агентства «Роспечать» – 18054

Журнал рассылается в адреса 50-и библиотек РФ,
США, ФРГ, Великобритании, Франции
и 9-и стран ближнего зарубежья

Полнотекстовый доступ к электронной версии
журнала возможен на сайтах ТПУ: portal.tpu.ru/izvestiya/;
ООО «Научная электронная библиотека»:
www.elibrary.ru, www.e-library.ru,
а также поисковой системы scholar.google.com

Импакт-фактор РИНЦ 2011 г. 0,210

© Tomsk Polytechnic University, 2013

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ФИЗИКА | |
| К вопросу о точности асимптотических приближений формулы Бернулли Карпов И.Г., Грибков А.Н. | 5 |
| Оптимальная передача сигнала по совокупности непрерывного и дискретного каналов с памятью и запаздыванием Рожкова С.В. | 8 |
| Исследование особенностей плазменных граничных условий у эмиттера термоэмиссионного диода Зимин В.П. | 11 |
| Исследование высокоинтенсивного MAR-потока Моисеев А.Н., Назаров А.А. | 16 |
| Исследование RQ-системы MMPP M 1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки Назаров А.А., Моисеева Е.А. | 19 |
| Отображение аффинного пространства в многообразии нуль-пар проективного пространства Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А. | 24 |
| Экспоненциальное вырождение в случае нецелочисленных порядков в локальном дробном анализе на основе d -оператора Чуриков В.А. | 29 |
| Интегрирование и дифференцирование биномиальных разложений в локальном дробном анализе Чуриков В.А. | 33 |
| Метод обобщенной дзета-функции для скалярного поля на однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом Бреев А.И. | 36 |
| Оценивание параметров RL-цепей электромеханических систем в режиме функционирования на основе метода покоординатного спуска Хохлова Т.Е., Глазырин А.С., Полищук В.И. | 41 |
| Модифицированные распределения Джонсона и их применение для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных Карпов И.Г., Зырянов Ю.Т., Грибков А.Н. | 46 |
| Способы повышения обусловленности матриц при решении систем разностных уравнений в задачах идентификации параметров динамических объектов Боловин Е.В., Глазырин А.С. | 51 |
| Диффузия водорода в субмикрористаллическом титане Грабовецкая Г.П., Никитенков Н.Н., Мишин И.П., Душкин И.В., Степанова Е.Н., Сыпченко В.С. | 55 |
| Теория возбуждения электромагнитных колебаний в коаксиальном отражательном триоде с радиально-расходящимся пучком Григорьев В.П., Тимофеев А.А., Григорьев А.В. | 60 |
| Оценка сдвигающих усилий элементов многожильного кабеля при деформациях изгиба Исмаилов Г.М., Павлов М.С., Тюрин А.Е. | 64 |
| Устойчивость энтропийной оценки живучести систем Деева В.С., Романишина С.А., Слободян С.М. | 67 |
| Деструкция скользящего ламельного контакта Деева В.С., Слободян С.М. | 72 |
| Перенос оптического излучения в слоистой дисперсной среде с отражающей поверхностью Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. | 78 |
| Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных полимерных труб методом конечных элементов Бочкарева С.А., Реутов Ю.А. | 81 |
| Обращение волнового фронта с использованием амплитудного транспаранта Макенова Н.А., Джухраев Р.Ф. | 85 |
| Амплитудно-частотные характеристики инфразвуковых сигналов от наземных взрывов Провоторов Д.С., Соловьев А.В., Виноградов Ю.А. | 87 |
| Выходное окно сильноточного ускорителя электронов «АСТРА» Егоров И.С., Кайканов М.И., Ремнев Г.Е. | 91 |
| Влияние скин-эффекта на электродинамические характеристики высокочастотного факельного разряда Луценко Ю.Ю., Зеленецкая Е.П., Власов В.А. | 95 |

CONTENTS

| | |
|--|----|
| MATHEMATICS AND MECHANICS. PHYSICS | |
| On the issue of asymptotic approximations accuracy of Bernoulli's formula Karpov I.G., Gribkov A.N. | 5 |
| Optimal signal transmission along the continuous and discrete channels with memory and delay Rozhkova S.V. | 8 |
| The research of features of plasma boundary conditions for emitter of thermionic diode Zimin V.P. | 11 |
| The research of high-intensity MAR-arrival process Moiseev A.N., Nazarov A.A. | 16 |
| The research of RQ-system by MMPP M 1 method of asymptotic analysis at heavy load Nazarov A.A., Moiseeva E.A. | 19 |
| Affine space mapping to the zero-pair variety of the projective space Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A. | 24 |
| Exponential degeneration in case of not-integral orders in local fractional analysis based on d -operator Churikov V.A. | 29 |
| Integration and differentiation of binomial decompositions in local fractional analysis Churikov V.A. | 33 |
| Method of generalized zeta-function for scalar field on homogeneous spaces with invariant metric and zero defect Breev A.I. | 36 |
| Estimation of RL-chain parameters in electromechanical systems in operating mode based on the coordinate-wise descent technique Khokhlova T.E., Glazyrin A.S., Polishchuk V.I. | 41 |
| Johnson's modified distributions and their application for approximation of distribution laws of the experimental data Karpov I.G., Zyryanov Yu.T., Gribkov A.N. | 46 |
| The methods for increasing matrix conditionality when solving the difference equations systems in problems of identification of dynamic object parameters Bolovin E.V., Glazyrin A.S. | 51 |
| Hydrogen diffusion in submicrocrystalline titanium Grabovetskaya G.P., Nikitenkov N.N., Mishin I.P., Dushkin I.V., Stepanova E.N., Sypchenko V.S. | 55 |
| The theory of electromagnetic oscillation excitation in coaxial reflective triode with radiate beam Grigoryev V.P., Timofeev A.A., Grigoryev A.V. | 60 |
| Estimation of shifting efforts of elements in multicore cable at bend deformations Ismailov G.M., Pavlov M.S., Tyurin A.E. | 64 |
| Stability of entropy estimation of system vitality Deeva V.S., Romanishina S.A., Slobodyan S.M. | 67 |
| Destruction of sliding lamellar contact Deeva V.S., Slobodyan S.M. | 72 |
| Optical radiation transfer in layered dispersion media with reflective surface Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B. | 78 |
| The research of stress-strain state of multilayer polymer pipes by the finite element method Bochkareva S.A., Reutov Yu.A. | 81 |
| Wavefront reversal using amplitude transparency Makenova N.A., Dzhuraev R.F. | 85 |
| Amplitude-frequency characteristics of land explosion infrasound signals Provotorov D.S., Solov'yev A.V., Vinogradov Yu.A. | 87 |
| Exit window of high-current accelerator of ASTRA electrons Egorov I.S., Kaykanov M.I., Remnev G.E. | 91 |
| Skin effect influence on electrodynamic characteristics of high-frequency torch discharge Lutsenko Yu.Yu., Zelenetskaya E.P., Vlasov V.A. | 95 |

| | | |
|---|-----|--|
| Расчет нагрузочных характеристик электропривода углового компрессора Филипас А.А., Осиненко В.В., Кладиев С.Н., Фомин А.А. | 101 | Estimation of electric drive load characteristics in angle compressor Filipas A.A., Osinenko V.V., Kladijev S.N., Fomin A.A. |
| Математическое описание результатов изучения сушки гранулированного черного медно-молибденового концентрата месторождения «Тастау» Каримова Л.М., Кайралапов Е.Т., Жумашев К.Ж., Токбулатов Т.Е. | 106 | Mathematical description of the results of studying drying of granulated rough copper-molybdenum concentrate of «Tastau» deposit Karimova L.M., Kayralapov E.T., Zhumashev K.Zh., Tokbulatov T.E. |
| Структурообразование композиционных покрытий «Сталь Р6М5 – (WC+TiC)» в зависимости от содержания карбида вольфрама в исходной шихте Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г. | 111 | Structurization of composition coatings «steel R6M5 – (WC+TiC)» depending on tungsten carbide content in original batch Gnyusov S.F., Durakov V.G. |
| Влияние никеля на микроструктуру и свойства медно-хромового контактного материала, полученного электронно-лучевой наплавкой Дураков В.Г., Гнюсов С.Ф., Дехонова С.Э. | 116 | Nickel effect on microstructure and properties of copper-chromium contact material obtained by electron beam facing Durakov V.G., Gnyusov S.F., Dekhonova S.Z. |
| Структура карбидной подсистемы композиционных покрытий на основе аустенитных сталей Гнюсов С.Ф., Маков Д.А. | 120 | The structure of carbide subsystem of composition coatings on the basis of austenitic steels Gnyusov S.F., Makov D.A. |
| Пластические волны в никелиде титана при скольжении сферического индентора Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В., Табаченко А.Н., Шулепин И.А. | 125 | Plastic waves in titanium nickelide at spherical indenter sliding Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Tabachenko A.N., Shulepin I.A. |
| Исследование свойств никелида титана, инициированных высоким гидростатическим давлением Хохлов В.А., Потекаев А.И., Галсанов С.В. | 130 | The investigation of titanium nickelid properties initiated by high hydrostatic pressure Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Galsanov S.V. |
| Физико-механические и прочностные свойства сплавов на основе никелида титана (ТН-10, ТН-20, ТН-1В) Солдатова М.И., Ходоренко В.Н., Гюнтер В.Э. | 135 | Physical-mechanical and strength properties of alloys on the basis of titanium nickelide (TN-10, TN-20, TN-1V) Soldatova M.I., Khodorenko V.N., Gyunter V.E. |
| Реализация эффекта Ребиндера в системе алюминий – галлий по бинарной схеме Сарычев К.Ю., Мясникова В.И., Волошина М.С., Коновалов С.В., Громов В.Е. | 140 | Implementation of Rehbinder effect in aluminum-gallium system according to binary scheme Sarychev K.Yu., Myasnikova V.I., Voloshina M.S., Konovalov S.V., Gromov V.E. |
| Аномально-термодеформационное поведение кубических фаз цианистых кристаллов. I. Цианид натрия Беломестных В.Н., Теслева Е.П. | 143 | Anomalous thermo-strain behavior of cubic phase of cyanic crystals. I. Sodium cyanide Belomestnykh V.N., Tesleva E.P. |
| Разработка математической модели электрофильтра с вращающимся осадительным электродом Касимова Б.Р., Баубек А.А., Кусатаева А.К. | 147 | The development of mathematical model of electric precipitator with rotating collecting electrode Kasimova B.R., Baubek A.A., Kusataeva A.K. |
| Результаты испытания частично синтетического моторного масла Bizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL Ковальский Б.И., Малышева Н.Н., Тарасов Е.В., Дьяков С.А. | 151 | The results of the test of semi-synthetic engine oil Bizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL Kovalsky B.I., Malysheva N.N., Tarasov E.V., Dyakov S.A. |
| Результаты исследования состояния моторного масла при эксплуатации двигателя Верещагин В.И., Ковальский Б.И., Рунда М.М. | 157 | The results of investigation of motor oil state at engine operating Vereshchagin V.I., Kovalsky B.I., Runda M.M. |
| Математическая модель эволюции аэрозолей при ультразвуковом воздействии Кудряшова О.Б., Антонникова А.А. | 160 | Mathematical model of aerosol evolution at ultrasonic influence Kudryashova O.B., Antonnikova A.A. |
| Экспериментальное определение интенсивности теплового источника в очаге повреждаемости при циклических нагрузках Куриленко Г.А. | 164 | Experimental determination of thermal source intensity in damage center at cyclic loads Kurilenko G.A. |
| Распыление жидкости при импульсном воздействии сжатым воздухом Коровина Н.В., Кудряшова О.Б., Ворожцов Б.И., Шрагер Э.Р. | 167 | Liquid atomization at pulse influence by compressed air Korovina N.V., Kudryashova O.B., Vorozhtsov B.I., Shragер E.R. |
| Моделирование поступательно-вращательного движения древесных частиц при ориентировании Плотников С.М., Лурье М.С. | 171 | Modeling the translational-rotational motion of wood particles at orientation Plotnikov S.M., Lurye M.S. |
| Моделирование процесса перемешивания струйным методом жидких радиоактивных отходов в прямоугольных емкостях Балысников А.В., Зарипова Л.Ф., Пищулин В.П., Сваровский А.Я. | 178 | Modeling mixing process by the jet method of liquid radioactive waste in rectangle reservoirs Balyasnikov A.V., Zaripova L.F., Pishchulin V.P., Svarovsky A.Ya. |
| Повышение эффективности установки с водографитовым реактором при частичных нагрузках Воробьев А.В., Антонова А.М. | 182 | Improvement of efficiency of the device with water-graphite reactor at partial loads Vorobyev A.V., Antonova A.M. |
| Акустические характеристики планарной KrCl-эксцилмпы барьерного разряда Соснин Э.А., Панарин В.А., ПикULEV А.А., Тарасенко В.Ф. | 186 | Acoustic characteristics of planar KrCl-exciclamp of dielectric barrier discharge Sosnin E.A., Panarin V.A., Pikulev A.A., Tarasenko V.F. |
| СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ ТПУ | | |
| Ректор ТПИ А.А. Воробьев – изобретатель электроимпульсного способа разрушения горных пород Адам А.М. | 191 | THE PAGES OF HISTIRY OF TPU Rector of TPI A.A. Vorob'yev is the inventor of electropulse method of rocks destruction Adam A.M. |
| РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ | | |
| СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ | | |
| 197 | 197 | SUMMARIES |
| 201 | 201 | INFORMATION ABOUT AUTHORS |

Математика и механика

УДК 519.2

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ

И.Г. Карпов, А.Н. Грибков

Тамбовский государственный технический университет

E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

Предложены выражения для аппроксимации формулы Бернулли, позволяющие более точно определять вероятности появления события A ровно k раз при большом количестве независимых испытаний, если в каждом из них событие A наступает с вероятностью p .

Ключевые слова:

Формула Бернулли, независимые испытания, аппроксимация.

Key words:

Bernoulli's formula, independent trials, approximation.

В теории вероятностей при решении целого ряда практических задач приходится сталкиваться со следующей схемой проведения испытаний: производится N независимых испытаний, в результате каждого из них происходит либо событие A с вероятностью p , либо противоположное ему событие C с вероятностью $q=1-p$. Два исхода каждого испытания (наступление события A либо события C) обычно обозначают символами «1» и «0» или называют «успехом» и «неудачей». Такая схема испытаний впервые была рассмотрена Я. Бернулли и носит его имя [1–3].

Вероятность $P_N(k)$ того, что событие A при N испытаниях наступит ровно k раз ($k=1,2,\dots,N$) определяется по формуле Бернулли [1–3]

$$P_N(k) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}, \quad (1)$$

представляющей собой биномиальное распределение. Основными числовыми характеристиками распределения (1) являются математическое ожидание m , дисперсия D , коэффициент асимметрии K_a и коэффициент эксцесса K_s , определяемые соотношениями [4]:

$$m = Np; \quad D = Npq; \quad K_a = \frac{q-p}{\sqrt{Npq}}; \quad K_s = \frac{1-6pq}{Npq}.$$

С помощью формулы Бернулли можно вычислять вероятности появления событий при произ-

вольном, в том числе большом, числе испытаний N . Однако ее практическое использование сопряжено с трудностями уже при $N > 10$, что вызвано необходимостью проведения операций над очень большими числами. Эти трудности можно преодолеть, например, путем использования специальных рекуррентных алгоритмов вычисления факториалов и степеней больших чисел, но это сопряжено с увеличением объемов вычислений и не всегда практически удобно. Значительного упрощения удастся достичь также применением программных систем компьютерной математики. Однако и этот путь не может в полной мере решить проблему размерности задач и операций над весьма большими числами, возникающую, например, при анализе нескольких десятков и сотен испытаний. В то же время исследования асимптотического поведения вероятностей $P_N(k)$ появления ровно k раз события A при N испытаниях при стремлении N к бесконечности дают возможность получать приближенные, но достаточно точные с практической точки зрения, значения этих вероятностей по значительно более простым выражениям, чем формула Бернулли (1).

В настоящее время в качестве асимптотических (приближенных) формул для вычисления вероятностей $P_N(k)$ используют формулу

$$P_N(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(k-Np)^2}{2Npq}\right], \quad (2)$$

которая является следствием локальной теоремы Муавра–Лапласа, а также формулу Пуассона при $p < 0,05$ [4]

$$P_N(k) \approx \frac{(Np)^k}{k!} \exp[-Np]. \quad (3)$$

В течение последних 30 лет пристальное внимание многих исследователей привлекает семейство обратного гауссовского распределений [4–7]. В качестве аппроксимирующего распределения из этого семейства распределений широко используется распределение Вальда

$$p(x) = \frac{0,5c}{\sqrt{\pi \lambda (x - \mu)}} \times \exp \left[c - \lambda (x - \mu) - \frac{0,25c^2}{\lambda (x - \mu)} \right]; \quad x > \mu, \quad (4)$$

где $c > 0, \lambda > 0, -\infty < \mu < \infty$ – параметры распределения (4). Оно имеет асимметричную форму с $K_a > 0$ и также, как гауссовское и пуассоновское распределения, является безгранично делимым распределением.

Основная цель данной работы – предложить выражения, аналогичные (2) и (3), для аппроксимации формулы Бернулли (1), которые позволят более точно определять вероятности $P_N(k)$ появления события A ровно k раз при большом количестве независимых испытаний, если в каждом из них событие A наступает с вероятностью p , а также рассмотреть условия, при которых возможен точный расчет вероятности $P_N(k)$ без особых затруднений.

Отметим сразу, что если количество независимых испытаний $N \leq 10$, то расчет вероятности $P_N(k)$ появления события A ровно k раз можно производить точно по формуле Бернулли (1) либо с помощью рекуррентных формул

$$P_N(k) = \frac{p(N+1-k)}{(1-p)k} P_N(k-1), \quad P_N(0) = (1-p)^N; \quad (5)$$

$$P_N(k) = \frac{(1-p)(k+1)}{p(N-k)} P_N(k+1), \quad P_N(N) = p^N. \quad (6)$$

Если количество независимых испытаний $N > 10$, то удобнее прямые вычисления вероятности $P_N(k)$ появления события A ровно k раз производить по рекуррентным формулам (5) и (6). При этом если выполняются условия

$$P_N(k) \geq 0,0001; \quad 0 \leq k \leq 10, \quad (7)$$

то используется рекуррентная формула (5).

При выполнении условий

$$P_N(k) \geq 0,0001; \quad N-10 \leq k \leq N \quad (8)$$

используется рекуррентная формула (6). Верхние граничные значения параметров N и p , при которых еще выполняются условия (7) или (8), приведены в таблице.

Рассмотрим теперь приближенные формулы для расчета вероятности $P_N(k)$ появления события

A ровно k раз при различных значениях вероятности p , если количество независимых испытаний $N > 10$:

1. Пусть $0 < p \leq 0,02$. В этом случае можно использовать формулу Пуассона (3).

2. Если $0 < p \leq 0,45; N' \geq 6/pq$, то для аппроксимации формулы (1) можно использовать распределение Вальда (4)

$$P_N(k) \approx \frac{0,5c}{\sqrt{\pi \lambda (k - \mu)}} \times \exp \left[c - \lambda (k - \mu) - \frac{0,25c^2}{\lambda (k - \mu)} \right], \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1,5}{1-2p}; \quad c = \frac{9(N+0,5)pq}{(1-2p)^2};$$

$$\mu = Np - \frac{9(N+0,5)pq}{1-2p}.$$

3. Если $0,45 < p < 0,55; N' \geq 6/pq$, то для аппроксимации формулы (1) используется гауссовское распределение

$$P_N(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(N+0,5)pq}} \exp \left[-\frac{(k-Np)^2}{2(N+0,5)pq} \right]. \quad (10)$$

Оно отличается от распределения (2) величиной дисперсии, что позволяет обеспечить более высокую точность аппроксимации распределения (1).

Таблица. Значения параметров N и p , при которых выполняются условия (7) или (8)

| | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-------|-------|-------|------|------|------|-----|------|-----|
| Условия (7) | p | 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 |
| | N | 1500 | 900 | 300 | 190 | 100 | 44 | 24 | 17 | 14 |
| Условия (8) | p | 0,999 | 0,998 | 0,995 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,9 | 0,85 | 0,8 |
| | N | 1500 | 900 | 300 | 190 | 100 | 44 | 24 | 17 | 14 |

4. Если $0,55 < p < 1; N' \geq 6/pq$, то для аппроксимации формулы (1) используется распределение Вальда (4) с $K_a < 0$

$$P_N(k) \approx \frac{0,5c}{\sqrt{\pi \lambda (\mu - k)}} \times \exp \left[c - \lambda (\mu - k) - \frac{0,25c^2}{\lambda (\mu - k)} \right],$$

$$\lambda = \frac{1,5}{2p-1}; \quad c = \frac{9(N+0,5)pq}{(1-2p)^2};$$

$$\mu = Np + \frac{9(N+0,5)pq}{2p-1}.$$

5. Пусть $0,98 \leq p < 1; N > 10$. В этом случае для аппроксимации формулы Бернулли (1) можно использовать распределение Пуассона с $K_a < 0$

$$P_N(k) \approx \frac{(Nq)^{N-k}}{(N-k)!} \exp[-Nq].$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Вероятность изделия некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу отобранных изделий окажется ровно 55 бракованных изделий?

Решение. В соответствии с условием примера имеем $p=0,005$, $N=10000$, $P(A)=P_N(55)$. Прямые вычисления по формуле Бернулли (1) возможны только с использованием компьютерных технологий. Так, например, в среде Mathcad имеется встроенная функция `dbinom`, с помощью которой можно вычислить вероятность $P(A)=P_N(55)$. При этом получим $P_N(55)=\text{dbinom}(55, N, p)=0,042$. Так как $p=0,005$, $N > 6/pq=1206$, то в качестве приближенных формул используем формулы (3) и (9). Расчет по ним приводит к тому же результату. С помощью формулы (2) получим $P_N(55)=0,044$. Здесь появляется погрешность в третьем знаке после запятой.

Пример 2. Вероятность p появления события A при каждом испытании равна 0,45. Производится 150 независимых испытаний. Определить вероят-

ность $P_N(k)$ того, что событие A наступит ровно 80 раз.

Решение. В соответствии с условием примера имеем $p=0,45$, $N=150$, $P(A)=P_N(80)$. Прямые вычисления по формуле Бернулли (1) в среде Mathcad позволяют найти вероятность $P(A)=P_N(80)$. При этом получим $P_N(80)=8,057 \cdot 10^{-3}$. Расчет по формуле (2) дает $P_N(80)=7,983 \cdot 10^{-3}$, по формуле (9) – $P_N(80)=8,078 \cdot 10^{-3}$ и по формуле (10) – $P_N(80)=8,025 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, формулы (9) и (10) позволяют точнее произвести расчет вероятности $P_N(k)$, чем формула (2).

Выводы

Предложены выражения, аналогичные (2) и (3), для аппроксимации формулы Бернулли (1). Они позволяют более точно определять вероятности $P_N(k)$ появления события A ровно k раз при большом количестве независимых испытаний, если в каждом из них событие A наступает с вероятностью p . Рассмотрены также условия, при которых возможен точный расчет вероятности $P_N(k)$ по формуле Бернулли без особых затруднений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
3. Вероятность и математическая статистика / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
4. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 296 с.
5. Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения. Ч. 1. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 703 с.
6. Истигечева Е.В. Оценивание параметров гиперболического и обратного гауссовского распределений // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 6. – С. 11–13.
7. Бостанджиян В.А. Распределение Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратное нормальное. Оценивание их параметров. – Черноголовка: Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2009. – 240 с.

Поступила 14.05.2012 г.

УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕДАЧА СИГНАЛА ПО СОВОКУПНОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО КАНАЛОВ С ПАМЯТЬЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной передачи стохастических процессов по непрерывно-дискретным каналам с памятью и запаздыванием. Доказываются экстремальные свойства оптимальных кодирований в смысле максимизации количества информации.

Ключевые слова:

Сигнал, стохастические системы, канал передачи, память, запаздывание.

Key words:

Signal, stochastic systems, transmission channel, memory, lag.

1. Постановка задачи

Данная работа является развитием результатов [1, 2].

Сигнал x_t , сообщение на выходе канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ задаются на реализациях процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)dw_t, \quad p_0(t) = \mathbf{N}\{x_t; \mu_0, \gamma_0\}.$$

1 случай:

$$dz_t = h(t, x_t, x_\tau, z)dt + \Phi_2(t)dv_t, \\ \eta(t_m) = g(t_m, x_t, z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

т. е. наблюдаемый непрерывный процесс z_t обладает фиксированной памятью единичной кратности ($N=1, \tau_1=\tau$), а наблюдаемый дискретный канал $\eta(t_m)$ – с запаздыванием при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t .

2 случай:

$$dz_t = h(t, x_t, z)dt + \Phi_2(t)dv_t, \\ \eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_\tau, z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m).$$

т. е. наблюдаемый непрерывный процесс z_t с запаздыванием, а наблюдаемый дискретный канал $\eta(t_m)$ обладает фиксированной памятью единичной кратности ($N=1, \tau_1=\tau$) при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t .

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{N}\{a; b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b ; $\Phi_1^2(t) = Q(t)$, $\Phi_2^2(t) = R(t)$, $\Phi_3^2(t_m) = V(t_m)$.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathbf{K} = \{\mathbf{H}; \mathbf{G}\} = \{h(\cdot), g(\cdot)\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t, x_t, x_\tau, z)\} \leq \tilde{h}(t) \leq \tilde{h}, \\ \mathbf{M}\{g^2(t_m, x_{t_m}, x_\tau, z)\} \leq \tilde{g}(t_m) \leq \tilde{g},$$

найти функционалы $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t) = \inf \Delta(t)$, где

$\Delta(t) = \mathbf{M}\{[x_t - \hat{x}(t, z, \eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat{x}(t, z, \eta)$ процесса x_t , которая соответствует принятому сообщению $\{z_0; \eta_0^m\}$ при заданных $h(\cdot)$, $g(\cdot)$. Так как при заданных $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой фильтрации является апостериорное среднее $\mu(t) = \mathbf{M}\{x_t | z_0; \eta_0^m\}$, то $\Delta^0(t) \geq \mathbf{M}\{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t) \geq \mathbf{M}\{[x_t - \mu(t)]^2 | z_0; \eta_0^m\}$. Таким образом $\Delta^0(t) = \inf \mathbf{M}\{\gamma(t)\}$.

2. Основные результаты

Теорема 1. На классе $\mathbf{K}^{0,1} = \{\mathbf{H}; \mathbf{G}\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_t = \left\{ \begin{aligned} &h(\cdot) : h(t, x_t, x_\tau, z) = \\ &= h(t, z) + H_0(t, z)x_t + H_1(t, z)x_\tau \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

$\mathbf{G}_t^1 = \{g(\cdot) : g(t_m, x_t, z) = g(t_m, z) + G_1(t_m, z)x_\tau\}$:

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$ имеют представления

$$h^0(t, z^0) = -H_0^0(t, z^0)\mu^0(t), \\ H_0^0(t, z^0) = [\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}, \\ H_1^0(t, z^0) = 0, \quad (2)$$

$$g^0(t_m, z^0) = -G_1^0(t_m, z^0)\mu^0(\tau, t_m - 0),$$

$$G_1^0(t_m, z^0) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)]^{1/2};$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0; \eta^0(t_m)\}$ определяется формулами

$$dz_t^0 = [\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}[x_t - \mu^0(t)]dt + \Phi_2(t)dv_t, \\ \eta^0(t_m) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)]^{1/2} \times \\ \times [x_\tau - \mu^0(\tau, t_m - 0)]dt + \Phi_3(t_m)\xi(t_m);$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t) = F(t)\mu^0(t)dt + R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2} dz_t^0, \\ d\Delta^0(t)/dt = [2F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta^0(t) + Q(t)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \mu^0(t_m) &= \mu^0(t_m - 0) + \Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0) \times \\ &\times [\tilde{g}(t_m) \Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)]^{1/2} [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \eta^0(t_m), \\ \Delta^0(t_m) &= \Delta^0(t_m - 0) \frac{V(t_m)}{[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)} \left(1 - \frac{(\Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0))^2}{\Delta^0(t_m - 0) \Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)} \right) \right], \end{aligned}$$

где $Q(t) = \Phi_1^2(t)$, $R(t) = \Phi_2^2(t)$, $V(t_m) = \Phi_3^2(t_m)$;

$$\begin{aligned} 4) \quad \mu^0(\tau, t) &= \mathbf{M}\{x_\tau | (z_0^0, \eta_0^0)^m\}, \\ \Delta_{11}^0(\tau, t) &= \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu^0(\tau, t)]^2\}, \\ \Delta_{01}^0(\tau, t) &= \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu^0(\tau, t)][x_\tau - \mu^0(\tau, t)]\} \end{aligned}$$

на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_t \mu^0(\tau, t) = R^{-1}(t) [\tilde{h}(t) / \Delta^0(t)]^{1/2} \Delta_{01}^0(\tau, t) dz_t^0, \quad (3)$$

$$d\Delta_{11}^0(\tau, t) / dt = -R^{-1}(t) [\tilde{h}(t) / \Delta^0(t)] (\Delta_{01}^0(\tau, t))^2, \quad (4)$$

$$d\Delta_{01}^0(\tau, t) / dt = [F(t) - R^{-1}(t) \tilde{h}(t)] \Delta_{01}^0(\tau, t), \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \mu^0(\tau, t_m) &= \mu^0(\tau, t_m - 0) + [\tilde{g}(t_m) \Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)]^{1/2} \times \\ &\times [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \eta^0(t_m), \\ \Delta_{11}^0(\tau, t_m) &= V(t_m) [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0), \\ \Delta_{01}^0(\tau, t_m) &= V(t_m) [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0). \end{aligned}$$

Доказательство:

При заданных $\{h(\cdot); g(\cdot)\} \in \mathbf{K}_l$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ (см. [3]) $\mu(\tau, t)$ и $\gamma_{11}(\tau, t)$, $\gamma_{01}(\tau, t)$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} d\mu(\tau, t) &= \\ &= R^{-1}(t) [H_0(\tau, t) \gamma_{01}(\tau, t) + H_1(\tau, t) \gamma_{11}(\tau, t)], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\gamma_{11}(\tau, t) / dt &= \\ &= -R^{-1}(t) [H_0(\tau, t) \gamma_{01}(\tau, t) + H_1(\tau, t) \gamma_{11}(\tau, t)]^2, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\gamma_{01}(\tau, t) / dt &= 2F(t) \gamma_{01}(\tau, t) - \\ &- R^{-1}(t) [H_0(t, z) \gamma(t) + H_1(t, z) \gamma_{01}(\tau, t)] \times \\ &\times [H_0(t, z) \gamma_{01}(\tau, t) + H_1(t, z) \gamma_{11}(\tau, t)], \quad (8) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \mu(\tau, t_m) &= \mu(\tau, t_m - 0) + \\ &+ \left[G_0(t_m, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) + \right. \\ &\left. + G_1(t_m, z) \gamma_{11}(\tau, t_m - 0) \right] W^{-1}(t_m) \tilde{\eta}(t_m), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(\tau, t_m) &= \gamma_{11}(\tau, t_m - 0) - \\ &- \left[G_0(t_m, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) + \right. \\ &\left. + G_1(t_m, z) \gamma_{11}(\tau, t_m - 0) \right]^2 W^{-1}(t_m, z), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{01}(\tau, t_m) &= \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) - \\ &= [G_0(t_m, z) \gamma(t_m - 0) + G_1(t_m, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{01}(\tau, t_m) &= \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) - \\ &= [G_0(t_m, z) \gamma(t_m - 0) + G_1(t_m, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0)] \times \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(\tau, t) &= \mathbf{M}\{x_\tau | z_0^t, \eta_0^m\}, \\ \gamma_{01}(\tau, t) &= \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu(t)][x_\tau - \mu(\tau, t)] | z_0^t, \eta_0^m\}, \\ \gamma_{11}(\tau, t) &= \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu(\tau, t)]^2 | z_0^t, \eta_0^m\}, \\ d\tilde{z}_t &= dz_t - [h(t, z) + H_0(t, z) \mu(t) + H_1(t, z) \mu(\tau, t)] dt, \\ \tilde{\eta}(t_m) &= \eta(t_m) - \\ &- [g(t, z) + G_0(t, z) \mu(t_m - 0) + G_1(t, z) \mu(\tau, t_m - 0)], \\ W(t, z) &= V(t_m) + G_0^2(t, z) \gamma(t_m - 0) + \\ &+ G_1^2(t, z) \gamma_{11}(\tau, t_m - 0) + G_1(t, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) + \\ &+ 2G_0(t, z) G_1(t, z) \gamma_{01}(\tau, t_m - 0). \end{aligned}$$

Уравнения (3)–(5) получаются как результат использования (2) в (6)–(8). Остальные утверждения Теоремы очевидным образом следуют из Теорем 1 в [1] и [2].

Теорема 2. На классе $\mathbf{K}_l^{1,0} = \{\mathbf{H}_l; \mathbf{G}_l\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l = \{h(\cdot) : h(t, x_\tau, z) = h(t, z) + H_1(t, z) x_\tau\}, \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_l = \left\{ \begin{aligned} g(\cdot) : g(t_m, x_{t_m}, x_\tau, z) = \\ = g(t_m, z) + G_0(t_m, z) x_{t_m} + G_1(t_m, z) x_\tau \end{aligned} \right\}.$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$ имеют представления

$$\begin{aligned} h^0(t, z^0) &= -H_1^0(t, z^0) \mu^0(\tau, t), \\ H_1^0(t, z^0) &= [\tilde{h}(t) / \Delta_{11}^0(\tau, t)]^{1/2}, \\ g^0(t_m, z^0) &= -G_0^0(t_m, z^0) \mu^0(t_m - 0), \\ G_0^0(t_m, z^0) &= [\tilde{g}(t_m) / \Delta^0(t_m - 0)]^{1/2}, \\ G_1^0(t_m, z^0) &= 0; \quad (13) \end{aligned}$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0; \eta^0(t_m)\}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} dz_t^0 &= [\tilde{h}(t) / \Delta_{11}^0(\tau, t)]^{1/2} [x_\tau - \mu^0(\tau, t)] dt + \Phi_2(t) dy_t, \\ \eta^0(t_m) &= [\tilde{g}(t_m) / \Delta^0(t_m - 0)]^{1/2} \times \\ &\times [x_{t_m} - \mu^0(t_m - 0)] dt + \Phi_3(t_m) \xi(t_m); \end{aligned}$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} d\mu^0(t) &= F(t) \mu^0(t) dt + \\ &+ R^{-1}(t) [\tilde{h}(t) / \Delta_{11}^0(\tau, t)]^{1/2} \Delta_{01}^0(\tau, t) dz_t^0, \\ d\Delta^0(t) / dt &= \left(\begin{aligned} 2F(t) - R^{-1}(t) \tilde{h}(t) \times \\ \times \left[\frac{(\Delta_{01}^0(\tau, t))^2}{\Delta^0(t) \Delta_{11}^0(\tau, t)} \right] \end{aligned} \right) \Delta^0(t) + Q(t) \quad (14) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m) = \mu^0(t_m - 0) + [\tilde{g}(t_m)\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2} \times \\ \times [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \eta^0(t_m),$$

$$\Delta^0(t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \Delta^0(t_m - 0),$$

- где $Q(t) = \Phi_1^2(t)$, $R(t) = \Phi_2^2(t)$, $V(t_m) = \Phi_{13}^2(t_m)$, $\mu^0(t_m - 0) = \lim_{t \uparrow t_m} \mu(t)$, $\Delta^0(t_m - 0) = \lim_{t \uparrow t_m} \Delta(t)$ при $t \uparrow t_m$.
4) $\mu^0(\tau, t)$ и $\Delta_{11}^0(\tau, t)$, $\Delta_{01}^0(\tau, t)$ на интервалах $t_m \leq t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(\tau, t) = R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau, t)]^{1/2} dz_t^0,$$

$$d\Delta_{11}^0(\tau, t)/dt = -R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau, t),$$

$$d\Delta_{01}^0(\tau, t)/dt = [F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta_{01}^0(\tau, t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m) = \mu^0(t_m - 0) + \Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0) \times \\ \times [\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2} [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \eta^0(t_m), \quad (15)$$

$$\Delta_{11}^0(\tau, t_m) = \Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0) \frac{V(t_m)}{[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]} \times \\ \times \left[1 + \frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)} \left(1 - \frac{(\Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0))^2}{\Delta^0(t_m - 0)\Delta_{11}^0(\tau, t_m - 0)} \right) \right], \quad (16)$$

$$\Delta_{01}^0(\tau, t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1} \Delta_{01}^0(\tau, t_m - 0). \quad (17)$$

Доказательство:

Начальные условия (15)–(17) получаются как результат использования (13) в (9)–(11). Остальные утверждения Теоремы очевидным образом следуют из Теорем 1 в [1] и [2].

Теорема 3.

- 1) На классе $\mathbf{K}_i^{1,0} = \{\mathbf{H}_i; \mathbf{G}\}$ вида (1) имеет место свойство

$$I_t^0[x_t; (z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m] = \sup I_t[x_t; z_t^0, \eta_0^m], \quad (18)$$

где \sup берется по всем $\{h(\cdot); g(\cdot)\} \in \mathbf{OK} = \{\mathbf{H}; \mathbf{G}\}$ и

$$I_t^0[x_t; (z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m] = \\ = (1/2) \sum_{t_i \leq t} \ln[1 + (\tilde{g}(t_i)/V(t_i))] +$$

$$I_t^0[x_t; (z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m] = \\ = (1/2) \sum_{t_i \leq t} \ln[1 + (\tilde{g}(t_i)/V(t_i))] + \quad (19)$$

где $D(t) = \mathbf{M}\{[x_t - a(t)]^2\}$, $a(t) = \mathbf{M}\{x_t\}$.

- 2) На классе $\mathbf{K}_i^{1,0} = \{\mathbf{H}_i; \mathbf{G}\}$ вида (12) имеет место свойство (18) и

$$I_t^0[x_t; (z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m] = \frac{1}{2} \sum_{\tau \leq t_i \leq t} \ln[1 + (\tilde{g}(t_i)/V(t_i))] + \\ + \frac{1}{2} \int_{\tau} \left[\frac{\tilde{h}(\sigma) (\Delta_{01}^0(\tau, \sigma))^2}{R(\sigma) \Delta^0(\sigma) \Delta_{11}^0(\tau, \sigma)} - \right. \\ \left. - Q(\sigma) \left(\frac{1}{\Delta^0(\sigma)} - \frac{1}{D(\sigma)} \right) \right] d\sigma. \quad (20)$$

Доказательство:

Для $t_m \leq t < t_{m+1}$ использование (10) из [1] и (48) из [2] в (47) из [2] дает, что

$$dI_t^0[x_t; (z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m]/dt = \\ = (1/2)(R^{-1}(t)\tilde{h}(t) - Q(t)[(\Delta^0(t))^{-1} - D^{-1}(t)]). \quad (21)$$

Тогда (19) следует из (51) из [2], (21). Использование (14) в (50) из [2] дает

$$I_m^0[\cdot] = I_{t_m-0}^0[\cdot] + (1/2) \ln[1 + (\tilde{g}(t_m)/V(t_m))]. \quad (22)$$

Тогда (20) следует из (49) в [2] и (22).

Заключение

Решена задача оптимальной непрерывно-дискретной передачи диффузионного гауссовского марковского сигнала по непрерывному каналу с памятью и дискретному каналу с запаздыванием, а также по непрерывному каналу с запаздыванием и дискретному каналу с памятью при наличии бесшумной обратной связи. Полученные результаты могут быть использованы для анализа пропускной способности каналов в задаче оптимальной передачи сигналов.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.В37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с памятью при наличии бесшумной обратной связи // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 6–9.
2. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с запаздыванием // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 10–13.

3. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.

Поступила 25.01.2013 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛАЗМЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ У ЭМИТТЕРА ТЕРМОЭМИССИОННОГО ДИОДА

В.П. Зимин

Томский политехнический университет

E-mail: zimmin@tpu.ru

Анализируется модель монотонных плазменных граничных условий у эмиттера термоэмиссионного диода на плоскостях плотность плазмы–ионный ток, плотность плазмы–плотность энергии электронов и других. Исследованы особенности изменения кривых граничных условий, и классифицировано их характерное поведение. Предложен способ оценки характерного вида граничных условий и их изменения при вариации параметров диода и плазмы.

Ключевые слова:

Граничные условия, краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный диод.

Key words:

Boundary conditions, boundary value problem, phase plane method, low-temperature plasma, thermionic diode.

Введение

Приэлектродные области в цезиевом разряде термоэмиссионного диода существенным образом влияют на его вольтамперные характеристики и параметры плазмы в межэлектродном зазоре (МЭЗ). Гидродинамические модели плазмы диода, основанные на моментах функций распределений её частиц – это краевые задачи, граничные условия которых в приэлектродных слоях записываются в виде балансовых соотношений для потоков заряженных частиц и энергии [1, 2]. Необходимость исследования поведения экспериментальных параметров плазмы у электродов, трудности сравнения большого количества модельных приближений граничных условий [1–7], создание устойчивых алгоритмов поиска решений нелинейных краевых задач, изучение нестационарных вольтамперных характеристик диода [8] требуют разработки новых методов анализа моделей граничных условий. В [9–11] предложено анализировать области возможных решений краевых задач, включая сложные граничные условия, на плоскостях плотность плазмы–ионный ток, плотность плазмы–плотность энергии электронного газа, температура электронов–плотность энергии электронного газа и др.

В настоящей работе проведены аналитические и численные исследования модели монотонных граничных условий у эмиттера. Выявлены её асимптотическое поведение и характерные изменения при вариации параметров термоэмиссионного диода и плазмы.

Модель монотонных плазменных граничных условий у эмиттера и её анализ

Модель монотонных граничных условий (виртуальный электрод отсутствует) в слое у эмиттера для плотности ионного J_{i0} , электронного J_{e0} тока и плотности энергии электронов q_{e0} для ускоряющего ($V_E \leq 0$) приэлектродного потенциального барьера записывается [4, 9]:

$$J_{e0} = J_{Ee}^{(E)} - [J_{re0} - A_{Ee}J_{e0}] \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right), \quad (1)$$

$$J_{i0} = J_{Ei}^{(E)} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_0}\right) - [J_{ri0} - A_{Ei}J_{i0}], \quad (2)$$

$$\left(1 - A_{Ee} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right)\right) q_{e0} = J_{Ee}^{(E)} \left[\frac{2kT_E}{e} - V_E\right] - J_{re0} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right) \left[\frac{2kT_{e0}}{e} - V_E\right], \quad (3)$$

для тормозящего ($V_E \geq 0$) приэлектродного потенциального барьера:

$$J_{e0} = J_{Ee}^{(0)} \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_{eE}}\right) - [J_{re0} - A_{Ee}J_{e0}], \quad (4)$$

$$J_{i0} = J_{Ei}^{(0)} - [J_{ri0} - A_{Ei}J_{i0}] \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_0}\right), \quad (5)$$

$$(1 - A_{Ee})q_{e0} = J_{Ee}^{(0)} \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_{eE}}\right) \frac{2kT_E}{e} - J_{re0} \frac{2kT_{e0}}{e}, \quad (6)$$

$$J = J_{e0} + J_{i0}, \quad (7)$$

где $J_{re0} = \gamma_{Ee} en_0 \bar{v}_e(T_{e0})$, $J_{ri0} = \gamma_{Ei} en_0 \bar{v}_i(T_0)$ – плотности хаотического тока электронов и ионов из плазмы на эмиттер; e – заряд электрона; γ_{Ee} , A_{Ee} , γ_{Ei} , A_{Ei} – коэффициенты пропорциональности для хаотического тока и анизотропии потоков заряженных частиц и энергии; n_0 – плотность плазмы у эмиттера; $\bar{v}_e(T_{e0}) = \sqrt{(8kT_{e0})/(\pi m_e)}$, $\bar{v}_i(T_0) = \sqrt{(8kT_0)/(\pi m_i)}$ – тепловые скорости заряженных частиц; k – постоянная Больцмана; m_e , m_i – массы заряженных частиц; J – плотность тока диода; $J_{Ee}^{(E)}$, $J_{Ei}^{(E)}$ – эмиссионные электронный и ионный токи с учетом нормального эффекта Шоттки [4]; T_{e0} , T_0 – температуры электронов плазмы и ионов (атомов) цезия; T_{eE} – температура электронов эмиттера; T_E – температура эмиттера. Хорошим приближением считается $T_0 = T_{eE} = T_E$ [1, 2]. Нижний индекс ноль означает, что значения параметров плазмы берутся у эмиттера для пространственной переменной $x=0$. Эмиссионные

электронный и ионный токи эмиттера для напряженности электрического поля у эмиттера, тормозящего выходящие электроны ($E=0$), определяют как

$$J_{Ee}^{(0)} = AT_E^2 \exp(-F_E / kT_E),$$

$$J_{Ei}^{(0)} = \frac{eg_i n_{a0} \bar{v}_i(T_0)}{4g_a} [\exp(-(V_i - F_E) / kT_E)],$$

$$\beta_E = \frac{J_{Ei}^{(0)}}{J_{Ee}^{(0)}} \sqrt{\frac{\bar{v}_e(T_E)}{\bar{v}_i(T_E)}},$$

где g_a, g_i – статистические веса атома и иона цезия; F_E – работа выхода электрода в парах цезия; $V_i=3,89$ эВ – энергия ионизации цезия; $A=120,2$ А/(К²см²) – теоретическая эмиссионная постоянная; β_E – параметр компенсации заряда у эмиттера.

Плотность атомов n_{a0} цезия для слабоионизованной плазмы определяется из уравнения состояния у эмиттера

$$kT_0 n_{a0} = p_{Cs},$$

где p_{Cs} – давление насыщенных паров в резервуаре с цезием.

Из равенства плотности энергии электронов в плазме у эмиттера

$$q_{e0} = -\lambda_{e0} \left. \frac{dT_e}{dx} \right|_{x=0} + \beta_{e0} J_{e0} \frac{kT_{e0}}{e}$$

и плотности энергии электронов через слой у эмиттера (3) или (6) получим выражение для пространственной производной температуры электронов плазмы у эмиттера

$$\left. \frac{dT_{e0}}{dx} \equiv \frac{dT_e}{dx} \right|_{x=0} = \frac{-q_{e0} + \beta_{e0} J_{e0} kT_{e0}/e}{\lambda_{e0}}, \quad (8)$$

где λ_{e0} – коэффициент теплопроводности электронного газа и множитель β_{e0} , определенные в [2].

Для аналитических исследований модели (1)–(8) выполним ряд преобразований и получим некоторые соотношения для параметров диода и параметров плазмы у эмиттера. Каждая пара граничных условий (1)–(2) и (4)–(5) с учетом (7) преобразуется следующим образом. Выражается из уравнения баланса для электронного тока, например из (1), экспонента и подставляется в уравнение (2) баланса для ионного тока, и учитывается выражение для J . Окончательно получаем уравнения

$$f_1(n_0, J_{i0}) \equiv (1 - A_{Ei})J_{i0} - J_{Ei}^{(E)} \left[\frac{J_{Ee}^{(E)} - (J + J_{i0})}{J_{re0} - A_{Ee}(J + J_{i0})} \right]^{T_{e0}/T_0} + J_{ri0} = 0, \quad (9)$$

$$f_2(n_0, J_{i0}) \equiv J_{i0} - J_{Ei}^{(0)} + [J_{ri0} - A_{Ei}J_{i0}] \times \left[\frac{J_{re0} + (1 - A_{Ee})(J + J_{i0})}{J_{Ee}^{(0)}} \right]^{T_{eE}/T_0} = 0. \quad (10)$$

При фиксированных параметрах диода T_E, F_E, p_{Cs}, J и фиксированных параметрах плазмы T_0, T_{eE}, T_0 получили функции (9) и (10), которые в неяв-

ном виде задают связь между плотностью плазмы и ионным током и позволяют изучить поведение этих функций и их представление на плоскости (n, J) .

Уравнения (9) и (10) имеют точку сшивки ($V_E=0$) с координатами

$$n_0^0 = \frac{(1 - A_{Ei})J_{Ee}^{(0)} - (1 - A_{Ee})J_{Ei}^{(0)} - (1 - A_{Ei})(1 - A_{Ee})J}{(1 - A_{Ei})\gamma_{Ee} e \bar{v}_e(T_{e0}) - (1 - A_{Ee})\gamma_{Ei} e \bar{v}_i(T_0)}, \quad (11)$$

$$J_{i0}^0 = \frac{J_{Ei}^{(0)} - \gamma_{Ei} e n_0^0 \bar{v}_i(T_0)}{1 - A_{Ei}}. \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (6) и (8), используя (4) при $V_E=0$, получим выражения для ординат точек сшивки для кривых на плоскостях (T_e, q_e) и $(T_e, dT_e/dx)$

$$q_{e0}^0 = \frac{J_{re0}^0 (kT_E/e - kT_{e0}/e) + (1 - A_{Ee})(J + J_{i0}^0) kT_E/e}{1 - A_{Ee}}, \quad (13)$$

$$\left. \frac{dT_{e0}}{dx} \right|_{x=0} = \frac{-q_{e0}^0 + \beta_{e0}^0 (J + J_{i0}^0) kT_{e0}/e}{\lambda_{e0}^0}. \quad (14)$$

Каждая из функций $f = \{f_1=0, f_2=0\}$ имеет ограниченную область определения: $f_1(n_0, J_{i0})=0 - \{n \geq n_0^0, J_{i0} \leq J_{i0}^0\}$; $f_2(n_0, J_{i0})=0 - \{n \leq n_0^0, J_{i0} \geq J_{i0}^0\}$. Кроме этого, на область определения функций накладывается физическое ограничение $n_0 > 0$.

Анализ уравнений (9) и (10) позволяет выявить особенности асимптотического поведения кривых граничных уравнений для различной полярности V_E . При больших значениях $V_E < 0$ ионный ток J_{i0} , согласно (9), стремится к асимптоте

$$J_{i0\text{ass1}} = -\frac{J_{ri0}}{(1 - A_{Ei})}, \quad (15)$$

вследствие этого имеется ограничение на величину V_E .

Подставляя выражение (15) в выражение для ускоряющего потенциального барьера, полученного из (1)

$$V_E = \frac{kT_{e0}}{e} \ln \left(\frac{J_{Ee}^{(0E)} - (J + J_{i0})}{J_{re0} - A_{Ee}(J + J_{i0})} \right)$$

и выполняя переход $n_0 \rightarrow \infty$, получим предельное значение

$$V_{E\text{lim}} = -\frac{kT_{e0}}{e} \ln \left(\frac{(1 - A_{Ei})\gamma_{Ee} \bar{v}_e(T_{e0})}{\gamma_{Ei} \bar{v}_i(T_0)} + A_{Ee} \right). \quad (16)$$

При больших значениях $V_E > 0$ плотность ионного тока J_{i0} , согласно (10),

$$J_{i0\text{ass2}} = J_{Ei}^{(0)}. \quad (17)$$

Так как $J_i \sim -dn/dx$, то асимптотическая зависимость (15) представляет собой граничное условие III рода, (17) – граничное условие II рода, а в промежуточных точках кривой $f = \{f_1=0, f_2=0\}$ – суперпозицию всех трех родов.

Для получения точек кривой $f=\{f_1=0, f_2=0\}$ и затем вычисления выражений (3), (6), (8) необходимо выполнять численные расчеты. Задаются T_{e0} , T_0 и V_E , с учетом (16), при фиксированных параметрах диода T_E , F_E , ρ_{cs} , J , тогда любая точка кривой $f=\{f_1=0, f_2=0\}$ из области её определения вычисляется путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно n_0 и J_0

$$\begin{cases} a_{11}^{Ej} n_0 + a_{12}^{Ej} J_{i0} = b_1^{Ej} \\ a_{21}^{Ej} n_0 + a_{22}^{Ej} J_{i0} = b_2^{Ej} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

где для $j=1$, $V_E \leq 0$

$$a_{11}^{E1} = -\gamma_{Ee} e \bar{v}_e(T_{e0}) \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right),$$

$$a_{12}^{E1} = A_{Ee} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right) - 1,$$

$$b_1^{E1} = J - J_{Ee}^{(E)} - A_{Ee} J \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right),$$

$$a_{21}^{E1} = -\gamma_{Ei} e \bar{v}_i(T_0), \quad a_{22}^{E1} = A_{Ei} - 1,$$

$$b_2^{E1} = -J_{Ei}^{(E)} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_0}\right),$$

для $j=2$, $V_E \geq 0$

$$a_{11}^{E2} = -\gamma_{Ee} e \bar{v}_e(T_{e0}), \quad a_{12}^{E2} = A_{Ee} - 1,$$

$$b_1^{E2} = J - J_{Ee}^{(0)} \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_{eE}}\right) - A_{Ee} J,$$

$$a_{21}^{E2} = -\gamma_{Ei} e \bar{v}_i(T_0) \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_0}\right),$$

$$a_{22}^{E2} = A_{Ei} \exp\left(-\frac{eV_E}{kT_0}\right) - 1, \quad b_2^{E2} = -J_{Ei}^{(0)}.$$

Контроль решения СЛАУ осуществлялся по невязке функций $f=\{f_1=0, f_2=0\}$. Для учёта эффекта Шоттки организовывался итерационный цикл, окончание которого происходило при достижении заданной относительной погрешности $|\Delta J_{Ee}^{(E)}|/J_{Ee}^{(E)}$.

Результаты численных исследований и их обсуждение

На рис. 1 представлены характерные кривые граничных условий $f=\{f_1=0, f_2=0\}$ у эмиттера для различных значений работ выхода (различных β_E). Сплошными кружками на кривых обозначены точки сшивки с координатами (11), (12). При недокомпенсации $\beta_E < 1$ (рис. 1, а) кривая $f_1=0$ практически совпадает с асимптотой и также виден выход $f_2=0$ на асимптоту. При $\beta_E \ll 1$ вся кривая $f=0$ в области $n_0 > 0$ совпадает с асимптотой (15). С увеличением $\beta_E > 1$ (рис. 1, б) кривая $f=0$ становится существенно нелинейной и имеет немонотонный вид. Ордината точки сшивки меняет знак $J_0^0 > 0$, а при $\beta_E \gg 1$ меняет знак и её абсцисса $n_0^0 < 0$: в физически реализуемой области становится определенной

только $f_1=0$. Переход от характерного вида кривых $f=\{f_1=0, f_2=0\}$ рис. 1, а, к виду кривых рис. 1, б, происходит при сочетании параметров диода и плазмы, для которых $J_0^0 \approx J_{Ei}^{(0)}$.

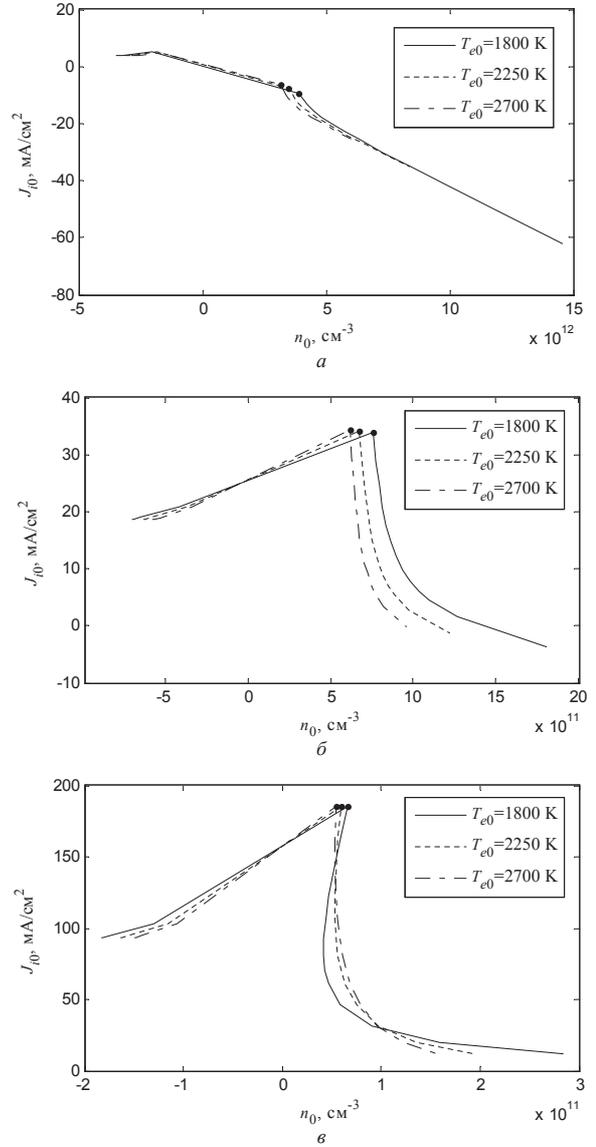


Рис. 1. Зависимости плотности ионного тока от плотности плазмы в оболочке у эмиттера для параметров диода: $T_E=1800$ K, $\rho_{cs}=1$ мм рт. ст., $J=0,95J_{Ee}^{(0)}$ и плазмы $V_E \in [-0,26; +1,0]$; F_E (эВ), β_E : а) 2,75, 0,23; б) 3,0, 5,87; в) 3,25, 147,42

Такое поведение кривых (рис. 1, а, б) характерно практически для любых значений параметров диода и плазмы. Но для некоторых параметров кривая $f_1=0$ становится неоднозначной функцией относительно n_0 . Из рис. 1, в, видно, что для n_0 существует область, в которой одной и той же плотности плазмы соответствуют разные значения J_0 и V_E . Такой вид кривой для эмиттерных граничных условий появляется при $A_{Ee} \neq 0$ и $J \approx J_{Ei}^{(0)}$. Анизотропия ионного тока увеличивает область неоднозначности кривой граничного уравнения. Если $A_{Ee}=0$, то кривая приобретает однозначный вид, подоб-

ный кривым рис. 1, б, для всех значений J . Анизотропность в граничных условиях ($A_{Ee} \neq 0, A_{Ei} \neq 0$) возникает при учёте отличия функций распределения заряженных частиц от несдвинутых максвелловых функций, т. е. при уточнении односторонних потоков частиц и энергии из плазмы на эмиттер [1]. Анализ уравнения (1) показывает, что неоднозначность кривой $f_1=0$ является следствием сочетания параметров плазмы, при котором члены J_{e0} и $A_{Ee}J_{e0}$ в предэкспоненциальном множителе становятся сравнимыми по величине.

Построенные зависимости $q_{e0}=q_{e0}(n_0)$ и $dT_{e0}/dx=dT_{e0}/dx(n_0)$ с помощью (3), (6)–(8) для кривых граничных условий рис. 1, в, также имеют неоднозначный вид (рис. 2). Аналогичные зависимости, построенные для зависимостей рис. 1, а, б, повторяют закономерности поведения $J_0=J_0(n_0)$, описанные выше. Сечение кривых, подобных кривым рис. 2, при фиксированных значениях n_0 позволяет построить зависимости $q_{e0}=q_{e0}(T_{e0})$ и $dT_{e0}/dx=dT_{e0}/dx(T_{e0})$.

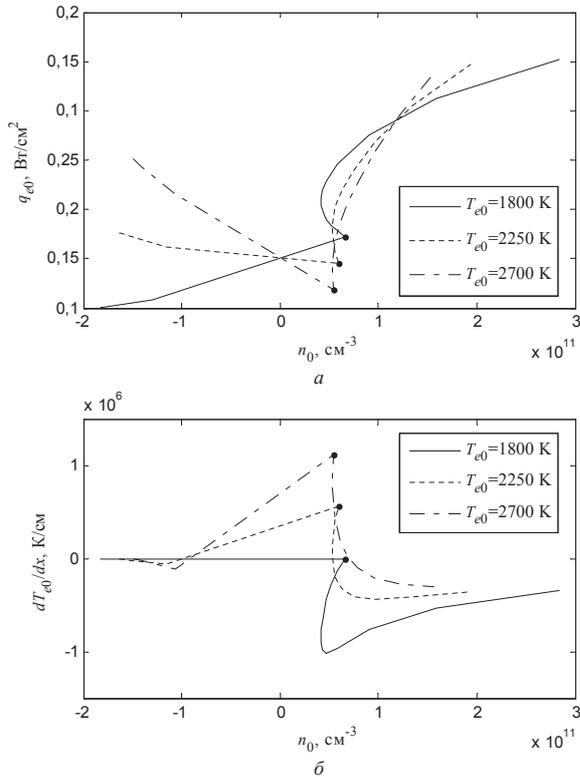


Рис. 2. Зависимости плотности потока энергии (а) и производной температуры электронов от плотности плазмы (б) в оболочке у эмиттера для параметров диода: $T_E=1800$ К, $\rho_{cs}=1$ мм рт. ст., $J=0,95J_{Ee}^{(0)}$, $F_E=3,25$ эВ, $\beta_E=147,42$

В связи с ограничением $V_E > V_{Elim}$ имеется и ограничение области определения кривой $f_1=0$: $n_0 < n_{0max}$. При задании $V_E \leq V_{Elim}$ решения получаются нефизическими — $n_0 < 0$. В области $[n_0^0, n_{0max}]$ функция $q_{e0}=q_{e0}(n_0)$ вогнутая; имеет максимальное (положительное) значение, положение которого смещено к n_0^0 ; при $n_0 \rightarrow n_{0max}$ ($V_E \rightarrow V_{Elim}$) $q_{e0}=q_{e0}(n_0)$ убывает и меняет знак с положительного на отрицательный.

При фиксированном значении T_{e0} существует область, в которой двум разным состояниям параметров плазмы у эмиттера $\{n_{01}, J_{e01}, V_{E1}\}$ и $\{n_{02}, J_{e02}, V_{E2}\}$ соответствует одно значение плотности энергии электронов.

Напротив, функция $dT_{e0}/dx=dT_{e0}/dx(n_0)$ в области $[n_0^0, n_{0max}]$ вогнутая; имеет минимальное (отрицательное) значение, положение которого также смещено к n_0^0 ; при $n_0 \rightarrow n_{0max}$ ($V_E \rightarrow V_{Elim}$) функция возрастает и меняет знак с отрицательного на положительный.

Важную роль в понимании физических процессов в термоэмиссионном диоде играет состояние термодинамического равновесия плазмы [1, 2]. Исследования показали, что модель граничных условий у эмиттера (1)–(8) с хорошей степенью точности описывает условие термодинамического равновесия. Для $T_{e0}=T_0=T_{eE}=T_E, J=J_0=J_{e0}=0, A_{Ee}=A_{Ei}=0$ расчетное значение равновесной плотности плазмы

$$n_{trd} = \sqrt{\frac{J_{Ee}^{(0)} J_{Ee}^{(0)}}{\gamma_{Ee} \gamma_{Ei} e^2 \bar{v}_e(T_E) \bar{v}_i(T_E)}}, \quad \gamma_{Ee} = \gamma_{Ei} = 1/4$$

совпадает с плотностью Саха [2].

В изучаемой модели (1)–(8) имеется ограничение плотности тока диода $J < J_{Ee}^{(0)}$. Нарушение ограничения приводит к нефизическим решениям СЛАУ (18). При учете нормального эффекта Шоттки ограничение записывается $J < J_{Ee}^{(E)}$. Указанный эффект наиболее сильно выражен для кривых, изображенных на рис. 1, а: $V_E = -0,26$ В и $n_0 \sim 10^{13}$ см⁻³, отношение $J_{Ee}^{(E)}/J_{Ee}^{(0)} \sim 1,04$, изменение работы выхода эмиттера $\Delta F_E \sim -0,005$ эВ и напряженность электрического поля у эмиттера $E \sim 230$ В/см. При увеличении плотности плазмы роль данного эффекта увеличивается. Так, например, для $V_E = -0,8$ В и $n_0 = 7 \cdot 10^{14}$ см⁻³: $J_{Ee}^{(E)}/J_{Ee}^{(0)} = 1,2, \Delta F_E = -0,03$ эВ, $E = 7000$ В/см.

Анализ координат точек сшивки (11), (12), а также (13), (14) и их изменений при вариации параметров диода и плазмы является удобным способом оценки вида и изменения положения кривых граничных условий на фазовых плоскостях, подобных (n, J) .

При $J_0^0 > J_{Ei}^{(0)}$ вид кривой граничного уравнения $f_1=0$ из монотонного превращается в немонотонный. При значениях параметра компенсации $\beta_E \sim 10$ для достижения кривой граничного условия асимптоты достаточно величин $V_E \sim -2kT_E/e$. При этом участок кривой $f_1=0$ от точки сшивки до асимптоты может быть грубо аппроксимирован вертикальной или наклонной прямой.

Из анализа рис. 1, а, б, видно, что увеличение T_{e0} сдвигает кривые граничных условий влево, т. е. уменьшает, согласно (11), n_0^0 , т. к. абсцисса точки сшивки обратно пропорциональна $\bar{v}_e(T_{e0})$ ($\sim 1/\sqrt{T_{e0}}$). Одновременно с этим ордината точки сшивки J_0^0 , согласно (12), увеличивается, т. е. происходит движение вверх вдоль оси oJ_0 . Аналогичным образом проводится оценка изменения положения кривых граничных условий по координатам точек сшивки (11)–(14) при вариации других параметров диода и плазмы.

Выводы

1. Аналитические и численные исследования модели монотонных плазменных граничных условий на плоскости плотность плазмы—ионный ток позволили выявить три характерных вида кривых: монотонные, немонотонные и неоднозначные. Последний вид кривой обусловлен в основном учетом анизотропии плотности электронного тока. Кривые граничных условий у эмиттера представляют суперпозицию всех трех родов краевых условий.
2. Предложена методика анализа типа кривых граничных условий у эмиттера и их изменение при

вариации параметров диода и плазмы, использующая координаты точек сшивки этих условий.

3. Показано, что значения ускоряющего приэлектродного потенциального барьера ограничены снизу температурой электронов плазмы, вследствие этого имеются ограничения и для других параметров плазмы.
4. Зависимости плотности энергии электронов и пространственной производной электронной температуры у эмиттера от плотности плазмы имеют экстремальный характер для ускоряющего приэлектродного потенциального барьера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стаханов И.П., Степанов А.С., Пашенко В.П. и др. Плазменное термоэмиссионное преобразование энергии. — М.: Атомиздат, 1968. — 392 с.
2. Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марцинковский А.М. и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса. — М.: Наука, 1973. — 480 с.
3. Hansen L.K. Ion current and Shottky effects in thermionic diodes // J. Appl. Phys. — 1967. — V. 38. — № 5. — P. 4345–4350.
4. McCandless R.J., Wilkins D.R., Derby S.L. Theory of thermionic converter volume phenomena // IEEE Conf. Record of 1969 Thermion. Convers. Spes. Conf. — Carmel, California (USA), 1969. — P. 163–169.
5. Бакшт Ф.Г., Юрьев В.Г. Приэлектродные явления в низкотемпературной плазме (Обзор) // Журнал технической физики. — 1979. — Т. 49. — Вып. 5. — С. 905–944.
6. Сидельников В.Н. О роли эмиссии электронов с коллектора ТЭП // Журнал технической физики. — 1983. — Вып. 2. — С. 385–387.
7. Стаханов И.П., Черковец В.Е. Физика термоэмиссионного преобразователя. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 208 с.
8. Дейнеженко А.Л., Зимин В.П. Численное моделирование нестационарных вольтамперных характеристик плазменного диода в дуговом режиме // Изв. СО АН СССР. Сер. Технические наук. — 1987. — Вып. 6. — С. 84–87.
9. Зимин В.П. Алгоритм расчета вольтамперных характеристик термоэмиссионного преобразователя с постоянной температурой электронов / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». — Томск, 1984. — № 7. — 36 с. — Деп. в ВИНТИ 21.03.1984, № 1571–84.
10. Зимин В.П. Изображение и анализ граничных условий для уравнения теплопроводности на фазовых плоскостях // Известия Томского политехнического университета. — 2011. — Т. 318. — № 4. — С. 29–33.
11. Зимин В.П. Развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач // Известия Томского политехнического университета. — 2012. — Т. 321. — № 2. — С. 17–21.

Поступила 19.02.2013 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОГО МАР-ПОТОКА

А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

Томский государственный университет
E-mail: alexander-moiseev@mail.ru; anazarov@fpmk.tsu.ru

Представлено исследование МАР-потока, имеющего высокие условные интенсивности наступления событий. Показано, что в асимптотике (в условии неограниченного роста интенсивности) число событий, наступивших в таком потоке за фиксированный интервал времени, является нормальным. Получены характеристики этого распределения.

Ключевые слова:

Марковский поток событий, асимптотический анализ.

Key words:

Markovian arrival process, asymptotical analysis.

Применение специальных видов потоков событий в моделях массового обслуживания [1] позволяет сделать эти модели более адекватными реальным процессам в телекоммуникационных системах. В настоящей работе представлено исследование так называемого МАР-потока (Markovian Arrival Process) [2] в условии неограниченного роста его интенсивности. Результаты аналогичных исследований для МАР и прочих видов специальных потоков в других предельных условиях представлены в [3–5].

Итак, рассмотрим МАР-поток [6]. Пусть управляющая этим потоком цепь Маркова имеет K состояний, переходы между состояниями определяются матрицей инфинитезимальных характеристик $NQ = \{Nq_{vk}\}_{v,k=1,\overline{K}}$, где скаляр N имеет смысл большой величины (в теоретическом исследовании предполагается, что $N \rightarrow \infty$). При этом матрица Q обладает свойством

$$q_{vv} = -\sum_{k \neq v} q_{vk},$$

или в матричном виде:

$$QE = 0, \tag{1}$$

где E – единичный вектор-столбец, а 0 – нулевой вектор-столбец. Вероятность наступления события в потоке при переходе управляющей цепи Маркова из состояния v в состояние k равна d_{vk} ($k \neq v$). Величины d_{vv} будем полагать равными нулю. Эти вероятности запишем в виде матрицы $D = \{d_{vk}\}_{v,k=1,\overline{K}}$.

Пусть условная интенсивность рассматриваемого потока событий в каждом из состояний управляющей цепи равна $N\lambda_k$, $k=1,\overline{K}$. Введем обозначение для матрицы условных интенсивностей:

$$N\Lambda = \text{diag}\{N\lambda_1, \dots, N\lambda_K\}.$$

В связи с тем, что в эту матрицу, а также матрицу инфинитезимальных характеристик NQ , входит большой по величине параметр N , данный вид потока будем называть высокоинтенсивным марковским потоком событий или НИМАР-потоком (от High Intensive Markovian Arrival Process).

Обозначим через $m(t)$ число событий, наступивших в рассматриваемом потоке за интервал времени длительности t , а через $k(t)$ – состояние управ-

ляющей цепи Маркова в момент времени t . Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{m(t), k(t)\}$. Введем обозначение:

$$P(m, k, t) = P\{m(t) = m, k(t) = k\}.$$

Применяя формулу полной вероятности, для этого распределения можно записать следующее:

$$\begin{aligned} P(m, k, t + \Delta t) &= \\ &= P(m, k, t) \cdot (1 - N\lambda_k \Delta t) \cdot (1 + Nq_{kk} \Delta t) + \\ &+ P(m-1, k, t) N\lambda_k \Delta t + \sum_{v \neq k} P(m, v, t) Nq_{vk} (1 - d_{vk}) \Delta t + \\ &+ \sum_{v \neq k} P(m-1, v, t) Nq_{vk} d_{vk} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P(m, k, t + \Delta t) - P(m, k, t) &= \\ &= [-P(m, k, t) + P(m-1, k, t)] N\lambda_k \Delta t + \\ &+ \sum_{v=1}^K P(m, v, t) Nq_{vk} (1 - d_{vk}) \Delta t + \\ &+ \sum_{v=1}^K P(m-1, v, t) Nq_{vk} d_{vk} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial P(m, k, t)}{\partial t} &= [-P(m, k, t) + P(m-1, k, t)] N\lambda_k + \\ &+ \sum_{v=1}^K [P(m, v, t)(1 - d_{vk}) + P(m-1, v, t)d_{vk}] Nq_{vk}. \end{aligned}$$

Домножим это уравнение справа и слева на величину e^{jum} , где $j = \sqrt{-1}$, а u – некоторая переменная, и просуммируем по $m = 0, \infty$. Тогда, введя обозначение

$$H(u, k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(m, k, t),$$

для этой функции получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial H(u, k, t)}{\partial t} &= H(u, k, t) \lambda_k (e^{ju} - 1) + \\ &+ \sum_{v=1}^K H(u, k, t) [d_{vk} (e^{-ju} - 1) + 1] q_{vk}. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим вектор-строку

$$\mathbf{H}(u, t) = \{H(u, 1, t), \dots, H(u, K, t)\},$$

тогда в матричном виде (2) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u, t) \mathbf{A} (e^{ju} - 1) + \\ &+ \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{A} (e^{-ju} - 1) + \mathbf{Q}] = \\ &= \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{Q} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}) (e^{ju} - 1)], \end{aligned} \quad (3)$$

где матрица $\mathbf{A} = \{q_{vk} d_{vk}\}_{v,k=1,\bar{K}}$.

Обозначим $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}$, тогда (3) переписывается в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1)].$$

В этом уравнении выполним замену

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}_2(u, t) e^{juN\lambda t},$$

где

$$\lambda = \mathbf{RBE}, \quad (4)$$

а \mathbf{R} – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний управляющей потоком цепи Маркова, для него справедливо:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{RE} = 1. \end{cases} \quad (5)$$

В результате получаем уравнение относительно функции $\mathbf{H}_2(u, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} e^{juN\lambda t} + ju\lambda \mathbf{H}_2(u, t) e^{juN\lambda t} &= \\ = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1)] e^{juN\lambda t} \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}_2(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_2(u, t) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{ju} - 1) - ju\lambda \mathbf{I}], \quad (6)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица порядка K .

Это уравнение решим при $N \rightarrow \infty$ методом асимптотического анализа [6], обозначив $\varepsilon^2 = \frac{1}{N}$ и выполнив замены $u = \varepsilon w$ и $\mathbf{H}_2(u, t) = \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)$. Уравнение (6) переписывается в виде:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{j\varepsilon w} - 1) - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}]. \quad (7)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $\mathbf{F}(w, t)$ решения $\mathbf{F}(w, t, \varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид*

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{E}, \quad (8)$$

а вектор-строка \mathbf{f} определяется уравнением

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Положим в (7) $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\mathbf{F}(w, t) \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

А так как имеет место свойство (5) вектора \mathbf{R} , векторную функцию \mathbf{F} можно представить в виде

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \Phi(w, t), \quad (10)$$

где $\Phi(w, t)$ – некоторая скалярная функция.

Этап 2. Решение уравнения (7) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}(w, t, \varepsilon) = \Phi(w, t) [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad (11)$$

где \mathbf{f} – некоторый вектор (вектор-строка), $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ – вектор-строка из бесконечно малых величин порядка ε^2 . Подставляя это выражение в (7) и используя разложение $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$, получим:

$$\varepsilon^2 [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} =$$

$$= \Phi(w, t) [\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}] [\mathbf{Q} + j\varepsilon w \mathbf{B} - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}] + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Отсюда, приведя подобные, сократив обе части на $j\varepsilon w$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем уравнение относительно неизвестного вектора \mathbf{f} :

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{fQ} = \mathbf{0}.$$

Этап 3. Просуммируем компоненты левой и правой частей уравнения (7). Для этого умножим справа обе части этого уравнения на единичный вектор \mathbf{E} длины K :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) [\mathbf{Q} + \mathbf{B} (e^{j\varepsilon w} - 1) - j\varepsilon w \lambda \mathbf{I}] \mathbf{E}.$$

Используя в этом уравнении разложение

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$$

и учитывая (1), получаем:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}(w, t, \varepsilon)}{\partial t} \mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}(w, t, \varepsilon) \left[j\varepsilon w (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{B} \right] \mathbf{E} + O(\varepsilon^3).$$

Подставим сюда (11):

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} \mathbf{RE} = \Phi(w, t) \times$$

$$\times \left[j\varepsilon w \mathbf{R}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{RB} + \right. \\ \left. + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) \right] \mathbf{E} + O(\varepsilon^3).$$

С учетом (4) и (5), приводя подобные и сокращая на ε^2 , получаем:

$$\frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, t) [\lambda + 2\mathbf{f}(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{E}] + O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi(w, t)$:

$$\frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) \Phi(w, t),$$

где величина κ определяется выражением (8). Решение этого уравнения с учетом начального условия $\Phi(w, 0) = 1$, которое получается из условия

$$P(m, k, 0) = \begin{cases} R_k & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m > 0, \end{cases}$$

($k=\overline{1, K}$) имеет вид

$$\Phi(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\}.$$

Отсюда в силу (10) имеем:

$$\mathbf{F}(w, t) = \mathbf{R} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda + \kappa) t \right\},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Решением неоднородной системы уравнений (9), вообще говоря, является семейство векторов вида

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad (12)$$

где \mathbf{f} – частное решение неоднородной системы, а $\mathbf{C}\mathbf{R}$ – общее решение однородной системы $\mathbf{f}\mathbf{Q}=\mathbf{0}$ в силу первого равенства (5) (здесь \mathbf{C} – произвольная константа). Однако нетрудно убедиться, что при подстановке любого из решений (12) выражение (8) для величины κ дает одно и то же значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
3. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа N-го порядка // Вестник ТГУ. Серия «Информатика. Кибернетика. Математика». – 2006. – № 293. – С. 110–115.
4. Назаров А.А., Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ системы ММР/М/1/ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 187–190.

Вернемся к функции $\mathbf{H}(u, t)$. Получаем, что при достаточно больших значениях N

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \mathbf{R} \exp \left\{ juN\lambda t + \frac{(ju)^2}{2} N(\lambda + \kappa)t \right\}.$$

Таким образом, характеристическая функция $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t)\mathbf{E}$

процесса $m(t)$ – числа событий, наступивших в высокоинтенсивном МАР-потоке, в указанных условиях имеет вид характеристической функции гауссовского распределения, то есть распределение вероятностей числа событий в НИМАР-потоке, наступивших за время t , можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $N\lambda t$ и дисперсией $N(\lambda + \kappa)t$. Это подтверждается также исследованиями, выполненными средствами имитационного моделирования.

Аналогичные результаты получены и для других типов высокоинтенсивных потоков (например, рекуррентного [7]).

5. Назаров А.А., Семенова И.А. Асимптотический анализ систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 5. – С. 12–17.
6. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
7. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of High Intensive General Flow // Problems of Cybernetics and Informatics (PCI'2012): Proc. of the IV International Conference. – Baku, Azerbaijan, September 12–14, 2012. – P. 161–163.

Поступила 14.12.2012 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

А.А. Назаров, Е. А. Моисеева

Томский государственный университет

E-mail: moiskate@mail.ru

Исследована математическая модель системы MMPP|M|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Полученные распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов были сравнены численно с допредельным распределением, полученным численными методами, что показало приемлемость использования предложенного асимптотического метода.

Ключевые слова:

Система массового обслуживания с источником повторных вызовов, источник повторных вызовов, метод асимптотического анализа, большая загрузка.

Key words:

Retrial queuing system, source of repeated calls (orbit), method of asymptotic analysis, heavy load.

В теории массового обслуживания, как правило, выделяли и исследовали два класса систем: системы с ожиданием и системы с потерями. В последнее время выделяют новый класс систем массового обслуживания — системы с источником повторных вызовов (или Retrial Queueing System). Такие системы характеризуются ситуациями повторных обращений требований к обслуживающему прибору после осуществления случайной задержки.

Первые системы такого рода были рассмотрены Р.И. Вилкинсоном [1] и Дж. Коэном [2]. Основные подходы к описанию систем с повторными вызовами были описаны Г. Гоштони [3], А. Элдином [4]. Наиболее полное и глубокое исследование разнообразных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г.И. Фалина [5] и Дж.Р. Арголехо [6].

Многие из поставленных задач в таких моделях систем массового обслуживания (СМО) решались численно [7, 8], в данной же работе применяется альтернативный способ их решения — метод асимптотического анализа.

Асимптотические методы применялись такими математиками, как Д. И. Бурман и Д. Р. Смит [9], А.А. Назаров [10], В.В. Анисимов [11], А.А. Боровков [12] и др.

В реальной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями повторного обращения заявок к обслуживающему прибору. В качестве примера опишем однолинейную RQ-систему на примере некоторой организации. Предположим, что на телефон (единственный) некоторого учреждения в случайном порядке поступают вызовы. Это может быть касса кинотеатра, регистратура в больнице или, к примеру, справочное бюро. Если в момент поступления вызова телефон свободен, то абонент обслуживается (принимается заказ на бронирование билета, происходит запись к врачу, предоставляется какая-либо информация), при этом в общем случае разговор длится случайное время. Если же телефон занят, клиент через некоторое время

пытается повторно дозвониться в фирму. Так как содержание каждого обслуживающего прибора (телефона, работника) связано с затратами организации, но и необслуживание требований наносит определенный вред организации, то возникает вопрос о нахождении некоторого оптимального числа работников (т. е. приборов) и длительности обслуживания клиентов. Нередко бывает, что такие системы массового обслуживания имеют достаточно высокую загрузку, особенно при наличии лишь одного обслуживающего прибора. Поэтому результаты исследования систем массового обслуживания крайне важны для практической деятельности некоторых экономических объектов.

Описание модели

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает MMPP-поток заявок с матрицей условных интенсивностей $\rho\lambda$ и матрицей инфинитезимальных характеристик Q [10], время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

Пусть $i(t)$ — случайный процесс, характеризующий число заявок в ИПВ, $n(t)$ — цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

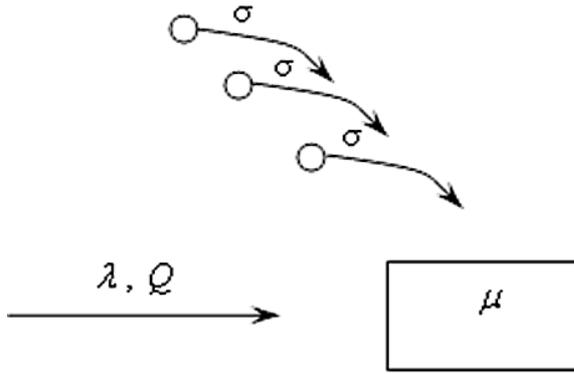


Рис. 1. RQ-система MMPP|M|1

Обозначим $P\{k(t)=k, i(t)=i, n(t)=n\}=P(k, i, n, t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k , управляющая MMPP-поток цепь Маркова – в состоянии n , и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Тогда процесс $\{k(t), i(t), n(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Ставится задача найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Исследование RQ-системы MMPP|M|1 в условии большой загрузки

Для получения распределения вероятностей $P(k, i, n, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = \mu P(1, n, i, t) - \\ -(\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i, t) + \sum_{v \neq n} P(0, v, i, t) \cdot q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + \mu - q_{nn})P(1, n, i, t) + \\ + \rho\lambda_n P(0, n, i, t) + \rho\lambda_n P(1, n, i-1, t) + \\ + \sigma(i+1) \cdot P(0, n, i+1, t) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i, t) \cdot q_{vn}. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим векторы-строки

$$P(k, i) = \{P(k, 1, i) P(k, 2, i) \dots P(k, N, i)\},$$

где в стационарном режиме $P(k, i, n, t) = P(k, i, n)$. Тогда в матричном виде система (1) примет вид:

$$\begin{cases} P(0, i)(Q - \rho\lambda - i\sigma \cdot I) + \mu P(1, i) = 0, \\ P(1, i)(Q - \rho\lambda - \mu I) + P(0, i)\rho\lambda + \\ + P(1, i-1)\rho\lambda + \sigma(i+1) \cdot P(0, i+1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где I – единичная матрица.

Получили систему двух матричных уравнений в конечных разностях.

Пусть параметры системы таковы, что выполняется:

$$R \cdot \lambda \cdot E = \mu, \quad (3)$$

где E – единичный вектор-столбец, R – распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-поток, которое определяется следующим образом:

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Перейдем в системе (2) к характеристическим функциям: $H(k, u) = \sum_i e^{ju} P(k, i)$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда система уравнений (2) для характеристических функций переписывается в виде:

$$\begin{cases} H(0, u)(Q - \rho\lambda) + j\sigma \frac{\partial}{\partial u} H(0, u) + \mu H(1, u) = 0, \\ H(1, u)(Q - \rho\lambda - \mu I) + H(0, u)\rho\lambda + H(1, u)\rho\lambda e^{ju} - \\ - j\sigma e^{-ju} \cdot \frac{\partial}{\partial u} H(0, u) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решим систему (5) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Условием большой загрузки будем называть предельное соотношение $\rho \uparrow 1$ или, введя бесконечно малую величину $\varepsilon = 1 - \rho > 0$, оно может быть описано условием: $\varepsilon \downarrow 0$.

Обозначим $u = \varepsilon w$, $H(0, u) = \varepsilon G(w, \varepsilon)$, $H(1, u) = F(w, \varepsilon)$. Тогда система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon G(w, \varepsilon)(Q - (1 - \varepsilon)\lambda) + j\sigma \frac{\partial}{\partial w} G(w, \varepsilon) + \\ + \mu F(w, \varepsilon) = 0, \\ F(w, \varepsilon)(Q + (1 - \varepsilon)(e^{j\varepsilon w} - 1)\lambda - \mu I) + \\ + \varepsilon(1 - \varepsilon)G(w, \varepsilon)\lambda - j\sigma e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial}{\partial w} G(w, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема. Предельное значение $F(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(w, \varepsilon)$

первой компоненты решения $\{F(w, \varepsilon), G(w, \varepsilon)\}$ системы (6) имеет вид

$$F(w) = R \cdot \Phi(w), \quad (7)$$

где вектор R определяется системой уравнений (4), а скалярная функция $\Phi(w)$ имеет вид характеристической функции

$$\Phi(w) = \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad (8)$$

гамма-распределения с параметрами α и β , определяемыми равенствами

$$\beta = \frac{\mu}{\mu + V\lambda E}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu}{\sigma} \beta, \quad (9)$$

в которых вектор V является решением неоднородной системы

$$VQ = R(\mu I - \lambda). \quad (10)$$

Доказательство

В (6) совершим предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, обозначив $F(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(w, \varepsilon)$ и $G(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(w, \varepsilon)$.

Получим:

$$\begin{cases} j\sigma G'(w) = -\mu F(w), \\ F(w)Q = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Запишем следующее разложения функций:

$$\mathbf{G}(w, \varepsilon) = \mathbf{G}(w) + \varepsilon \cdot \mathbf{g}(w) + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}(w) + \varepsilon \cdot \mathbf{f}(w) + O(\varepsilon^2), \quad (13)$$

где $O(\varepsilon^2)$ – бесконечно малая величина порядка ε^2 .

Подставим разложения (12), (13) в систему (6). В результате несложных преобразований запишем следующую систему:

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{G}(w)(\mathbf{Q} - (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda}) + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{g}(w)(\mathbf{Q} - (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda}) + \\ + j\sigma \mathbf{G}'(w) + \varepsilon j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w) + \mu \mathbf{F}(w) + \varepsilon \cdot \mu \mathbf{f}(w) = O(\varepsilon^2) \\ \mathbf{F}(w)(\mathbf{Q} - (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I}) + \varepsilon \cdot \mathbf{f}(w)(\mathbf{Q} - (1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I}) + \\ + \varepsilon \mathbf{G}(w)(1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{g}(w)(1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda} + \\ + \mathbf{F}(w)(1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda}(1 + j\varepsilon w) + \varepsilon \cdot \mathbf{f}(w)(1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda}(1 - j\varepsilon w) - \\ - j\sigma(1 - j\varepsilon w) \cdot \mathbf{G}'(w) - \varepsilon j\sigma(1 - j\varepsilon w) \cdot \mathbf{g}'(w) = O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Учитывая (11), разделив на ε и совершив предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(w)(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}) + j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w) + \mu \mathbf{f}(w) = 0 \\ \mathbf{f}(w)(\mathbf{Q} - \mu \mathbf{I}) + \mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda} + jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda} + \\ + j\sigma jw \cdot \mathbf{G}'(w) - j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Сложим матричные уравнения системы (6) и домножим их на единичный вектор-столбец \mathbf{E} (таким образом суммируя все скалярные составляющие уравнения системы). Учитывая, что $\mathbf{Q}\mathbf{E} = 0$, получим:

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon)(1 - \varepsilon)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{G}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{E} = 0.$$

Подставим разложения (12), (13):

$$\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \varepsilon \cdot \mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \cdot \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} + \\ + j\sigma \varepsilon \cdot \mathbf{g}'(w)\mathbf{E} - j\sigma j\varepsilon w \cdot \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

Устремив $\varepsilon \downarrow 0$, запишем следующее равенство:

$$\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0. \quad (16)$$

Учитывая (16), равенство (15) переписывается в виде:

$$\varepsilon \cdot \mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \varepsilon \cdot \mathbf{g}'(w)\mathbf{E} - \\ - j\sigma j\varepsilon w \cdot \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = O(\varepsilon^2).$$

Разделив уравнение на ε и совершив предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, запишем

$$\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} - \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w)\mathbf{E} - \\ - j\sigma jw \cdot \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0. \quad (17)$$

Объединив (11), (14), (16) и (17), получим следующую систему четырех матричных и двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} j\sigma \mathbf{G}'(w) = -\mu \mathbf{F}(w), \\ \mathbf{F}(w)\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{G}(w)(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}) + j\sigma \mathbf{g}'(w) + \mu \mathbf{f}(w) = 0, \\ \mathbf{f}(w)(\mathbf{Q} - \mu \mathbf{I}) + \mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda} + jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda} + \\ + j\sigma jw \cdot \mathbf{G}'(w) - j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w) = 0, \\ \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} - \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w)\mathbf{E} - \\ - j\sigma jw \cdot \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из 2-го уравнения полученной системы (18) можно записать равенство, совпадающее с (7):

$$\mathbf{F}(w) = \mathbf{R} \cdot \Phi(w),$$

где $\mathbf{F}(w)\mathbf{E} = \Phi(w)\mathbf{R}\mathbf{E} = \Phi(w)$.

Тогда из 1-го уравнения системы (18) можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{G}'(w) = j \frac{\mu}{\sigma} \mathbf{F}(w) = j \frac{\mu}{\sigma} \mathbf{R} \cdot \Phi(w). \quad (19)$$

Суммируя 3-е и 4-е уравнения системы (18), получим

$$\{\mathbf{G}(w) + \mathbf{f}(w)\}\mathbf{Q} + jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda} + j\sigma jw \cdot \mathbf{G}'(w) = 0.$$

Учитывая (19), несложно показать, что выполняется равенство:

$$\{\mathbf{G}(w) + \mathbf{f}(w)\}\mathbf{Q} = -jw\mathbf{R}\Phi(w)\{\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I}\}. \quad (20)$$

Пусть $\mathbf{G}(w) + \mathbf{f}(w) = jw\Phi(w)\mathbf{V}$, где \mathbf{V} – некоторый вектор, для которого выполняется равенство, совпадающее с (10):

$$\mathbf{V}\mathbf{Q} = \mathbf{R}(\mu \mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda}).$$

Для того чтобы существовало решение такой системы, необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы \mathbf{Q} . Так как определитель $|\mathbf{Q}| = 0$, то и ранг расширенной матрицы должен быть меньше размерности системы. Тогда достаточно выполнения следующего условия:

$$(\mu \mathbf{R} - \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda})\mathbf{E} = 0,$$

что справедливо в силу (3).

Тогда решение системы (10) можно представить в виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{R} + \mathbf{V}_0,$$

где \mathbf{C} – произвольная постоянная, \mathbf{V}_0 – частное решение системы, которое можно найти накладывая некоторые начальные условия, например $\mathbf{V}\mathbf{E} = 0$.

Таким образом, из (20) можно записать:

$$\mathbf{f}(w) = jw\Phi(w) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{G}(w). \quad (21)$$

Из 3-го уравнения системы (18), получим:

$$j\sigma \mathbf{g}'(w) = -\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}) - \mu \mathbf{f}(w).$$

Подставим в это выражение (20):

$$j\sigma \mathbf{g}'(w) = \mathbf{G}(w)(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} + \mu \mathbf{I}) - \mu jw\Phi(w) \cdot \mathbf{V}. \quad (22)$$

Суммируем 5-е и 6-е уравнения в системе (18):

$$\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma \cdot \mathbf{g}'(w)\mathbf{E} + j\sigma(1 - jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0.$$

Подставим в это равенство полученные ранее формулы (21), (22):

$$\begin{aligned} & [jw\Phi(w) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{G}(w)] \cdot \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \\ & + [\mathbf{G}(w)(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} + \mu \mathbf{I}) - \mu jw\Phi(w) \cdot \mathbf{V}] \cdot \mathbf{E} + \\ & + j\sigma(1 - jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E} = 0, \\ & jw\Phi(w) \cdot \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I})\mathbf{E} + \\ & + j\sigma(1 - jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E} + \mathbf{G}(w)\mu = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем последнее выражение:

$$j\Phi(w)\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I})\mathbf{E} + jw\Phi'(w)\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda} - \mu \mathbf{I})\mathbf{E} + \\ + \sigma \mathbf{G}'(w)\mathbf{E} + j\sigma(1 - jw)\mathbf{G}''(w)\mathbf{E} + \mathbf{G}'(w)\mu = 0. \quad (23)$$

Продифференцировав (19) и подставив полученное выражение в (23), в ходе простых преобразований получим:

$$\Phi(w) \cdot \left[\begin{array}{l} j\mathbf{V}\lambda E - j\mu\mathbf{V}E + j\mu\mathbf{R}E + \\ + j\frac{\mu^2}{\sigma}\mathbf{R}E - j\frac{\mu}{\sigma}\mathbf{R}QE \end{array} \right] + \Phi'(w) \cdot [jw\mathbf{V}\lambda E - jw\mu\mathbf{V}E - \mu\mathbf{R}E + jw\mu\mathbf{R}E] = 0.$$

Учитывая условия (4), последнее выражение запишется в следующем виде:

$$\Phi(w) \cdot \left[j\mathbf{V}\lambda E - j\mu\mathbf{V}E + j\mu + j\frac{\mu^2}{\sigma} \right] = \Phi'(w) \cdot [-jw\mathbf{V}\lambda E + jw\mu\mathbf{V}E + \mu - jw\mu]. \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\lambda E - \mu\mathbf{V}E + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu^2}{\sigma(\mathbf{V}\lambda E - \mu\mathbf{V}E + \mu)}.$$

Тогда формула (25) переписывается в виде:

$$\Phi(w) \cdot j\alpha = \Phi'(w) \cdot [\beta - jw].$$

Решение такого уравнения имеет вид:

$$\Phi(w) = C \cdot [w + j\beta]^{-\alpha}, \quad (26)$$

где C – произвольная постоянная, которая из условия $\Phi(0)=1$ равна $C=[j\beta]^\alpha$.

Подставив значение константы в (26), получим формулу (8) из условия теоремы:

$$\Phi(w) = \left[1 - \frac{jw}{\beta} \right]^{-\alpha}.$$

Замечание. На множестве решений $\mathbf{V}=\mathbf{C}\mathbf{R}+\mathbf{V}_0$ неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (9) параметры α и β гамма-распределения не зависят от значений постоянной C .

Доказательство

Рассмотрим выражение $\mathbf{V}\lambda E - \mu\mathbf{V}E + \mu$. Подставим в него множество решений $\mathbf{V}=\mathbf{C}\mathbf{R}+\mathbf{V}_0$, тогда, учитывая условия (3) и (6), получим:

$$\mathbf{V}\lambda E - \mu\mathbf{V}E + \mu = \mathbf{V}_0\lambda E - \mu\mathbf{V}_0E + \mu.$$

Следовательно, выражение $\mathbf{V}\lambda E - \mu\mathbf{V}E + \mu$, зависит только от частного решения системы (9). Выберем такое решение, для которого выполняется $\mathbf{V}E=0$.

Тогда параметры α и β гамма-распределения примут следующий вид:

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\lambda E + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu}{\sigma}\beta.$$

Возвращаясь к (7), можно записать равенство:

$$\mathbf{F}(w) = \mathbf{R} \left(1 - \frac{jw}{\beta} \right)^{-\alpha}.$$

Сделав обратные замены $w=u/\varepsilon$ и $\varepsilon=1-\rho$, получим, что асимптотическая характеристическая функция имеет вид

$$h(u) = \mathbf{F}(w)\mathbf{E} = \mathbf{F}[u/\varepsilon]\mathbf{E} = \mathbf{F} \left[\frac{u}{1-\rho} \right] \mathbf{E} = \left[1 - \frac{j u}{\beta(1-\rho)} \right]^{-\alpha}$$

характеристической функции гамма-распределения с параметрами α и β , где

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\lambda E + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu}{\sigma}\beta.$$

Асимптотическое распределение вероятностей $P(i)$, характеристическая функция которого равна

$$h(u) = \left(1 - \frac{j u}{\beta(1-\rho)} \right)^{-\alpha},$$

может также быть найдено с помощью обратного преобразования Фурье, либо используя свойства гамма-распределения.

Сравним между собой полученное асимптотическое распределение $P(i)$ и распределения $R(i)$, полученное решением системы (2) численными методами.

Сравнение асимптотического и допредельного распределений

С помощью математического пакета MathCad было численно реализовано вычисление распределения вероятностей числа заявок в ИПВ $i=0,100$, полученных с помощью асимптотического анализа, для различных значений параметров $\lambda, Q, \sigma, \rho, \mu$. На графиках было проиллюстрировано расхождение между допредельным и асимптотическим распределениями. Приведем примеры для нескольких случаев.

Рассмотрим случай, когда параметры принимают следующие значения:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix},$$

$$\rho = 0,9, \quad \sigma = 1, \quad \mu = 1.$$

На рис. 2 изображены полученные распределения вероятностей $R(i)$ и $P(i)$, числа заявок i в ИПВ.

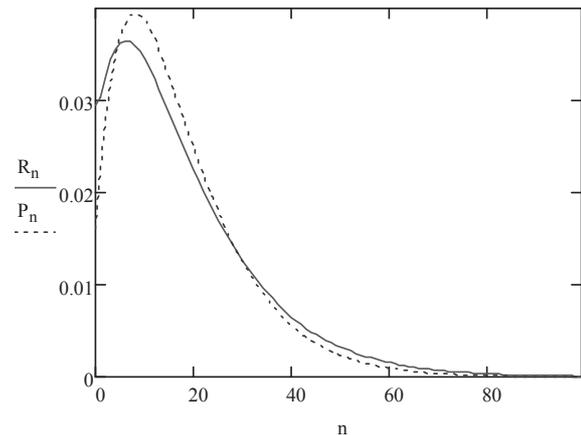


Рис. 2. Расхождение между распределениями при $\rho=0,9, \sigma=1, \mu=1$

Рассмотрим случай, когда $\rho=0,9, \sigma=2, \mu=1$. На рис. 3 изображены полученные распределения вероятностей $R(i)$ и $P(i)$, числа заявок i в ИПВ.

Определим расстояние Колмогорова между распределениями для каждого из приведенных случаев:

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i R(v) - \sum_{v=0}^i P(v) \right|.$$

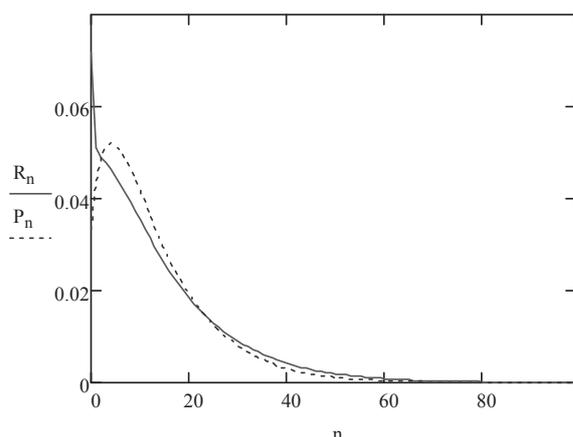


Рис. 3. Расхождение между распределениями при $\rho=0,9$, $\sigma=2$, $\mu=1$

Представим для наглядности полученные результаты в виде таблицы.

Таблица. Расхождения между асимптотическим и допредельным распределениями

| Значения параметров системы | Расстояние Колмогорова |
|-----------------------------------|------------------------|
| $\rho=0,9$, $\sigma=2$, $\mu=1$ | $\Delta=0,046$ |
| $\rho=0,9$, $\sigma=1$, $\mu=1$ | $\Delta=0,033$ |

Заключение

В работе была исследована математическая модель системы ММРР|M|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Полученные распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов были численно сравнены с допредельными результатами численных алгоритмов. Из чего можно вывод, что предлагаемый асимптотический метод количественно дает удовлетворительные результаты при $\rho=0,9$: погрешность аппроксимации не превышает 5 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. – 1956. – V. 35. – № 2. – P. 421–507.
2. Коэн Дж., Бонсма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания / Пер. с англ. А.Д. Вайнштейна. – М.: Мир, 1987. – 272 с.
3. Гоштони Г. Сравнение вычисленных и моделированных результатов для пучков соединительных линий при наличии повторных попыток установления связи // Материалы VIII ИТС. – Сидней, 1977. – № 1. – С. 1–16.
4. Эллдин А. Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова // Ericsson Technics, 1967. – Т. 23 – № 3. – С. 345–407.
5. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.
6. Artolejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
7. Дудин А.Н. Об одной системе с повторными вызовами и изменяемым режимом работы / ред. журн. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – М., 1985. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 10.01.1985, № 10293–85.
8. Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленц Ю.В. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания. Учебное пособие – Мн.: «Электронная книга БГУ», 2003. – 166 с.
9. Burman D.Y., Smith D.R. An asymptotic analysis of a queueing system with Markov modulated arrivals // Operations Research. – 1986. – V. 34. – P. 105–119.
10. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
11. Анисимов В.В., Закусилко О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: Вища школа, 1987. – 247 с.
12. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1980. – 381 с.

Поступила 20.11.2012 г.

УДК 514.763

ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОГООБРАЗИЕ НУЛЬ-ПАР ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

М.А. Аль-Хассани, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam@tpu.ru

Изучаются дифференцируемые отображения аффинного пространства в многообразия всех невырожденных и всех вырожденных нуль-пар проективного пространства. Рассматривается связь между этими отображениями.

Ключевые слова:

Дифференцируемые отображения, многомерные пространства.

Key words:

Differentiable mapping, multidimensional spaces.

1. Введение

Как известно [1], одной из важных проблем в теории дифференциально-геометрических структур на многообразии M_N является проблема изучения этих структур для дифференцируемых отображений. Исследованиям таких структур посвящены [2–8]. Среди этих работ особое место занимает [4], где автор указал на возможность определения дифференцируемых отображений заданием фундаментального геометрического объекта.

Данная работа посвящена изучению отображений $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$ и $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$ аффинного пространства Q_m в многообразии M_{2n} всех невырожденных нуль-пар и многообразии M_{2n-1} всех вырожденных нуль-пар проективного пространства P_n , соответственно. Второй раздел посвящен аналитическому аппарату, в котором выводятся дифференциальные уравнения отображений f_m^{2n} и f_m^{2n-1} . В третьем и четвертом разделах показывается, что с каждым из указанных отображений инвариантным образом ассоциируется другое отображение.

Все построения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^r .

Обозначения и терминология соответствует принятым в [1–12].

2. Аналитический аппарат

Рассматривается m -мерное аффинное пространство Q_m , отнесенное к подвижному аффинному реперу $Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{B} = \bar{\varepsilon}_a \theta^a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b \bar{\varepsilon}_b, \quad D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \\ D\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b, \quad (a, b, c = \overline{1, m}). \quad (1)$$

Рассматривается n -мерное эквипроективное пространство P_n , отнесенное к подвижному эквипроективному реперу $P = \{\bar{A}_j\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}_J = \omega_J^K \bar{A}_K, \quad D\omega_J^K = \omega_J^I \wedge \omega_I^K, \quad (I, J, K = \overline{0, n}). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что линейно независимые точки $A_k \in P_n$ удовлетворяют условию:

$$[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n] = 1, \quad (3)$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек \bar{A}_k равно 1. Из (2) и (3) получаем $\omega_k^k = 0$. Обозначим M_{2n} множество (дифференцируемое многообразие) всех невырожденных нуль-пар $\{M; L_{n-1}\}$ проективного пространства P_n , где точка M не принадлежит гиперплоскости L_{n-1} в P_n . Проективный репер P выбирается так, чтобы

$$\bar{M} = \bar{A}_0, \quad L_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_{s-1} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_s)$ обозначается s -плоскость L_s , проходящая через линейно независимые аналитические точки $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_s$. Тогда из (2) и (4) заключаем, что 1-формы ω_0^i и ω_i^0 являются базовыми 1-формами дифференцируемого многообразия M_{2n} , которые удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega_0^i = \omega_0^j \wedge \Omega_j^i, \quad D\omega_i^0 = \Omega_j^i \wedge \omega_j^0, \\ \Omega_j^i = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0 \quad (i, j, k, l = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Рассматривается отображение

$$f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n} \quad (6)$$

аффинного пространства Q_m в многообразии M_{2n} . Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1), (2) и (5) будут иметь вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad \omega_i^0 = A_{ia} \theta^a, \\ dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b, \\ A_{ia} - A_{ja} \Omega_j^i - A_{jb} \theta_a^b = A_{iab} \theta^b, \\ A_{[ab]}^i = 0, \quad A_{[ab]} = 0, \quad (i, j = \overline{1, n}; a, b = \overline{1, m}). \quad (7)$$

Дифференциальными уравнениями (7) удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения (6) в смысле Г.Ф. Лаптева [4]:

$$\Gamma_{2n} = \{A_a^i, A_{ia}\}. \quad (8)$$

Обозначим M_{2n-1} дифференцируемое многообразие всех вырожденных нуль-пар $\{M; L_{n-1}\}$ проективного пространства P_n , где $M \in L_{n-1}$. Проективный репер P в данном случае выбирается так, чтобы

$$\bar{M} = \bar{A}_0, \quad L_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n). \quad (9)$$

Тогда с учетом (2) и (9) 1-формы ω_0^i и ω_i^1 являются базовыми 1-формами многообразия M_{2n-1} , удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\omega_0^j = \omega_0^j \wedge \Omega_j^0, \quad D\omega_i^1 = \omega_{j_1}^1 \wedge \Omega_i^{j_1} + \omega_{i_1}^0 \wedge \omega_0^1, \\ \Omega_i^{j_1} = \omega_{i_1}^{j_1} - \delta_{i_1}^{j_1} \omega_1^1, \quad (i_1, j_1 = \overline{2, n}; \quad i, j = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Рассматривается отображение

$$f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1} \quad (11)$$

аффинного пространства Q_m в многообразии M_{2n-1} . Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1), (2) и (10) будут иметь вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad dA_a^i + A_a^i \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b, \\ \omega_i^1 = A_{i_a}^1 \theta^a, \\ dA_{i_a}^1 + A_{j_a}^1 \Omega_{i_1}^{j_1} - A_{i_1}^1 \theta_a^b + A_{i_1}^1 \omega_{i_1}^0 = A_{i_1 a}^1 \theta^b, \\ A_{[ab]}^i = 0, \quad A_{i_1 [ab]}^1 = 0, \\ (a, b = \overline{1, m}; \quad i, j = \overline{1, n}; \quad i_1, j_1 = \overline{2, n}). \quad (12)$$

Заметим, что дифференциальным уравнениям (12) удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения (11):

$$\Gamma_{2n-1} = \{A_a^i, A_{i_a}^1\}, \quad (a = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, n}; \quad i_1 = \overline{2, n}). \quad (13)$$

В данной статье решаются следующие задачи:

Задача 1. Найти охваты компонент геометрического объекта (8) и их продолжения компонентами геометрического объекта (13) и их продолжений в смысле Г.Ф. Лаптева [4], т. е. выявить случаи, когда компоненты геометрического объекта Γ_{2n} являются функциями компонент объекта Γ_{2n-1} . Геометрически это означает показать, что с отображением (6) инвариантным образом можно связать отображение (11).

Задача 2 аналогична задаче 1 и является обратной к этой задаче, т. е. с геометрической точки зрения надо показать, что с отображением (11) инвариантным образом можно связать отображение (6).

3. Отображение $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$

В этом разделе будет проведено решение задачи 1: Дано отображение (6). Требуется инвариантным аналитическим и геометрическим образом найти отображение (11).

С помощью компонент геометрического объекта (8) и дифференциальных уравнений (7) в точке $B \in Q_m$ рассмотрим следующие величины, удовлетворяющие соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$g_{ab} = \frac{1}{2} A_{(a}^i A_{i|b)}, \quad dg_{ab} - g_{cb} \theta_a^c - g_{ac} \theta_b^c = g_{abc} \theta^c, \\ g_{abc} = \frac{1}{2} (A_{(a|k|}^i A_{i|b|c)} + A_{i_a}^1 A_{1bc}); \quad (14)$$

$$\det[g_{ab}] \neq 0, \quad g^{bc} g_{ab} = \delta_a^c, \\ dg^{ab} + g^{cb} \theta_c^a + g^{ac} \theta_c^b = g_c^{ab} \theta^c, \quad g_c^{ab} = -g_{stc} g^s g^{bt}; \quad (15)$$

$$B_i^j = A_a^j A_{ib} g^{ab}, \quad dB_i^j + B_i^k \Omega_k^j - B_{ik}^j \Omega_i^k = B_{ic}^j \theta^c, \\ B_{ic}^j = A_{ac}^j A_{ib} g^{ab} + A_a^j A_{bc} g^{ab} + A_a^j A_b g^{ab}; \quad (16)$$

$$\check{C}_{ij} = g^{ab} A_{ia} A_{jb}, \quad d\check{C}_{ij} - \check{C}_{kj} \Omega_i^k - \check{C}_{ik} \Omega_j^k = \check{C}_{ijc} \theta^c, \\ \check{C}_{ijc} = g_c^{ab} A_{ia} A_{jb} + g^{ab} A_{iac} A_{jb} + g^{ab} A_{ia} A_{jbc}; \quad (17)$$

$$\check{B}_a^j = B_i^j A_a^i, \quad d\check{B}_a^j + \check{B}_a^k \Omega_k^j - \check{B}_a^j \theta_a^b = \check{B}_{ac}^j \theta^c, \\ \check{B}_{ac}^j = B_{ic}^j A_a^i + B_i^j A_{ac}^i; \quad (18)$$

$$\check{B}_{ka} = A_{ia} B_k^i, \quad d\check{B}_{ka} - \check{B}_{ia} \Omega_k^i - \check{B}_{kb} \theta_a^b = \check{B}_{kac} \theta^c, \\ \check{B}_{kac} = B_{ka}^j A_{ja} + B_k^j A_{jac}; \quad (19)$$

$$G_{ab} = \frac{1}{2} B_i^k B_j^l A_{(a}^i A_{j|b)}, \\ dG_{ab} - G_{cb} \theta_a^c - G_{ac} \theta_b^c = G_{abc} \theta^c, \\ G_{abc} = \frac{1}{2} B_{ic}^k B_k^j A_{(a}^i A_{j|b)} + \frac{1}{2} B_i^k B_{kc}^j A_{(a}^i A_{j|b)} + \\ + \frac{1}{2} B_i^k B_k^j A_{(a|c|}^i A_{j|b)} + \frac{1}{2} B_i^k B_k^j A_{(a}^i A_{j|b|c)}; \quad (20) \\ l_c = \frac{1}{m} g_{abc} g^{ab}, \quad dl_c - l_a \theta_c^a = l_{cb} \theta^b,$$

$$l_{cb} = -\frac{1}{m} g_{abcs} g^{ab} - \frac{1}{m} g_{abc} g_s^{ab}; \quad (21)$$

$$\tilde{G}_{abc} = \frac{1}{3} g_{(abc)} - \frac{1}{3} l_a g_{bc}, \\ d\tilde{G}_{abc} - \tilde{G}_{sbc} \theta_a^s - \tilde{G}_{asc} \theta_b^s - \tilde{G}_{abs} \theta_c^s = \tilde{G}_{abcs} \theta^s, \\ \tilde{G}_{abcs} = \frac{1}{3} g_{(abc)s} - \frac{1}{3} l_{(a|s|} g_{bc)} - \frac{1}{3} l_a g_{bc|s}; \quad (22)$$

$$G_a^i = \tilde{G}_{abc} G^{bc}, \quad G^{bc} G_{ab} = \delta_a^c, \\ dG^{bc} + G^{ac} \theta_b^a + G^{ca} \theta_a^b = G^{bc} \theta^a, \\ \det[G_{ab}] \neq 0, \quad G_a^{bc} = -G_{sta} G^{sb} G^c, \\ dG_a^i - G_b \theta_a^b = \tilde{G}_{ac}^i \theta^c, \\ G_c^{ab} = -G_{stc} G^{as} G^{bt}, \quad \tilde{G}_{act} = \tilde{G}_{abct} G^{bc} + \tilde{G}_{abc} G_t^{ab}; \quad (23)$$

$$G^a = G_b g^{ba}, \quad dG^a + G^b \theta_a^b = G_c^a \theta^c, \\ G_c^a = \tilde{G}_{bc} g^{ba} + G_b g_c^{ba}; \quad (24)$$

$$H^i = A_a^i G^a, \quad dH^i + H^j \Omega_j^i = H_c^i \theta^c, \\ H_c^i = A_{ac}^i G^a + A_a^i G_c^a; \quad (25)$$

$$H_i = A_{ia} G^a, \quad dH_i - H_j \Omega_i^j = H_{ic} \theta^c, \\ H_{ic} = A_{iac} G^a + A_{ia} G_c^a; \quad (26)$$

$$(a, b, c, s, t = \overline{1, m}; \quad i, j, k = \overline{1, n}).$$

Замечание 3.1. В точке $B \in Q_m$ рассматриваются m^2 величин $A_a^i A_{ib}$, зависящих от $2mn$ величин A_a^i и A_{ib} ($i = \overline{1, n}; a, b = \overline{1, m}$). Поэтому при изучении отображения $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$ мы должны считать, что числа m и n удовлетворяют неравенствам $m \leq 2n$, $m > 1$, $n > 1$. Следовательно, определять все величины по формулам (13)–(25) имеет смысл.

Далее будут изучены поля инвариантных геометрических образов, определяемых полями величин (14)–(26). Рассмотрим направление

$$u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) u^a \in Q_m. \quad (27)$$

Из (4) и (2) с учетом (7) следует, что вдоль направления u точка $A_0 \in P_n$ описывает линию с касательной

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) A_i^a u^a, \quad (28)$$

а характеристика $\text{Ch}(L_{n-1})_u$ гиперплоскости L_{n-1} вдоль u , т. е. пересечение L_{n-1} со своей бесконечной близкой L_{n-1} первого порядка вдоль u , определяется в точечных координатах x^j проективного репера P пространства P_n уравнениями

$$x^0=0, A_i x^i u^a=0. \quad (29)$$

Из (27)–(29) с учетом (14) получаем, что гиперконус $Q_{m-1}^2 \in Q_m$ второго порядка с вершиной в точке B , определяемый уравнением

$$g_{ab} u^a u^b=0, \quad (30)$$

представляет собой совокупность всех направлений $u \in Q_m$, вдоль которых $x \cap L_{n-1} \in \text{Ch}(L_{n-1})_u$. В силу (15) и (30) гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$ в общем случае не вырождается в гиперконус, по крайней мере, с прямолинейной вершиной, проходящей через точку B . Из (15) и (30) замечаем, что гиперконус $Q_{m-1,2} \subset Q_m$, определяемый в тангенциальных координатах u_a репера Q уравнением:

$$g^{ab} u_a u_b=0, \quad (31)$$

огихает гиперконус $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$. Точке $B \in Q_m$ сопоставим в соответствующей гиперплоскости $L_{n-1} \in P_n$ аналитическую точку

$$\bar{X} = x^i \bar{A}_i, \quad (32)$$

отвечающую геометрической точке X . Из (7) и (29) следует, что множество всех направлений $u \in Q_m$ (см. (27)), образы которых при отображении (6) пересекают гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$ в точках $\text{Ch}(L_{n-1})_u \subset L_{n-1}$, образует в Q_m гиперплоскость $G_{m-1}(X)$, определяемую в точечных координатах u^a репера Q уравнением $x^j A_{ij} u^a=0$.

Образ полюса этой гиперплоскости относительно гиперконуса (30) при отображении (6) с учетом (31) и (16) пересекает гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$ в точке Y с аналитической точкой $\bar{Y}=y^i \bar{A}_i, y^i=B_i^j x^j$.

Такова геометрическая интерпретация центрально-проективного преобразования

$$\Pi = \{B_i^j\} \quad (33)$$

с центром в точке A_0 такого, что $\Pi(A_0 X)=A_0 Y$. Аналогичным образом получаем, что множество всех точек (32) с геометрическими точками $\bar{X} \in L_{n-1}$ такими, что линейные поляры прообразов которых при отображении (6) принадлежат гиперконусу (31), образует в силу (17) в L_{n-1} квадрнику $Q_{m-2}^2 \subset L_{n-1}$, которая определяется уравнениями $x^0=0, C_{ij}^* x^i x^j=0$. Отсюда следует, что уравнение $C_{ij}^* x^i x^j=0$ определяет в P_n гиперконус Q_{m-1}^2 второго порядка с вершиной в точке A_0 . Этот гиперконус представляет собой множество всех прямых $A_0 X$, пересекающих L_{n-1} в точках квадрики Q_{m-2}^2 .

Из (6), (7), (28), (18) и (33) следует, что направлению (27) отвечает направление

$$y = (\bar{A}_0, \bar{A}_j) y^j, \quad y^j = B_i^j A_i^a u^a = \tilde{B}_a^j u^a, \quad (34)$$

которое является образом направления x при центрально-аффинном преобразовании Π , причем направление $x \in P_n$ – образ направления $u \in Q_m$ при ото-

бражении (6). Аналогично с учетом (19) и (29) получаем, что уравнение

$$\tilde{B}_{ia} x^i u^a = 0 \quad (35)$$

определяет при фиксированном направлении (27) гиперплоскость в P_n – образ той гиперплоскости $A_0 \cup \text{Ch}(L_{n-1})_u$ при преобразовании Π , что при отображении (6) характеристикой вдоль направления (27) гиперплоскости L_{n-1} является $\text{Ch}(L_{n-1})_u$.

Из (18)–(20) следует, что уравнение

$$G_{ab} u^a u^b = 0 \quad (36)$$

определяет в Q_m гиперконус G_{m-1}^2 второго порядка с вершиной B как множество всех таких направлений (27), которым отвечают направления (34) в P_n , принадлежащие гиперплоскостям в P_n , определяемым уравнениями (35). Заметим с учетом (23) и (36), что в точке $B \in Q_m$ в общем случае $\det[G_{ab}]$ не равен нулю, т. е. в общем случае гиперконус $G_{m-1}^2 \subset Q_m$ вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $B \in Q_m$.

Пользуясь условиями инвариантности точек и геометрических образов в аффинном пространстве Q_m и учитывая (1), (14), (15), (21) и (22), получаем, что уравнение

$$\tilde{G}_{abc} u^a u^b u^c = 0 \quad (37)$$

определяет в Q_m алгебраический гиперконус \tilde{G}_{m-1}^3 третьего порядка с вершиной $B \in Q_m$. Этот гиперконус вдоль всех направлений (27), принадлежащих гиперконусу Q_{m-1}^2 , проходит через Q_{m-1}^2 и бесконечно близкий $(Q_{m-1}^2)'$ первого порядка, причем \tilde{G}_{m-1}^3 и Q_{m-1}^2 аполярны.

Из (36) и (37) с учетом (22) и (23) замечаем, что гиперплоскость $H_{m-1} \subset Q_m$ определяется в аффинных координатах u^a уравнением

$$G_a u^a=0 \quad (38)$$

и аполярна относительно гиперконусов \tilde{G}_{m-1}^3 и Q_{m-1}^2 , т. е. квадратичная поляра любого направления $u \in \tilde{G}_{m-1}^3$ и гиперконус Q_{m-1}^2 аполярны. Из (38) и (30) следует, что направление $G=(B, \varepsilon_a) G^a \in Q_m$ полярно сопряжено гиперплоскости $H_{m-1} \subset Q_m$ относительно гиперконуса $Q_{m-1}^2 \subset Q_m$.

Из (25) и (26) с учетом (6) и (7) следует, что при отображении $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$ направление G переходит в направление $\tilde{g}=(A_0, A_i) A_i^a G^a=(A_0, A_i) H_i \in P_n$, а гиперплоскость $L_{n-1}^* \subset P_n$, определяемая уравнением в проективных координатах $H_i x^i=0$, проходит через точку A_0 и $\text{Ch}(L_{n-1})_G$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. С отображением $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$ ($m \leq n$) инвариантным образом ассоциируется отображение $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$, где каждая вырожденная нульпара $\{A_0, L_{n-1}^*\}$ состоит из точки A_0 и гиперплоскости $A_0 \in L_{n-1}^*$.

4. Отображение $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$

В этом разделе будет приведено решение задачи 2: Дано отображение (11). Требуется инвариантным аналитическим и геометрическим образом найти отображение (6).

Из (12) и (9) с учетом (1) и (11) замечаем, что в точке $\bar{B} \in \bar{Q}_m$ прообразом гиперплоскости $L_{n-1} = (\bar{A}_0, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \in P_n$ при отображении $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$ является гиперплоскость $\Gamma_{m-1} \subset Q_m$, проходящая через точку B и в точечных координатах u^a аффинного репера Q определяемая уравнением:

$$A_a^1 u^a = 0. \quad (39)$$

Проводится такая канонизация аффинного репера Q , при которой

$$A_{a_1}^1 = 0, \quad A_1^1 \neq 0, \quad (a_1 = \overline{2, m}). \quad (40)$$

Из дифференциальных уравнений (12) в точке $B \in Q_m$ с учетом (40) и (2) получаются дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \theta_{a_1}^1 &= B_{a_1 a}^1 \theta^a, \\ dB_{a_1 a}^1 + B_{a_1 a}^1 \theta_1^1 - B_{b_1 a}^1 \theta_{a_1}^1 - B_{a_1 b}^1 \theta_a^b &= B_{a_1 a b}^1 \theta_1^b, \\ B_{a_1 a}^1 &= -(A_1^1)^{-1} A_{a_1 b}^1, \quad B_{a_1 [a b_1]}^1 = 0, \quad B_{a_1 [a b]}^1 = 0, \\ (a, b &= \overline{1, m}; \quad a_1, b_1 = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (41)$$

С учетом (41) и в соответствии с [11] получаем, что канонизация аффинного репера Q типа (40) существует. Геометрически с учетом (39) эта канонизация означает, что

$$\Gamma_{m-1} = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_m) \subset Q_m. \quad (42)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A_1^1=0$, когда гиперплоскость Γ_{m-1} либо не определена, либо определена неоднозначно.

Из (41) с учетом (42) и (1) следует, что вдоль направления (27) гиперплоскость $\Gamma_{m-1} \subset Q_m$ будет изменяться параллельно самой себе тогда и только тогда, когда величины u^a удовлетворяют уравнениям:

$$B_{a_1 a}^1 u^a = 0, \quad (a_1 = \overline{2, m}; \quad a = \overline{1, m}). \quad (43)$$

Проводится такая канонизация аффинного репера Q_m , при которой

$$B_{a_1 a}^1 = 0, \quad \det[B_{a_1 b_1}^1] \neq 0, \quad (a_1, b_1 = \overline{2, m}). \quad (44)$$

Из дифференциальных уравнений (41) с учетом (44) и (1) получаются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \theta_1^{a_1} &= B_{1 a}^{a_1} \theta^a, \quad dB_{1 a}^{a_1} - B_{1 a}^{a_1} \theta_1^1 + B_{1 a}^{b_1} \theta_{b_1}^{a_1} - B_{a_1 b}^{a_1} \theta_a^b = B_{a_1 a b}^{a_1} \theta_1^b, \\ (a, b &= \overline{1, m}; \quad a_1, b_1 = \overline{2, m}). \end{aligned}$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [11] свидетельствуют о существовании канонизации аффинного репера Q типа (44). Геометрически эта канонизация с учетом (43) означает, что направлением (27), о котором идет речь выше, будет

$$\Gamma_1 = (B, \bar{\varepsilon}_1) \subset Q_m. \quad (45)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $\det[B_{a_1 b_1}^1]=0$, когда направления Γ_1 либо вовсе нет, либо оно определяется неоднозначно.

Из (12) с учетом (45) заключаем, что образом направления Γ_1 при отображении $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$ является направление $L_1 \subset P_n$ вида

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_1) A_i^1. \quad (46)$$

Проводится такая канонизация проективного репера P в пространстве P_n , при которой

$$A_1^i = 0, \quad A_i^1 \neq 0. \quad (47)$$

Тогда из дифференциальных уравнений (12) с учетом (47), (2), (40) и (41) получаются дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_1^{a_1} &= A_{1 a}^{a_1} \theta^a, \\ dA_{1 a}^{a_1} - A_{1 a}^{a_1} \omega_1^1 + A_{1 a}^{j_1} \omega_{j_1}^{a_1} - A_{1 b}^{a_1} \theta_a^b - A_{1 a}^{a_1} \omega_1^0 &= A_{1 a b}^{a_1} \theta^b, \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь явный вид величин $A_{1 a b}^{a_1}$ для нас несущественный.

Из дифференциальных уравнений (48) в соответствии с [11] замечаем, что канонизация проективного репера P типа (47) существует. Геометрически с учетом (46) эта канонизация означает, что $L_1 = (\bar{A}_0, \bar{A}_1)$.

Из (9) и (45) с учетом (2) следует, что характеристикой $Ch(L_{n-1})_{\Gamma_1}$ гиперплоскости L_{n-1} в направлении Γ_1 будет $(n-2)$ -плоскость L_{n-2} , определяемая уравнениями:

$$x^1 = 0, \quad A_1^1 x^0 + x^i A_{i 1}^1 = 0. \quad (49)$$

Проводится канонизация проективного репера P , при которой

$$A_{i 1}^1 = 0, \quad A_1^1 \neq 0. \quad (50)$$

Из дифференциальных уравнений (12) с учетом (2) и (49) получаются дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_i^0 &= A_{i a}^0 \theta^a, \\ dA_{i a}^0 + A_{i a}^0 \omega_0^0 - A_{j a}^0 \omega_{i 1}^{j_1} - A_{i b}^0 \theta_a^b + A_{i a}^0 \omega_1^0 &= A_{i a b}^0 \theta^b. \end{aligned} \quad (51)$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [11] свидетельствуют о существовании канонизации репера P типа (50). Геометрически эта канонизация означает, что

$$L_{n-2} = (\bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \subset P_n. \quad (52)$$

Точке $B \in Q_m$ сопоставим точку $X \in L_1$, соответствующую аналитической точке

$$\bar{X} = x^0 \bar{A}_0 + x^1 \bar{A}_1. \quad (53)$$

Из (2), (42) и (52) с учетом (51) следует, что нефокальная [12] точка (53) будет описывать линию с касательной в нефокальном направлении $u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_{a_1}) u^{a_1} \in \Gamma_{m-1}$, которая вместе с прямой L_1 пересекает $(n-2)$ -плоскость L_{n-2} в точке $Y(x) = (x^0 A_{a_1}^{a_1} + x^1 A_{a_1}^{a_1}) A_{i a_1}^{a_1} u^{a_1}$, $(a_1 = \overline{2, m})$. Эта нефокальная точка описывает вдоль того же направления $u \in \Gamma_{m-1}$ линию с касательной, которая вместе с L_{n-2} пересекает прямую L_1 в точке $Z(x) = (x^0 A_{a_1}^{a_1} + x^1 A_{a_1}^{a_1}) (A_{i b_1}^{a_1} A_0 + A_{i b}^{a_1} A_1) u^{a_1} u^{b_1}$. Отсюда следует, что множество всех направлений $u \in \Gamma_{m-1}$ таких, что $Z(x)$ совпадает с точкой A_0 , образует в аффинном пространстве гиперконус, который пересекается с Γ_{m-1} по конусу $K_{m-2}(x^0, x^1)$ и определяется в аффинных координатах репера Q_m уравнениями

$$u^1 = 0, \quad (x^0 p_{a_1 b_1} + x^1 q_{a_1 b_1}) u^{a_1} u^{b_1} = 0, \quad (a_1, b_1 = \overline{2, m}). \quad (54)$$

Здесь симметрические величины $p_{a_1 b_1}$ и $q_{a_1 b_1}$ определяются по формулам и в силу (12) и (51) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
 p_{a,b_1} &= \frac{1}{2} A_{(a_1}^i A_{|i|b_1}^1, \\
 dp_{a,b_1} - p_{c_1,b_1} \theta_{a_1}^{c_1} - p_{a,c_1} \theta_{b_1}^{c_1} &= p_{a,b_1} \theta^a, \\
 q_{a,b_1} &= \frac{1}{2} A_{(a_1}^i A_{|i|b_1}^1, \\
 dq_{a,b_1} - q_{c_1,b_1} \theta_{a_1}^{c_1} - q_{a,c_1} \theta_{b_1}^{c_1} - q_{a,b_1} \omega_1^0 &= q_{a,b_1} \theta^a, \\
 (a_1, b_1, c_1 &= 2, m; a = 1, m). \quad (55)
 \end{aligned}$$

Здесь явный вид всех величин p_{a,b_1} и q_{a,b_1} для нас не существенный.

Таким образом, каждой точке (53) отвечает $K_{m-2}^2(x^0, x^1) \subset \Gamma_{m-1}$. Из (54) следует, что точке A_0 отвечает конус K_{m-2}^2 , определяемый уравнениями

$$u^1 = 0, \quad p_{a,b_1} u^a u^{b_1} = 0. \quad (56)$$

Из (55) заключаем, что в общем случае в точке $B \in Q_m$ выполняется условие

$$\det[p_{a,b_1}] \neq 0, \quad (57)$$

т. е. конус $K_{m-2}^2 \subset \Gamma_{m-1}$ не вырождается в конус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку B .

С учетом (57) введем в рассмотрение величины $p_a^{a_1 b_1}$ по формулам

$$p_a^{a_1 b_1} p_{b_1 c_1} = \delta_{a_1}^{c_1}, \quad (a_1, b_1, c_1 = \overline{2, m}). \quad (58)$$

В силу (55) величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dp_a^{a_1 b_1} + p_a^{c_1 b_1} \theta_{c_1}^{a_1} + p_a^{a_1 c_1} \theta_{c_1}^{b_1} = p_a^{a_1 b_1} \theta^a. \quad (59)$$

Здесь явный вид величин $p_a^{a_1 b_1}$ для нас не существенный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
- Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия. – 1963. – С. 65–107.
- Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – С. 153–174.
- Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Сем. – 1974. – № 16. – С. 37–42.
- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства $E[m]$ в аффинное $A[n](m < n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 5–9.
- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства $E[m]$ в аффинное $A[n](m \geq n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 2. – С. 6–9.

Определение 4.1. Точка $X \in L_1$, отвечающая точке $B \in Q_m$, называется центром прямой L_1 , если конусы $K_{m-2}^2(x^0, x^1)$ и K_{m-2}^2 аполярны.

Из (54) и (56) в силу (58) следует в соответствии с определением 4.1, что точка T будет центром прямой L_1 тогда и только тогда, когда

$$(m-2)x^0 + q_{a,b_1} p_a^{a_1 b_1} x^1 = 0. \quad (60)$$

Проводится такая канонизация проективного репера, при которой

$$q_{a,b_1} p_a^{a_1 b_1} = 0. \quad (61)$$

Из дифференциальных уравнений (55) и (59) с учетом (2) получаются следующие дифференциальные уравнения

$$\omega_1^0 = A_a \theta^a, \quad dA_a - (\omega_1^1 - \omega_0^0) A_a - A_b \theta_a^b = A_{ab} \theta^b.$$

В соответствии с [11] эти дифференциальные уравнения свидетельствуют о существовании канонизации проективного репера типа (61).

Геометрически в силу (60) эта канонизация означает, что точка A_1 является центром прямой L_1 . Из (52) следует, что каждой точке $B \in Q_m$ отвечает гиперплоскость

$$\dot{L}_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) = A_1 \cup L_{n-2} \subset P_n, \quad A_0 \notin \dot{L}_{n-1}. \quad (62)$$

Таким образом, с учетом (62) доказана теорема.

Теорема 3.1. С отображением $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_{2n-1}$ инвариантным образом ассоциируется отображение $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M_{2n}$, где каждая невырожденная нуль-пара $\{A_0; \dot{L}_{n-1}\}$ состоит из точки A_0 и гиперплоскости \dot{L}_{n-1} , не проходящей через точку A_0 .

- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинного пространства в многообразии гиперконусов другого пространства // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 5–8.
- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
- Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
- Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
- Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
- Аквис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 03.12.2012 г.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ В СЛУЧАЕ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОРЯДКОВ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ НА ОСНОВЕ d -ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет

E-mail: vachurikov@list.ru

Вводятся и рассматриваются свойства экспонент в дробном анализе нецелочисленных порядков. Показано, что для нецелочисленных порядков в разных случаях возможно вырождение различных степеней, когда для различных порядков имеется более одной экспоненты. Получено, что число экспонент для рациональных порядков конечно, а для иррациональных – бесконечно.

Ключевые слова:

Дробный анализ нецелочисленных порядков, дробный анализ целочисленных порядков, d -оператор, главная экспонента, дополнительные экспоненты, экспоненты вещественные, экспоненты комплексные, экспоненциальное вырождение.

Key words:

Fractional analysis of not-integral orders, fractional analysis of integral order, d -operator, main exponent, additional exponential functions, exponential functions of a real variable, exponential functions of a complex variable, exponential degeneration.

Введение

В стандартном анализе имеется одна экспонента с точностью до сложения аргумента с константой. Под экспонентой в стандартном анализе понимается функция инвариантная относительно операций дифференцирования и интегрирования, но последняя, с точностью до сложения с константой интегрирования.

В работе [1] для оператора Адамара была получена дробная экспонента любого конечного вещественного порядка s , названная в дальнейшем главной экспонентой

$$\begin{aligned} \exp_s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)} = \\ &= \frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)} + \frac{x^{-1+2s}}{\Gamma(2s)} + \frac{x^{-1+3s}}{\Gamma(3s)} + \dots \end{aligned} \quad (*)$$

Данная функция инвариантна относительно дифференцирования и интегрирования порядка s , но интегрирование с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$. Данная инвариантность выполняется как для оператора Адамара, так и для локального d -оператора порядка s дробного интегродифференцирования [1]

$$d^{-s}x : \exp_s(x) = \exp_s(x);$$

$$d^s x : \exp_s(x) = \exp_s(x) + C_s(x).$$

Полиномы интегрирования определяются [1]

$$C_\alpha(x) = \begin{cases} C_0(x) = 0; \alpha \in \mathbb{R}; \alpha \leq 0; \\ C_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+s}; a_k = \text{const}; \\ \alpha = s; s \neq 1, 2, 3, \dots; \\ C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k; a_k = \text{const}; \alpha = m; m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Здесь неопределённые коэффициенты a_k являются константами интегрирования, которых будет

k в случае целочисленных порядков и бесконечное счётное множество для нецелочисленных порядков.

В работах [1, 2] было показано, что в локальном дробном анализе для каждого целочисленного порядка $k > 1$ имеется более одной экспоненты, а именно k^2 экспонент. Среди экспонент одна – *главная экспонента*, а остальные – *дополнительные экспоненты*. Из всех k^2 экспонент k являются *основными*, вместе с главной экспонентой и $k-1$ *вещественными экспонентами*, а другие, k^2-k – *комплексные экспоненты*.

Наличие нескольких экспонент в целочисленном локальном дробном анализе называется *экспоненциальным вырождением*.

В случае нецелочисленных порядков экспоненциальное вырождение тоже имеет место. Для нецелочисленных порядков экспоненциальное вырождение имеет ряд особенностей, отличных от вырождения в случае целочисленных порядков.

Экспоненциальное вырождение нецелочисленных порядков

Рассмотрим первый из двух типов экспоненциального вырождения, которые были рассмотрены в случае целочисленных порядков [2].

Заменим в ряду дробной экспоненты порядков $s^{(*)}$ выражение ns на $ns-q+1$, где q – целое число, $q \geq 1$ и найдём её производную порядка s

$$\begin{aligned} d^{-s}x : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)} &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma((n-1)s-q+1)} \frac{x^{(n-1)s-q}}{\Gamma(ns-q+1)} &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)s-q}}{\Gamma((n-1)s-q+1)}. \end{aligned}$$

Число $q \geq 1$ будем называть *сдвигом порядка*, а экспоненциальное вырождение, связанное с ним, будем называть *сдвиговым вырождением*.

При $n=1$ у первого элемента ряда после дифференцирования аргумент гамма-функции будет попадать в полюс, что будет приводить к тому, что первый элемент ряда будет обращаться в ноль, а у остальных порядок уменьшится на s . Переобозначив индекс $m=n-1$, получим ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)}$.

Найдём неопределённый интеграл порядка s данного ряда

$$\begin{aligned} d^s x : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma((n+1)s-q+1)} \frac{x^{(n+1)s-q}}{\Gamma(ns-q+1)} + \tilde{C}_s(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n+1)s-q}}{\Gamma((n+1)s-q+1)} + \tilde{C}_s(x) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)} + C_s(x). \end{aligned}$$

Здесь произведена замена индекса $n+1=m$, и сделано переобозначение полинома интегрирования в силу произвольности его коэффициентов

$$\tilde{C}_s(x) = \frac{x^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)} + C_s(x).$$

Слагаемое $\frac{x^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)}$ становится первым элементом ($m=1$) ряда после переобозначений.

Получили, что дробнестепенные ряды $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)}$ порядка s инвариантны относительно дифференцирования и интегрирования порядка s . Результат интегрирования получается с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$. Функции, задаваемые такими рядами, будем называть экспонентами порядка s .

Такие экспоненты порядка s могут существовать, когда ни один элемент ряда с $n>1$, и $q>1$ не обращается в ноль, что возможно, когда значения аргумента гамма-функции не попадают в её нули, которые определяются равенствами: $ns-q+1=0, -1, -2, \dots$

Рассмотрим случаи, когда порядок является рациональным $s=r/p$ ($r, p \in \mathbb{N}$), тогда нули возможны при выполнении равенств

$$n = \frac{p(q-1)}{r}, \frac{p(q-2)}{r}, \frac{p(q-3)}{r}, \dots$$

Для рациональных порядков всегда найдутся такие значения $n>1$ и $q>1$, когда будет выполняться хотя бы одно из возможных равенств. Поэтому сдвиговая инвариантность для рациональных порядков невозможна.

Если порядок s является иррациональным, то нули возможны при выполнении равенств

$$n = \frac{q-1}{s}, \frac{q}{s}, \frac{q-2}{s}, \frac{q-3}{s}, \dots$$

Для иррациональных порядков s и $q>1$ нет таких значений $n>1$, при которых эти равенства выполняются. Это значит, что сдвиговая инвариантность имеется для иррациональных порядков, причём степень этого вырождения будет бесконечной. Поэтому множество экспонент иррационального порядка со сдвиговым вырождением образуют бесконечное счётное множество в случае любых целых чисел $q \geq 1$.

Экспоненту с $q=1$ будем называть *главной экспонентой* порядка s , а остальные экспоненты с $q>1$ будем называть *дополнительными вещественными экспонентами* порядка s . Все эти экспоненты будем называть *основными экспонентами*, которые будут *вещественными функциями*.

Второй тип экспоненциального вырождения связан с правилами дробного дифференцирования функций, у которых аргумент умножается на константу α

$$d^{-s} x : \exp_s(\alpha x) = \alpha^s \exp_s(\alpha x);$$

$$d^s x : \exp_s(x) = \alpha^{-s} \exp_s(\alpha x) + C_s(x).$$

Инвариантность относительно дифференцирования и интегрирования здесь будет выполняться, если справедливо уравнение, которое называется уравнением инвариантности порядка s [2, 3]

$$\alpha^s = 1.$$

Решения уравнения инвариантности порядка s будем называть корнями инвариантности и обозначать $\alpha_s^{(h+1)} \equiv \alpha_s^{(h)}$ ($h=0, 1, 2, 3, \dots$), которые определяются формулой

$$\begin{aligned} \alpha_l = \alpha_{h+1} = 1^{\frac{1}{s}} &= \exp\left(\frac{i2\pi h}{s}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi h}{s}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi h}{s}\right). \end{aligned}$$

Здесь возможны два важных случая. Когда порядок s – рациональное число или иррациональное число.

Если s – рациональное, то его можно представить в виде $s=r/p$ ($r, p \in \mathbb{N}$; $p>1$), r и p не имеют общих делителей, неравных 1, тогда число корней инвариантности будет r .

Корень инвариантности $\alpha_s^{(1)}=1$, когда $h=0$, всегда равен 1, назван *главным корнем инвариантности*. Остальные корни инвариантности $\alpha_s^{(h+1)} \equiv \alpha_s^{(h)}$ ($h=0, 1, 2, 3, \dots$) будем называть *комплексными корнями инвариантности*. Комплексные корни инвариантности в частном случае могут быть мнимыми или действительными.

Введённые обозначения корней инвариантности выбраны для согласования с нумерацией экспонент целочисленных порядков [2, 3].

Таким образом, для нецелочисленных порядков при вырождении корней инвариантности имеется одна вещественная экспонента, она же – *главная экспонента* (*), при $h=0$, а остальные – *дополнительные комплексные экспоненты*.

В случае ветвей дробного анализа рациональных порядков экспоненциальное вырождение, связанное с корнями инвариантности, даёт конечное число комплексных экспонент, а для ветвей

с иррациональными порядками – бесконечное счётное множество комплексных экспонент.

Возможны различные способы обозначения всех экспонент нецелочисленных порядков s , которые в общем случае можно записать, при условии, что $q, l \in \mathbb{N}; l = h + 1$

$$\begin{aligned} \exp_s^{\{q|l\}}(x) &\equiv \exp_s^{\{q\}}(\alpha_s^{\{l\}}x) \equiv \\ &\equiv \exp_s^{\{q|h+1\}}(x) \equiv \exp_s^{\{q\}}(\alpha_s^{\{h+1\}}x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{(m+1)s-q}}{\Gamma((m+1)s-q+1)} = \\ &= \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)} + \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{2s-q}}{\Gamma(2s-q+1)} + \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{3s-q}}{\Gamma(3s-q+1)} + \dots \end{aligned}$$

При вырождении, связанном с корнями инвариантности, возможны три частных случая.

1. Когда порядки рациональные и равны $s = 1/p$, то нет сдвигового вырождения, и нет вырождения корней инвариантности (имеется один корень инвариантности $\alpha_{\frac{1}{p}}^{\{1\}} = 1$). Тогда для каждого

порядка $s = 1/p$ будет только одна, главная экспонента ($q = l = 1$)

$$\begin{aligned} \exp_{\frac{1}{p}}(x) &\equiv \exp_{\frac{1}{p}}^{\{1\}}(x) \equiv \exp_{\frac{1}{p}}^{\{1|1\}}(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{(m+1)}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right)} = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} + \frac{x^{\frac{2}{p}}}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} + \frac{x^{\frac{3}{p}}}{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)} + \frac{x^{\frac{4}{p}}}{\Gamma\left(\frac{4}{p}\right)} + \dots \end{aligned}$$

2. В случае рациональных порядков $s = r/p$ ($r > 1$) нет сдвигового вырождения, и имеется r корней инвариантности. Тогда степень вырождения экспонент в этом случае будет равна r и их можно записать в виде ряда, где $l = 1, 2, 3, \dots, r; l = h + 1$

$$\begin{aligned} \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l|l\}}(x) &\equiv \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right) \equiv \\ &\equiv \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l|h+1\}}(x) \equiv \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{nr}{p}}}{\Gamma\left(\frac{nr}{p}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{(m+1)r}{p}}}{\Gamma\left(\frac{(m+1)r}{p}\right)} = \\ &= \frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{r}{p}}}{\Gamma\left(\frac{r}{p}\right)} + \frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{2r}{p}}}{\Gamma\left(\frac{2r}{p}\right)} + \frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{3r}{p}}}{\Gamma\left(\frac{3r}{p}\right)} + \dots \end{aligned}$$

Здесь каждому значению l будет соответствовать отдельная экспонента. Все эти экспоненты можно представить в виде вектора

$$\begin{aligned} \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l|l\}}(x) &\equiv \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right) = \\ &= \left(\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|1\}}(x) \quad \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|2\}}(x) \quad \dots \quad \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|r\}}(x) \right) = \\ &= \left(\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}x\right) \quad \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{2\}}x\right) \quad \dots \quad \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{r\}}x\right) \right). \end{aligned}$$

3. Когда порядок $s = \lambda$ иррациональный, то имеется бесконечное вырождение корней инвариантности бесконечное сдвиговое вырождение и $q = 1, 2, 3, \dots; l = 1, 2, 3, \dots; l = h + 1$

$$\begin{aligned} \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) &\equiv \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) \equiv \\ &\equiv \exp_{\lambda}^{\{q|h+1\}}(x) \equiv \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{h+1\}}x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{n\lambda-q}}{\Gamma(n\lambda-q+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{(m+1)\lambda-q}}{\Gamma((m+1)\lambda-q+1)} = \\ &= \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{\lambda-q}}{\Gamma(\lambda-q+1)} + \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{2\lambda-q}}{\Gamma(2\lambda-q+1)} + \frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{3\lambda-q}}{\Gamma(3\lambda-q+1)} + \dots \end{aligned}$$

Здесь каждой паре значений q и l будет соответствовать отдельная экспонента. Все эти экспоненты можно представить в виде матрицы с бесконечным числом строк и столбцов

$$\begin{aligned} \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) &\equiv \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp_{\lambda}^{\{1|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{1|2\}}(x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{1|l\}}(x) & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{2|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{2|2\}}(x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{2|l\}}(x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{q|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{q|2\}}(x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{2\}}x) & \dots & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученные экспоненты $\exp_s^{\{q|l\}}(x)$ нецелочисленного порядка s инвариантны относительно дробного интегрирования порядка s , а относительно интегрирования, как обычно, с точностью до сложения экспонент с полиномом интегрирования $C_s(x)$

$$d^{-s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = \exp_s^{\{q|l\}}(x);$$

$$d^s x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = \exp_s^{\{q|l\}}(x) + C_s(x).$$

При сдвиговом вырождении экспоненты связаны между собой через дифференцирование и интегрирование целочисленного порядка $b \leq q + 1$. В этом случае при дифференцировании сдвиг q уменьшается на b , а при интегрировании увеличивается на b

$$d^{-b}x : \exp_s^{\{q/l\}}(x) = \exp_s^{\{q+b/l\}}(x);$$

$$d^b x : \exp_s^{\{q/l\}}(x) = \exp_s^{\{q-b/l\}}(x) + C_s(x).$$

Это легко показать

$$d^{\pm b}x : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q \pm 1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma(ns-q \pm b+1) \Gamma(ns-q+1)} x^{ns-q \pm b} + C_s(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{ns-q \pm 1}}{\Gamma(ns-q \pm b+1)} + C_s(x).$$

Отсюда следует, что соседние элементы ряда переходят друг в друга при дифференцировании и интегрировании порядка 1.

Инвариантные функции

Экспоненциальное вырождение в локальном дробном анализе приводит к возможности введения инвариантных функций, которые были рассмотрены для целочисленных порядков [1, 2].

Рассмотрим инвариантные функции нецелочисленных порядков.

Определение. Функцию, инвариантную относительно дифференцирования порядка s и инвариантную относительно интегрирования порядка s , причём интегрирование с точностью до сложения с полиномом интегрирования порядка s , будем называть *инвариантной функцией порядка s* [1, 2].

Тривиальным случаем инвариантной функции для любого вещественного порядка является нулевая функция (ноль).

Очевидно, что всё функции, пропорциональные экспонентам порядка s , являются инвариантными функциями того же порядка, которые будем называть *простыми инвариантными функциями* порядка s .

Определение. Инвариантную функцию порядка s будем называть *сложной инвариантной функцией* порядка s , если она состоит из суперпозиции более чем одной экспоненты порядка s .

Суперпозиция экспонент нецелочисленного рационального порядка $s=r/p$ будет *сложной инвариантной функцией* порядка s , которую без учёта сдвигов можно записать

$$\text{Invf}_{\frac{r}{p}} \left(a_l, \alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}; x \right) = \sum_{l=1}^r a_l \exp_{\frac{r}{p}}^{\{l/l\}} \left(\alpha_{\frac{r}{p}} x \right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{h=0}^{r-1} a_l \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}} \left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}} x \right).$$

Здесь $\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}$ – корни инвариантности порядка r/p ; a_l – произвольные коэффициенты разложения,

$$a_l, \alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}} = \text{const}; a_l, \alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}} \in \mathbb{C}; l=1,2,3,\dots,r; l \in \mathbb{N}; l=h+1.$$

Такие функции будем называть *экспоненциальными полиномами порядка r/p* .

Для частных случаев порядков $s=1/p$, когда отсутствует экспоненциальное вырождение, инвариантная функция будет простой и будет состоять из одного слагаемого

$$\text{Invf}_{\frac{1}{p}}(a; x) = a \exp_{\frac{1}{p}}(x); a \in \mathbb{C}; a = \text{const}.$$

В случае стандартного анализа, когда порядок $s=1$, инвариантные функции тоже будет состоять из одного слагаемого

$$\text{Invf}_1(a; x) = a \exp_1(x + \beta); a, \beta \in \mathbb{C}; a, \beta = \text{const}.$$

Здесь для общности добавлен сдвиг аргумента β , который тоже сохраняет инвариантность функций при интегрировании порядка 1.

В случае иррационального порядка s суперпозиция бесконечного числа экспонент порядка s будет образовывать ряд, который будем называть *рядом экспонент порядка s*

$$\text{Invf}_{\lambda}(a_{q,l}, \alpha_{\lambda}^{\{q/l\}}; x) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{q,l} \exp_{\lambda}^{\{q/l\}}(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{q,l} \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{h+1\}} x).$$

Здесь $a_{q,l}$ – произвольные коэффициенты разложения, $a_{q,l}, \alpha_{\lambda}^{\{q/l\}} = \text{const}; a_{q,l}, \alpha_{\lambda}^{\{q/l\}} \in \mathbb{C}; q, l=1,2,3,\dots,\infty; l=h+1$.

Условия инвариантности для функций $\text{Invf}_s(a, \alpha_s^{\{q/l\}}; x)$ будут

$$d^{-s}x : \text{Invf}_s(a, \alpha_s^{\{q/l\}}; x) = \text{Invf}_s(a, \alpha_s^{\{q/l+1\}}; x);$$

$$d^s x : \text{Invf}_s(a, \alpha_s^{\{q/l\}}; x) = \text{Invf}_s(a, \alpha_s^{\{q/l-1\}}; x) + C_s(x).$$

Из сказанного справедлива теорема.

Теорема. Любая линейная комбинация инвариантных функций порядка s является инвариантной функцией порядка s .

Инвариантные функции образуют *пространство инвариантных функций порядка s* , которое будем обозначать IF_s .

Определение. Размерностью пространства IF_s будем называть степень экспоненциального вырождения порядка s и обозначать $\dim \text{IF}_s$.

Размерность пространства инвариантных функций рационального порядка r/p будет r , или $\dim \text{IF}_{\frac{r}{p}} = r; r, p=1, 2, 3, \dots$

В частности, для порядков $1/p$, когда отсутствует экспоненциальное вырождение, будет $\dim \text{IF}_{\frac{1}{p}} = 1; p=1, 2, 3, \dots$

Если порядок λ – число иррациональное, то $\dim \text{IF}_{\lambda} = \infty$.

Из сказанного следует утверждение.

Теорема. Все экспоненты нецелочисленных порядков s образуют линейно независимую систему функций, которая образует линейное пространство размерности 1, когда $s=1/p$, линейное пространство размерности $r < \infty$, если $s=r/p$ и бесконечномерное линейное пространство, если порядок s является иррациональным числом.

Элементами данного линейного пространства являются инвариантные функции порядка s .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
 2. Чуриков В.А. Экспоненты в дробном анализе целочисленных порядков на основе d -оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 16–20.

3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 28.06.2012 г.

УДК 517.3

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
 В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ**

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
 E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрено дробное интегриродифференцирование биномиальных разложений в локальном дробном анализе на основе d -оператора.

Ключевые слова:

Дробный анализ, d -оператор, биномиальное разложение.

Key words:

Fractional analysis, d -operator, binomial decomposition.

В стандартном анализе справедлива формула дифференцирования степенных рядов в окрестности центра $a \in \mathbb{R}$; $a = \text{const} < \infty$

$$d^{-1}x : \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x \pm a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n (x \pm a)^{n-1}; b_n = \text{const} < \infty.$$

Эта формула часто используется в дробном анализе для дифференцирования нецелочисленных порядков, например [1].

Но при простом распространении данной формулы на случай дробных производных она уже не является справедливой. Покажем это на простом примере для второго члена разложения ряда.

Найдём производную нецелочисленного порядка s с помощью локального d -оператора [2], когда скобки не раскрываются, тогда по формуле можно записать

$$d^{-s}x : (x \pm a)^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)} (x \pm a)^{2-s}. \quad (1)$$

Здесь $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция Эйлера.

Найдём производную такого же порядка, но уже раскрыв скобки

$$\begin{aligned} d^{-s}x : (x \pm a)^2 &= d^{-s}x : (x^2 + 2ax + a^2) = \\ &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)} x^{2-s} \pm 2a \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-s+1)} x^{1-s} + \\ &+ a^2 \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(-s+1)} x^{0-s}. \end{aligned}$$

Полученные результаты не равны между собой, если $a \neq 0$. Последний полученный результат явля-

ется правильным. Из этого следует, что в дробном анализе формула дифференцирования степенных рядов (1), обобщающая формулу стандартного анализа, не применима в дробном анализе.

Поэтому имеет смысл получить для дробного анализа общие формулы интегриродифференцирования дробных порядков биномиальных разложений как для случаев с целочисленными порядками, так и с нецелочисленными порядками разложения.

Для целочисленных порядков m справедливо разложение

$$\begin{aligned} (x \pm a)^m &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n \binom{m}{n} a^n x^{m-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} x^{m-n}; \end{aligned}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}; m, n \in \mathbb{N}; m \geq n \geq 0.$$

Здесь $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, ко-

торые в общем случае вещественных коэффициентов будут

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b-a+1)}; a, b \in \mathbb{R}.$$

Когда показатель степени $q > 0, q \neq 1, 2, 3, \dots$ не является целочисленным, будет справедливо разложение в ряд, сходящийся для значений, когда выполняются условия: $-1 < x \pm a < 1; a \neq 0$

$$\begin{aligned} (x \pm a)^q &= (\pm 1)^q (a \pm x)^q = (\pm a)^q \left(1 \pm \frac{x}{a} \right)^q = \\ &= (\pm a)^q \left(1 \pm q \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{q(q-1)}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \pm \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\pm 1)^n \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!} \left(\frac{x}{a} \right)^n + \dots \right) = \\ &= (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \binom{q}{n} \left(\frac{x}{a} \right)^n = \\ &= (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(q-n+1)} \left(\frac{x}{a} \right)^n = \\ &= (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{(a)^n} \frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)} x^n. \end{aligned}$$

Коэффициент $(\pm a)^q$ распадается на множество неравных друг другу комплексных коэффициентов.

Если q рациональное число, и его можно представить в виде $q=r/p$; $r, p \in \mathbb{N}$ с условием, чтобы u и p не было общих нетривиальных делителей, тогда в комплексной плоскости эти коэффициенты будут распадаться на два множества, для случаев с положительным и с отрицательным значением a

$$\begin{aligned} (\pm a)^q &= \begin{cases} |a|^q (\exp(i\varphi_{a>0}))^q; \\ |a|^q (\exp(i\varphi_{a<0}))^q. \end{cases} = \begin{cases} |a|^{\frac{r}{p}} (\exp(i\varphi_{a>0}))^{\frac{r}{p}}; \\ |a|^{\frac{r}{p}} (\exp(i\varphi_{a<0}))^{\frac{r}{p}}. \end{cases} = \\ &= \begin{cases} |a|^{\frac{r}{p}} \left(\exp\left(i \frac{r}{p} \varphi_{a>0}\right) \right); \\ |a|^{\frac{r}{p}} \left(\exp\left(i \frac{r}{p} \varphi_{a<0}\right) \right). \end{cases} = \\ &= \begin{cases} |a|^{\frac{r}{p}} \exp\left(i 2\pi l \frac{r}{p}\right); a > 0; \\ |a|^{\frac{r}{p}} \exp\left(i\pi \frac{r}{p} + i 2\pi l \frac{r}{p}\right); a < 0. \end{cases} = \\ &= \begin{cases} |a|^{\frac{r}{p}} \left(\cos\left(2\pi l \frac{r}{p}\right) + i \sin\left(2\pi l \frac{r}{p}\right) \right); a > 0; \\ |a|^{\frac{r}{p}} \left(\cos\left(\pi \frac{r}{p} + 2\pi l \frac{r}{p}\right) + i \sin\left(\pi \frac{r}{p} + 2\pi l \frac{r}{p}\right) \right); a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Всего имеется p комплексных коэффициентов, которые задают разложение. Число $2\pi r$ будем называть *периодом коэффициентов*. Все коэффициенты будут повторяться при каждом прохождении углом φ периода коэффициентов.

В случае иррациональных порядков q число комплексных коэффициентов будет образовывать бесконечное счётное множество.

Коэффициент, соответствующий номеру $l=0$, будем называть *главным коэффициентом*.

Остальные $p-1$ комплексных коэффициентов будем называть *дополнительными коэффициентами* с соответствующими номерами l .

Если число q иррациональное, то имеется бесконечное счётное множество комплексных коэффициентов.

Ряды, у которых каждый коэффициент разложения имеет более одного значения, будем называть *многослойными рядами*. А общее число комплексных значений коэффициентов задают множество слоёв ряда.

Ряд с главным коэффициентом будем называть *главным рядом*.

Ряды с дополнительными коэффициентом будем называть *дополнительными рядами*, каждый из которых имеет свой номер, в соответствии с номером l .

Интегрирование целочисленных порядков k биномиальных разложений с целочисленными порядками m будет

$$\begin{aligned} d^{\pm k} x : (x \pm a)^m &= d^{\pm k} x : \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \binom{m}{n} x^{m-n} = \\ &= d^{\pm k} x : \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n \frac{m!}{n!(m-n)!} a^n x^{m-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m-n \pm s + 1)} x^{m-n \pm k} + C_{\alpha}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{(m-n)!}{\Gamma(m-n \pm k + 1)} x^{m-n \pm k} + C_{\alpha}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n \pm k)!} x^{m-n \pm k} + C_{\alpha}(x); \\ m, n \in \mathbb{N}; m \geq n \geq 0; \alpha &= \pm k; k \geq 0; k = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ C_{\alpha}(x) &= \begin{cases} 0; \alpha \leq 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} a_j x^j; a_j = \text{const}; \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $C_{\alpha}(x)$ – полиномы интегрирования, которые для оператора дифференцирования и для единичного оператора будут равны нулю. В случае оператора интегрирования полиномы интегрирования будут отличны от нуля.

Интегрирование нецелочисленных порядков s биномиальных разложений с целочисленными порядками показателей степени m

$$\begin{aligned} d^{\pm s} x : (x \pm a)^m &= d^{\pm s} x : \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \binom{m}{n} x^{m-n} = \\ &= d^{\pm s} x : \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} x^{m-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m-n \pm s + 1)} x^{m-n \pm s} + C_{\alpha}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{(m-n)!}{\Gamma(m-n \pm s + 1)} x^{m-n \pm s} + C_{\alpha}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n=m} (\pm 1)^n a^n \frac{m!}{n!\Gamma(m-n \pm s + 1)} x^{m-n \pm s} + C_{\alpha}(x); \\ \alpha &= \pm s; s \geq 0; s \neq 1, 2, 3, 4, \dots; \\ C_{\alpha}(x) &= \begin{cases} 0; \alpha \leq 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^{-j \pm s}; a_j = \text{const}; \alpha > 0; \alpha \neq 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Формула интегриродифференцирования целочисленных порядков k с нецелочисленными показателями q

$$\begin{aligned}
 & d^{\pm k} x : (x \pm a)^q = \\
 & = d^{\pm k} x : \left((\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{(a)^n} \frac{\Gamma(q+1)}{n! \Gamma(q-n+1)} x^n \right) = \\
 & = (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{a^n} \frac{\Gamma(q+1)}{n! \Gamma(q-n+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n \pm k + 1)} x^{n \pm k} + C_{\alpha}(x) = \\
 & = (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{a^n} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-n+1)(n \pm k)!} x^{n \pm k} + C_{\alpha}(x); \\
 & m, n \in \mathbb{N}; m \geq n \geq 0; \alpha = \pm k; k \geq 0; k = 1, 2, 3, 4, \dots; \\
 & C_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0; \alpha \leq 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{j=k-1} a_j x^j; a_j = \text{const}; \alpha > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Формула интегриродифференцирования нецелочисленных порядков s с нецелочисленными показателями q

$$\begin{aligned}
 & d^{\pm s} x : (x \pm a)^q = \\
 & = d^{\pm s} x : \left((\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{(a)^n} \frac{\Gamma(q+1)}{n! \Gamma(q-n+1)} x^n \right) =
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Чуриков В.А. Локальный d -оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для

$$\begin{aligned}
 & = (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{a^n} \frac{\Gamma(q+1)}{n! \Gamma(q-n+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n \pm s + 1)} x^{n \pm s} + C_{\alpha}(x) = \\
 & = (\pm a)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{a^n} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-n+1) \Gamma(n \pm s + 1)} x^{n \pm s} + C_{\alpha}(x); \\
 & \alpha = \pm s; s \geq 0; s \neq 1, 2, 3, 4, \dots; \\
 & C_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0; \alpha \leq 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^{-j+s}; a_j = \text{const}; \alpha > 0; \alpha \neq 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Из полученных двух последних выражений можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. При дробном интегриродифференцировании многослойного ряда биномиального разложения, имеющего p слоёв, получается ряд, который тоже имеет p слоёв.

Доказательство следует из того, что коэффициенты являются константами и в случае дробного интегриродифференцирования выносятся за знак оператора, и их число остаётся неизменным.

Из теоремы следует, что число слоёв биномиального ряда является величиной инвариантной относительно дробного интегриродифференцирования, и каждый слой является «самостоятельным» рядом.

дробного // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.

Поступила 19.03.2012 г.

УДК 530.145

МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКОЙ И НУЛЕВЫМ ДЕФЕКТОМ

А.И. Бреев

Томский политехнический университет

E-mail: breev@tpu.ru

При помощи метода орбит найдено выражение для локальной дзета-функции оператора Клейна–Гордона на статических однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом. В рамках метода обобщенной дзета-функции рассчитаны вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля.

Ключевые слова:

Поляризация вакуума, уравнение Клейна–Гордона, метод орбит, однородные пространства, дзета-функция.

Key words:

Vacuum polarizations, Clein–Gordon equation, orbits method, homogeneous spaces, zeta function.

Введение

Данная работа посвящена вычислению обобщенной дзета-функции, соответствующей уравнению Клейна–Гордона на статических однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом. Полученное выражение для обобщенной дзета-функции используется для расчета вакуумных средних тензора энергии-импульса, описывающих поляризацию вакуума скалярного поля внешним гравитационным полем. Частный случай, когда однородное пространство является группой Ли, рассмотрен в работах авторов [1, 2].

К классу однородных пространств, имеющих нулевой дефект, относятся симметрические пространства, а также четырехмерные однородные пространства с группой преобразований де Ситтера [3].

Для решения поставленной задачи применяется метод орбит коприсоединенного представления (К-орбит), позволяющий редуцировать уравнение Клейна–Гордона к более простому уравнению на лагранжевом подмногообразии к К-орбите с меньшим количеством переменных [1, 2].

1. Инвариантные метрики на однородных пространствах

Пусть G – связная односвязная вещественная группа Ли, L – алгебра Ли группы Ли G . Рассмотрим правое однородное пространство P с группой движений G . Обозначим через H замкнутую стационарную подгруппу некоторой точки $y_0 \in P$ размерности $\dim G - \dim H$. Тогда P диффеоморфно фактор-многообразию G/H и с однородным пространством P естественно сопоставляется главное расслоение группы $\tilde{G}(P, H, \pi)$, где π – каноническая проекция $\pi: G \rightarrow P$.

Над областями тривиализации $U \in P$ в расслоенном пространстве G введем координаты $x^a = (y^a, h^a)$ прямого произведения $U \times H$ ($a = 1, \dots, \dim P$, $\alpha = 1, \dots, \dim H$). При этом координаты произвольной точки $x \in G$ можно представить в виде $x = hv(y)$, где $v: P \rightarrow G$ – локальное гладкое сечение расслоения G ($\pi \circ v = 1$). В свою очередь линейное пространство алгебры Ли L допускает разложение

в прямую сумму подпространств $L = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где \mathfrak{h} – алгебра Ли группы H , \mathfrak{m} – дополнение к \mathfrak{h} .

Зафиксируем в алгебре Ли L некоторый базис $\{e_A\} = \{e_\alpha, e_a\}$, ($A = 1, \dots, \dim G$), такой что $\{e_\alpha\}$, ($\alpha = 1, \dots, \dim P$) – базис алгебры \mathfrak{h} , $\{e_a\}$, ($a = \dim P + 1, \dots, \dim G$) – базис подпространства \mathfrak{m} . Обозначим за $\{e^B\}$ соответствующий базис в сопряженном пространстве L^* : $\langle e_A, e^B \rangle = \delta_A^B$, ($A, B = 1, \dots, \dim L$).

Метрический тензор правоинвариантной метрики на группе Ли G в локальных координатах имеет вид

$$\gamma_{ij}(x) = \gamma_{AB} \sigma_i^A(x) \sigma_j^B(x),$$

$$\gamma_{AB} = \mathbf{B}(e_A, e_A), \quad i, j = 1, \dots, \dim G, \quad (1)$$

где \mathbf{B} – невырожденная квадратичная форма на алгебре Ли L , задающая метрику на группе Ли G в единице, $\sigma^A(x)$ – базисные правоинвариантные 1-формы. G -инвариантная метрика на однородном пространстве P строится по правоинвариантной метрике (1) на группе:

$$\gamma_{ab}(y) = B_{ab} \sigma_i^a(y, h) \sigma_j^b(y, h), \quad B_{ab} = \mathbf{B}(e_a, e_b), \quad (2)$$

$$B_{ab} C_{ac}^b + B_{cb} C_{aa}^b = 0,$$

$$(a, b, c = 1, \dots, \dim \mathfrak{m}; \quad \alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}), \quad (3)$$

где $C_{AB}^C = ([e_A, e_B])^C$ – структурные константы алгебры Ли L . Условие (3) эквивалентно требованию $Ad(H)$ -инвариантности формы \mathbf{B} и обеспечивает независимость определения G -инвариантной метрики от действия группы H левыми сдвигами на пространстве расслоения G .

Тензор Риччи связности Леви-Чивита, построенной по G -инвариантной метрике (2), на однородном пространстве P выражается через базисные правоинвариантные 1-формы $\sigma^a(y, h)$ на группе Ли и G : $R_{ij}(y) = R_{ab} \sigma_i^a(y, h) \sigma_j^b(y, h)$, $y \in P$, $h \in H$, где величины R_{ab} определяются компонентами формы \mathbf{B} и структурными константами алгебры Ли L :

$$R_{ab} = \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c + C_{cd}^d \Gamma_{ab}^c,$$

$$\Gamma_{bc}^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a - \frac{1}{2} B^{ad} [B_{ec} C_{bd}^e + B_{eb} C_{cd}^e].$$

Здесь $B^{ab}=(B_{ab})^{-1}$, и латинские индексы принимают значения от 1 до $\dim \mathfrak{m}$. Скалярная кривизна одно-родного пространства P постоянна и равна $R=B^{ab}R_{ab}$.

2. Гармонический анализ на группах Ли

Не имея возможности полностью изложить метод орбит коприсоединенного представления и обобщенный гармонический анализ на группах Ли, отсылаем читателя к работам [4, 5]. Ниже повторим основные понятия и определения.

Пусть группа Ли G действует на сопряженном пространстве L^* коприсоединенным представлением $Ad^*: G \times L^* \rightarrow L^*$. На дуальном пространстве L^* определена скобка Пуассона-Ли

$$\{\varphi, \psi\}^{Lie}(f) \equiv \langle f, [\nabla\varphi(f), \nabla\psi(f)] \rangle, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(L^*), f \in L^*. \quad (4)$$

В силу вырожденности скобки (4) на L^* существуют функции Казимира $K_\mu(f)$, коммутирующие со всеми функциями из $C(L^*)$ и инвариантные относительно коприсоединенного представления. Число независимых функций Казимира $\text{ind}L$ называется *индексом алгебры* L .

Коприсоединенное действие Ad^* расщепляет L^* на K -орбиты, и коалгебра L^* является объединением связанных инвариантных алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, где каждая связная поверхность является объединением K -орбит размерности $\dim L - \text{ind}L - 2s$.

Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K_\mu^{(s)}(f)$, коммутирующие с любой функцией на $M_{(s)}$, называются *функциями Казимира (s)-типа*. Через $r_{(s)}$ обозначим количество функционально независимых функций Казимира (s)-типа. Причем $\dim M_{(s)} = r_{(s)}$. K -орбита называется *орбитой s-типа*, если $O_\lambda \in M_{(s)}$, а число s – *степень вырождения орбиты*. K -орбиты с нулевой степенью вырождения называются *невырожденными*, а остальные – *сингулярными*. Через $F_\alpha^{(s)}(f)$, $(\alpha=1, \dots, \dim L - r_{(s)})$ обозначим независимый набор функций, определяющих поверхность $M_{(s)}$.

Пусть далее O_λ – K -орбита группы Ли G s-типа, содержащая ковектор λ . Введем на O_λ замкнутую невырожденную 2-форму ω_λ , действующую на касательных векторах $a, b \in T_\lambda O_\lambda$ к K -орбите следующим образом:

$$\omega_\lambda(a, b) = \langle \lambda, [X, Y] \rangle, \quad a = ad_X^* \lambda, \quad b = ad_Y^* \lambda, \quad X, Y \in L, \quad (5)$$

где $ad^*: L^* \rightarrow L^*$ – дифференциал коприсоединенного представления Ad^* . 2-форма (5) называется формой Кириллова и задает на K -орбите O_λ симплектическую структуру. Ограничение скобки Пуассона (4) на K -орбиту совпадает со скобкой Пуассона, порожденной симплектической формой ω_λ . Известно, что на симплектическом многообразии существуют канонические координаты Дарбу, в которых симплектическая форма имеет канонический вид.

Обозначим через $(p, q) \in P \times Q$ канонические координаты Дарбу на K -орбите O_λ , в которых форма Кириллова ω_λ принимает канонический вид: $\omega_\lambda = dp^a \wedge dq_a$, $a=1, \dots, \dim O_\lambda/2$.

Определим *каноническое* вложение $f: O_\lambda \rightarrow L^*$, когда ковектору $f \in L^*$ ставятся в соответствие его канонические координаты на K -орбите O_λ , содержащей ковектор f . Каноническое вложение однозначно определяется функциями $f_X(p, q, \lambda)$, $X \in L$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X, f_Y\}^{Lie} = f_{[X, Y]}, \quad f_X(0, 0, \lambda) = \lambda(X), \quad X, Y \in L. \quad (6)$$

Так как $f \in M_{(s)}$, то в случае сингулярных K -орбит каноническое вложение также должно удовлетворять условию $F_\alpha^{(s)}(f)=0$, $\alpha=1, \dots, \dim L - r_{(s)}$. Рассмотрим важный частный случай, когда каноническое вложение (6) линейно по переменным p :

$$f_X(q, p, \lambda) = \alpha_X^a(q) p_a + \chi_X(q, \lambda), \quad X \in L, \quad a=1, \dots, \dim O_\lambda/2. \quad (7)$$

Можно показать, что для существования линейного канонического вложения (7) орбиты O_λ необходимо и достаточно, чтобы функционал λ допускал *поляризацию* $\mathfrak{n} \subset L$. Напомним, что поляризацией \mathfrak{n} функционала λ называется подалгебра размерности $\dim \mathfrak{n} = \dim L - \dim O_\lambda/2$, подчиненная функционалу λ : $\langle \lambda, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \rangle = 0$.

Операторы $l_X(q, \lambda) \equiv if_X(q, -i\partial_q, \lambda)$ реализуют неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве гладких функций $L(Q, \mathfrak{n}, \lambda)$ от $\dim Q = \dim O_\lambda/2$ переменных q . Будем называть данное представление λ -представлением алгебры Ли L s-типа. Введем на многообразии Q меру $d\mu(q) = \Delta(q) d\mu_0(q)$, где $\Delta(x)$ – модуль группы Ли G , и скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_Q \overline{\psi_1(q)} \psi_2(q) d\mu(q),$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Потребуем, чтобы операторы λ -представления были косоэрмитовы относительно меры $d\mu_0(q)$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно ввести соответствующий «квантовый сдвиг»: $\lambda \rightarrow \lambda + i\beta$, где β – некоторое действительное число.

Введем поднятие λ -представления алгебры Ли L до локального представления ее группы Ли G :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} T^\lambda(\exp(tX)x) \varphi(q) \right) \Big|_{t=0} = l_X(q, \lambda) \varphi(q),$$

$$T^\lambda(x) \varphi(q) = \int_Q D_{qq'}^\lambda(x) \varphi(q') d\mu(q'), \quad \varphi \in C^\infty(Q), \quad (8)$$

где $\exp(tX)$ – однопараметрическая подгруппа вдоль вектора $X \in L$. Из условия $T^\lambda(x_1) T^\lambda(x_2) = T^\lambda(x_1 x_2)$ следует соотношение для «матричных» элементов представления $T^\lambda(x)$:

$$D_{qq'}^\lambda(x_1 x_2) = \int_Q D_{qq''}^\lambda(x_1) D_{q''q'}^\lambda(x_2) d\mu(q''). \quad (9)$$

Можно показать, что обобщенные функции $D_{qq'}^\lambda(x)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений ($X \in L$):

$$\begin{aligned} [\eta_X(x) + l_X(q, \lambda)] D_{qq'}^\lambda(x) &= 0, \\ [\xi_X(x) - \overline{l_X(q', \lambda)}] D_{qq'}^\lambda(x) &= 0, \end{aligned}$$

где $\xi_X(x)$ и $\eta_X(x)$ есть лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно. Из требования однозначной определенности функций $D_{qq}^\lambda(x)$ на группе Ли G следует условие Кириллова *целочисленности* орбиты

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma \in H_2(O_\lambda)} \omega_\lambda = n_\gamma \in Z,$$

где интеграл берется по любому двумерному циклу γ на K -орбите O_λ .

Семейство обобщенных функций $D_{qq}^\lambda(x)$ полно и ортогонально. И для каждой функции $\varphi(x)$ из плотного ядерного подпространства

$$L_{(s)} = \{ \varphi \in L_2(G, d\mu(x)) \mid F_\alpha^{(s)}(\eta_X(x))\varphi(x) = 0, X \in L \}$$

определено прямое и обратное преобразование Фурье вида:

$$(q, q', \lambda) = \Delta^{-1}(q) \int_G \overline{D_{qq}^\lambda(x^{-1})} (x) d(x), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \\ = \int_{Q \times Q \times J} \psi(q, q', \lambda) D_{qq}^\lambda(x^{-1}) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda), \quad (11) \end{aligned}$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_\mu(\eta)$, $d\mu(x)$ – правоинвариантная мера на группе Ли G . Для невырожденных орбит прямое и обратное преобразование (10), (11) определено на всем пространстве $L_2(G, d\mu(x))$.

3. Интегрирование уравнения Клейна–Гордона

Статическое пространство-время представим в виде $(m+1)$ -мерного многообразия $M=R^1 \times P^m$, где P – m -мерное правое однородное пространство с n -мерной группой движений G .

Введем на M лоренцеву метрику статического пространства-времени:

$$g_{ij} = -\gamma_{ij}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{00} = 1, \quad i, j = 1, \dots, m+1.$$

где γ_{ij} есть метрический тензор на однородном пространстве (2). Квадратичную форму \mathbf{B} считаем положительно определенной.

Уравнение Клейна–Гордона скалярного поля на M , взаимодействующего с внешним гравитационным полем, имеет вид

$$\widehat{F}\varphi(y, t) = 0, \quad \widehat{F} \equiv \partial_t^2 - \Delta_P + \xi R. \quad (12)$$

где $\xi = (m-1)/(4m)$ – конформный множитель, Δ_P – оператор Лапласа на однородном пространстве P . В пространстве решений уравнения (12) определено идефинитное скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = -i \int_P \overline{\varphi_1(y, t)} \partial_t \varphi_2(y, t) d\mu(y). \quad (13)$$

Уравнение Клейна–Гордона (16) является уравнением Эйлера относительно действия скалярного поля $S = \int L(y, t) d\mu(y) dt$ на M с лагранжианом:

$$\begin{aligned} L(y, t) = \sqrt{|g|} \left(g^{ij} \overline{\partial_i \varphi(y, t)} \partial_j \varphi(y, t) - \right. \\ \left. - (m^2 + \xi R) |\varphi(y, t)|^2 \right), \\ g = \det(g_{ij}). \quad (14) \end{aligned}$$

Построим полный базис решений $\varphi_\sigma(y, t)$ уравнения (12), нумеруемый коллективным индексом σ и удовлетворяющий условию нормировки относительно скалярного произведения (13): $(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}$.

В силу статичности пространства-времени решение будем искать в виде $\varphi(y, t) = f(t)F(y)$. Подставляя в уравнение (12) и учитывая (13), имеем

$$f_\Lambda(t) = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega t}, \quad \omega^2 = \Lambda^2 + \xi R + m^2,$$

где Λ – параметр разделения переменных. Функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна–Фока на P :

$$-\Delta_P F_\Lambda(y) = \Lambda^2 F_\Lambda(y) \quad (15)$$

и условию ортогональности

$$\int_P \overline{F_\sigma(y)} F_{\sigma'}(y) d\mu(y) = \delta(\sigma, \sigma'), \quad (16)$$

где $d\mu(y)$ – квазиинвариантная мера на однородном пространстве P .

Пространство гладких функций на однородном пространстве P изоморфно пространству F функций на группе Ли G , постоянных на правых классах смежности по подгруппе изотропии H . Функциональное подпространство F ввиду связности группы Ли H определяется выражением:

$$F \equiv \{ \varphi \in C^\infty(G) \mid \eta_X(x)\varphi(x) = 0, X \in \mathfrak{h}, x \in G \}.$$

Для инвариантной метрики $\Delta_P F(y) = H(\eta)F(y)$, где $H(\eta)$ – оператор Лапласа на группе Ли G , и уравнение (15) равносильно уравнению Клейна–Фока на группе Ли G для функций из подпространства F :

$$-H(\eta)F_\Lambda(x) = \Lambda^2 F_\Lambda(x), \quad F_\Lambda \in F. \quad (17)$$

Решение уравнения Клейна–Фока (17) на группе (в общем случае неунимодулярной) получено в работе [1] и имеет вид

$$F_\sigma(x) = \Delta^{-1/2}(q) \int_Q c_\Lambda(q', \lambda) D_{qq}^\lambda(x^{-1}) d\mu(q'). \quad (18)$$

Для того чтобы функция $F_\sigma(x)$ принадлежала F на искомого функцию $c_\Lambda(q', \lambda)$ наложим условие

$$L_\alpha(q', \lambda) c_\Lambda(q', \lambda) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}. \quad (19)$$

С учетом (19) преобразование Фурье (10), (11) определено на функциональном подпространстве $L_{(s)}(P)$ пространства $L_2(P, \delta(y))$:

$$L_{(s)}(P) = L_{(s)} \cap F = \{ \varphi \in L_2(P, d\mu(y)) \mid F^{(s)}(\tilde{X})\varphi = 0 \},$$

где \tilde{X} – генераторы группы Ли G преобразований, действующей на P . Число s_p , такое что $M_{(s_p)} \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$, но $M_{(s_p-1)} \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$, называется *степенью вырождения* однородного пространства P . В [5] показано, что на однородном пространстве имеют место тождества: $\tilde{K}_\mu^{(s_p)}(\tilde{X}) \equiv 0$, $\tilde{K}_\mu^{(s_p)}(i\tilde{X}) \equiv 0$, $\mu = 1, \dots, r_{s_p}$, где $\tilde{K}_\mu^{(s_p)}(f)$ – функции Казимира s_p -типа, такие что $\tilde{K}_\mu^{(s_p)}(f)|_{\mathfrak{h}^\perp} = 0$.

Откуда следует, что функциональное подпространство $L_{(s_p)}(P)$ совпадает со всем функциональным пространством $L_2(P, d\mu(y))$, а λ -представление алгебры L должно быть согласовано с тождествами на однородном пространстве P : $\tilde{K}_\mu^{(s_p)}(\lambda) = 0$, $\mu = 1, \dots, r_{s_p}$.

Тогда обобщенное преобразование Фурье (18) не зависит от $h \in \mathfrak{h}$ и определено на всем функциональном пространстве $L_2(P, d\mu(y))$.

Подставим (18) в уравнение Клейна–Фока (17) и получим на искомую функцию уравнение $[H(l(q',\lambda)) + \Lambda^2]c_\lambda(q',\lambda) = 0$. Для однородного пространства нулевого дефекта оператор Лапласа $H(\eta)$ относительно инвариантной метрики является оператором Казимира. При переходе в λ -представление оператор Казимира переходит в функцию, зависящую только от параметра орбиты: $H(l(q',\lambda)) = -\kappa(\lambda)$, и уравнение Клейна–Фока в λ -представлении сводится к условию на спектр $\Lambda^2(\lambda) = \kappa(\lambda)$. Тогда базис решений уравнения Клейна–Фока на однородном пространстве можно записать в виде

$$F_\sigma(y) = \Delta^{-1/2}(q) D_q^\lambda(y), \quad \sigma = (q, \lambda),$$

$$D_q^\lambda(y) = \int_Q c(q', \lambda) D_{q'q}^{\lambda-}(x^{-1}) d\mu(q'), \quad x = (y, h), \quad (20)$$

где функция $c(q', \lambda)$ с точностью до постоянного множителя определяется из системы уравнений (19). Подставив (20) в условие ортогональности (16) и воспользовавшись свойствами (8) и (9) матричных элементов λ -представления, получим условие нормировки

$$\int_Q |c(q', \lambda)|^2 d\mu(q') = \text{Vol}_H, \quad \text{Vol}_H = \int_H d\mu_R(h),$$

где $d\mu_R(h)$ – правоинвариантная мера Хаара на подгруппе изотропии H .

Таким образом, полный набор решений уравнений Клейна–Гордона имеет вид

$$\varphi_{\lambda q}(y) = (2\omega(\lambda)\Delta(q))^{-1/2} D_q^\lambda(y),$$

$$\omega^2(\lambda) = \kappa(\lambda) + \xi R + m^2.$$

4. Обобщенная ζ -функция уравнения

Клейна–Гордона

Рассмотрим обобщенную ζ -функцию оператора уравнения (12):

$$\zeta(s) = \int k_\sigma^{-s} d\mu(\sigma),$$

где k_σ – собственные значения оператора \hat{F} . Обобщенная ζ -функция $\zeta(s)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, регулярное в точке $s=0$, и может быть определена как интеграл по M от локальной ζ -функции:

$$\zeta(y, s) = \int k_\sigma^{-s} \overline{\varphi_\sigma(y, t)} \varphi_\sigma(y, t) d\mu(\sigma),$$

$$\zeta(s) = \sqrt{|g|} \int_p \zeta(y, s) d\mu(y), \quad (21)$$

где $\varphi_\sigma(y, t)$ – полный и ортогональный набор собственных функций оператора \hat{F} . В нашем случае уравнение на собственные функции оператора \hat{F} сводится к (12). Тогда $k_\lambda = \kappa(\lambda) - \omega^2(\lambda) + m^2 + \xi R$, а набор собственных функций определяется выражением

$$\varphi_\sigma(y, t) = (\sqrt{|g|}\Delta(q))^{-1/2} D_q^\lambda(y), \quad \sigma = (q, \lambda). \quad (22)$$

Подставим (22) в (21):

$$\zeta(y, s) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dj_0}{2\pi} \int \chi(\lambda) k_{\lambda j_0}^{-s} d\mu(\lambda),$$

$$\chi(\lambda) = \int_Q |D_q^\lambda(y)|^2 d\mu_0(q). \quad (23)$$

Функция $\chi(\lambda)$ не зависит от локальных координат на однородном пространстве и выражается через коэффициенты разложения $c(q, \lambda)$:

$$\chi(j) = \int_Q |c(q', \lambda)|^2 d\mu_0(q').$$

Таким образом, локальная ζ -функция (23) не зависит от локальных координат на однородном пространстве, а определяется G -инвариантной метрикой и алгеброй Ли L .

5. Перенормировка тензора энергии-импульса скалярного поля

Рассмотрим эффективное действие W скалярного поля с лагранжианом (14):

$$W = i2 \int D[\varphi] \exp(iS(\varphi)) = \frac{i}{2} \ln \det \left(\frac{i}{2\pi\mu^2} \hat{F} \right), \quad (24)$$

где μ – нормировочная константа, не зависящая от метрики и имеющая размерность массы. Вариация эффективного действия (24) по метрике дает вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля:

$$\langle \hat{T}_{ij} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta W}{\delta g_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, m+1. \quad (25)$$

Основной задачей является проведение процедуры перенормировки и получение конечных значений вакуумных средних (25), характеризующих эффект поляризации вакуума гравитационным полем. Из выражения (25) следует, что задача сводится к нахождению перенормированного эффективного действия W_{ren} . В рамках ζ -регуляризации эффективное действие выражается через обобщенную ζ -функцию оператора \hat{F} :

$$W(s) = -\frac{i}{2} [\zeta'(s) + \zeta(s) \ln(-2\pi i \mu^2)],$$

$$W_{ren} = W(s)|_{s=0}.$$

Основную трудность представляет собой вычисление функциональных производных эффективного действия W_{ren} по метрике. Воспользуемся методом, предложенным в работе [6], когда сначала вычисляются функциональные производные по g_{ij} от эффективного действия, а уже потом берется аналитическое продолжение при $s=0$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{ij} \rangle_{ren} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta W(s)}{\delta g_{ij}} \Big|_{s=0} = \\ &= -\frac{i}{2} \left[\frac{d}{ds} Z_{ij}(y, s) \Big|_{s=0} + Z_{ij}(y, 0) \ln(-2\pi i \mu^2) \right], \quad (26) \end{aligned}$$

где функция $Z_{ij}(y, s)$ представляет собой аналитическое продолжение по переменной s от вариации ζ -функции $\zeta(s)$ по метрике:

$$Z_{ij}(y, s) = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \zeta(y, s)}{\delta g^{ij}} \quad (27)$$

и в работе [6] носит название ζ -функции тензора энергии-импульса, определенного формулой (26).

Из (26) следует, что вычисление перенормированного значения тензора энергии-импульса сводится к поиску аналитического продолжения по $s=0$ производных от функции $Z_{ij}(y,s)$. Беря вариацию (27) от локальной дзета-функции, получим [6]:

$$Z_{ij}(y,s) = 2s\zeta_{ij}(y,s+1) - s\zeta(y,s)g_{ij},$$

$$\zeta_{ij}(y,s) \equiv \int k_{\sigma}^{-s} T_{ij} \{ \overline{\varphi_{\sigma}}, \varphi_{\sigma} \} d\mu(\sigma). \quad (28)$$

Так как мы рассматриваем ситуацию, когда применение метода обобщенной ζ -функции позволяет регуляризовать эффективное действие W_{ren} , то величины $\zeta(y,0)$ и $\zeta'(y,0)$ должны быть конечными:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\zeta'(y,s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\zeta(y,s) = 0. \quad (29)$$

С учетом соотношения (29) подставим (28) в (26) и после ряда вычислений получим выражение для перенормированного тензора энергии-импульса на M :

$$\langle \widehat{T}_{ij} \rangle_{ren} = -i \left(\begin{aligned} &\zeta_{ij}(y,s+1) - \frac{1}{2} g_{ij} \zeta(y,s) + \\ &+ s[\zeta'_{ij}(y,s+1) + \\ &+ \zeta_{ij}(y,s+1) \ln(-2\pi i \mu^2)] \end{aligned} \right). \quad (30)$$

Используя выражение для метрического тензора энергии-импульса скалярного поля [1, 2, 6] и учитывая, что ковариантная производная от $\zeta(y,s)$ равна нулю, найдем явное выражение для $\zeta_{ij}(y,s)$ в компонентах $\zeta_{ab}(y,s) = \zeta_{ij}(y,s) \eta_a^i(y,h) \eta_b^j(y,h)$:

$$\zeta_{ab}(y,s) = \overline{\zeta_{ab}(s)} + \frac{1}{2} g_{ab} \zeta(y,s-1) - \xi R_{ab} \zeta(y,s),$$

$$\overline{\zeta_{ab}(s)} = \int k_{\sigma}^{-s} \eta_a^i \overline{\varphi_{\sigma}} \eta_b^j \varphi_{\sigma} d\mu(\sigma).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреев А.И. Поляризация вакуума на неунимодулярных группах Ли // Известия вузов. Сер. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 4. – С. 34–40.
2. Бреев А.И., Широков И.В., Магазев А.А. Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 167. – № 1. – С. 78–95.
3. Барановский С.П., Михеев В.В., Широков И.В. К-орбиты, тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах с группами преобразований Пуанкаре и де Ситтера // Известия вузов. Сер. Физика. – 2000. – Т. 47. – № 11. – С. 72–78.
4. Широков И.В. Координаты Дарбу на К-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.
5. Широков И.В. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений: Препринт. – Омск: ОмГУ, 1998. – 100 с.
6. Moretti V. Direct ζ -function approach and renormalization of one-loop stress tensors in curved spacetimes // Phys. Rev. D. – 1997. – V. 56. – № 12. – P. 7797–7818.

Поступила 07.06.2012 г.

Переходя в λ -представление для $\overline{\zeta_{ab}(s)}$ имеем:

$$\overline{\zeta_{ab}(s)} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{|g|}} \int_{-\infty}^{\infty} dj_0 \times$$

$$\times \int k_{j_0}^{-s} \overline{c(q',j)} \{ l_a(q',j), l_b(q',j) \}_+ c(q',j) d\mu(q) d\mu(j).$$

Подставляя выражение для $\zeta_{ij}(y,s)$ в (30) и переходя к компонентам $\widehat{T}_{ab} = \widehat{T}_{ij} \eta_a^i(y,h) \eta_b^j(y,h)$ окончательно получим

$$\langle \widehat{T}_{ab} \rangle_{ren} =$$

$$= -i \left(\begin{aligned} &\overline{\zeta_{ab}(y,s+1)} - \xi R_{ab} \zeta(y,s) + \\ &+ s[\zeta'_{ab}(y,s+1) + \zeta_{ab}(y,s+1) \ln(-2\pi i \mu^2)] \end{aligned} \right)_{s=0}.$$

Данное выражение для компонент перенормированного тензора энергии-импульса скалярного поля не зависит от выбора локальных координат и определяется алгебраическими характеристиками однородного пространства.

Выводы

При помощи метода орбит рассчитаны вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля и обобщенная дзета-функция, соответствующая уравнению Клейна–Гордона на однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом.

Обобщение полученных результатов на случай однородных пространств ненулевого дефекта требует учета алгебры инвариантных операторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракты П691; П789 и госзадание «Наука» контракт № 1.604.2011.

УДК 621.313: 519.688

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ RL -ЦЕПЕЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РЕЖИМЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

Т.Е. Хохлова, А.С. Глазырин, В.И. Полищук

Томский политехнический университет
E-mail: xoxlova@tpu.ru, polischukvi@tpu.ru

Предложен алгоритм параметрической идентификации RL -цепей электромеханических систем в режиме функционирования, в котором за счет синхронизации начальных условий не требуется прерывания нормальной работы системы. Алгоритм основан на методе покоординатного спуска и позволяет получить оценки параметров модели объекта, так чтобы невязка выходных сигналов была минимальной. Проведены исследования работы алгоритма на лабораторной установке.

Ключевые слова:

Параметрическая модель, динамический объект, итерационный процесс, нелинейные уравнения, невязка выходных сигналов.

Key words:

Parametric model, dynamic object, iteration process, nonlinear equations, mismatch of the output signals.

Введение

В электроэнергетике при решении проблем, связанных с управлением и диагностикой электромеханических систем, большое внимание уделяется вопросам моделирования и параметрической идентификации отдельных объектов систем. Параметрическая идентификация позволяет получить параметры моделей объектов при условии, что уравнения моделей заранее известны и задаются с помощью структурной схемы объекта. В настоящее время широко известны классические методы идентификации: метод наименьших квадратов, максимального правдоподобия, метод стохастической аппроксимации и др., которые при решении практических задач оказываются часто неустойчивыми, неработоспособными, а так же сопряжены с большими вычислительными затратами при идентификации в режиме функционирования объекта [1–4]. Одним из подходов к решению задач параметрической идентификации является использование поисковых методов оптимизации [4–6].

Цель работы – изложение результатов исследования алгоритма оценивания параметров RL -цепей как объектов электромеханической системы методом покоординатного спуска.

Постановка задачи

На основе детерминированного объекта – RL -цепи, структурная схема которого представлена на рис. 1, разработать алгоритм, который позволит настраивать параметры модели объекта так, чтобы невязка выходных сигналов была минимальной. Экспериментальную проверку результатов выполнить на лабораторной установке.

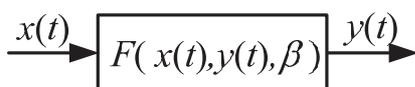


Рис. 1. Структурная схема объекта: F – некоторая функция, определяемая входным сигналом – $x(t)$ напряжения, выходным сигналом – $y(t)$ тока, вектором параметров – $\beta=(R;L)$

Алгоритм настройки параметров модели

Исследуем объект с заданными параметрами, описанный дифференциальным уравнением, составленным на основании его свойств и совместимым с законами, определяющими его поведение. Следовательно, построить параметрическую модель объекта не вызывает затруднений.

Параметры модели настраиваем по следующему алгоритму:

Шаг 1: Определяем выходную величину объекта $y(t)$ при воздействии входным сигналом $x(t)$.

Шаг 2: Определяем шаг для участков синхронизации ΔT .

Шаг 3: Устанавливаем начальный момент времени t_0 .

Шаг 4: Устанавливаем начальные условия параметров модели $\hat{\beta}^{(0)}$ (произвольные значения).

Шаг 5: Синхронизация – устанавливаем начальные условия выходной величины модели, равной выходной величине объекта в заданный момент времени, определенный как начальный $\hat{y}(t_0)=y(t_0)$.

Шаг 6: Определяем выходную величину модели $\hat{y}(t_0)$ при воздействии входным сигналом $x(t)$.

Шаг 7: Определяем величину невязки $\Delta\beta$ выходных сигналов модели и объекта.

Шаг 8: Настраиваем параметры модели $\hat{\beta}$ для обеспечения минимума функционала невязки J .

Шаги 3–8 повторяем для всех участков синхронизации.

В работах [7, 8] предложено и обосновано проводить синхронизацию начальных условий выходной величины модели динамических объектов с шагом, равным четверти периода входного сигнала, что обеспечивает требуемое соотношение между точностью и быстродействием системы идентификации.

Определение выходного сигнала модели сводится к решению дифференциальных уравнений известными методами: Эйлера, Рунге–Кутта и др.

Величину невязки выходных сигналов модели и объекта, которая определяет качество идентификации, находим с помощью функционала [4]:

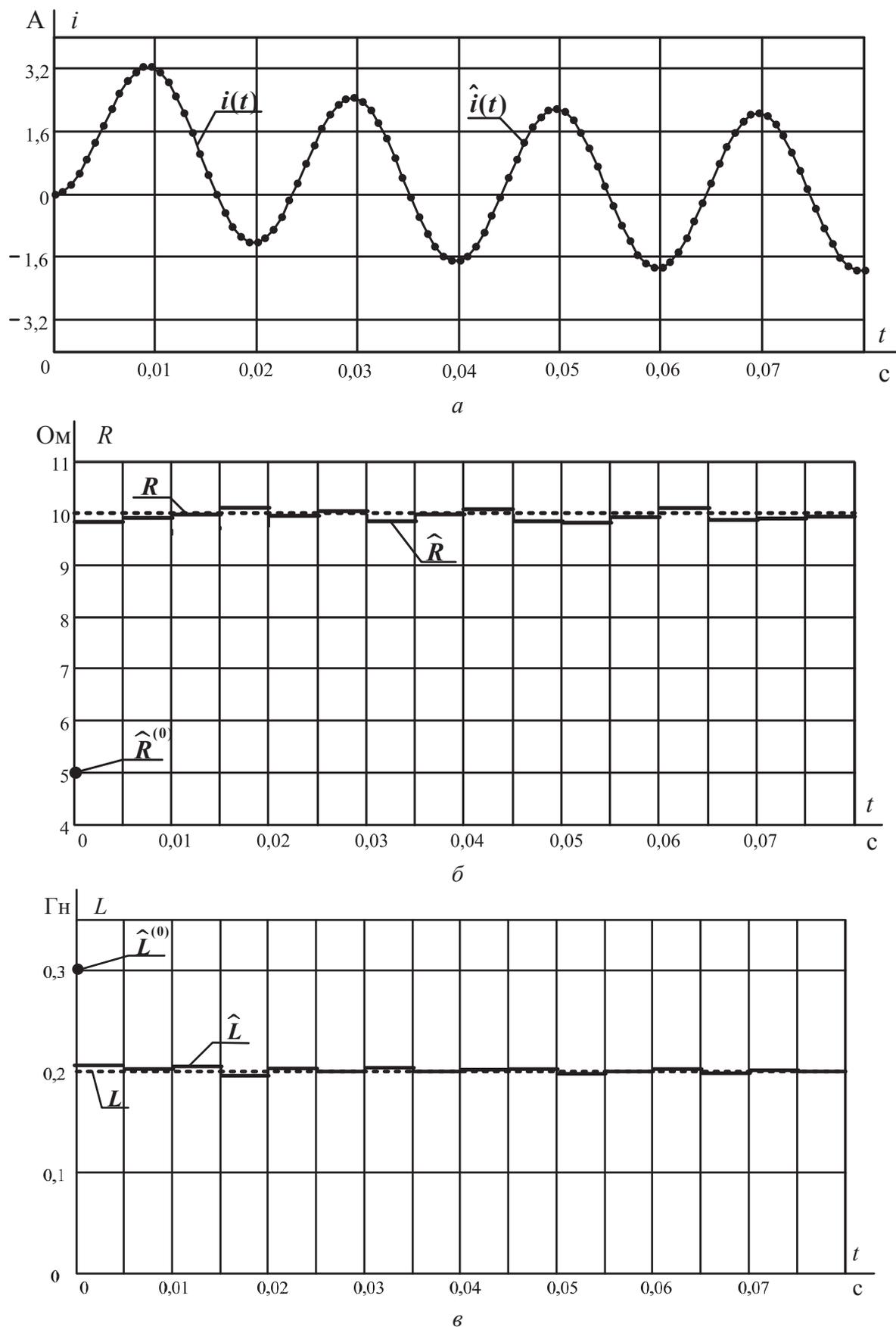


Рис. 2. Результаты работы алгоритма настройки параметров RL-цепи: а) выходные величины; б) параметр R; в) параметр L

$$J = \int_0^t [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt \text{ или } J = \sum_i (y(t_i) - \hat{y}(t_i))^2.$$

Настройку модели осуществляем как движение по гиперповерхности $J=J(\hat{\beta})$ в пространстве параметров модели $\hat{\beta}=(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ и проводим поисковым методом оптимизации – методом покоординатного спуска. Траектория движения в каждой точке ортогональна по линиям уровня $J(\hat{\beta})=\text{const}$. Метод, использующий соотношение [5], основан на итерационной процедуре приближения вектора параметров модели для обеспечения минимизации функционала J :

$$\hat{\beta}^{(k+1)} = \hat{\beta}^{(k)} + g^{(k)} \cdot S^{(k)},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации; вектор направления спуска $S^{(k)}$ – это единичный вектор, совпадающий с каким-либо координатным направлением (например, если направлен по параметру $\hat{\beta}_1$, то $S^{(k)}=(1, 0, 0, \dots)$, если по $\hat{\beta}_2$, то $S^{(k)}=(0, 1, 0, \dots)$ и т. д.); величину $g^{(k)}$ выбираем таким образом, чтобы величина функционала в выбранном направлении не переставала убывать [5].

Траекторию движения к минимуму функционала проводим в виде спуска по каждому параметру вектора $\hat{\beta}$. Задаем начальные значения параметров модели $\hat{\beta}^{(k)}$. Осуществляем спуск по первому параметру, фиксируя значения других, и решаем задачу минимизации функционала для этого параметра [5, 6]:

$$J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}) = \min_{\hat{\beta}_1} J(\hat{\beta}_1^{(0)}, \hat{\beta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}).$$

Осуществляем спуск по второму параметру, фиксируя значения других, и решаем задачу минимизации функционала для этого параметра:

$$J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}) = \min_{\hat{\beta}_2} J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}).$$

Аналогично осуществляем спуск по остальным параметрам.

В результате этого процесса имеем последовательность векторов параметров

$$(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}), (\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}), \dots, (\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k+1)}),$$

в которых значения функционала составляют монотонную убывающую последовательность

$$J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}) \geq J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)}) \geq \dots \geq J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k+1)})$$

и очередное приближение вектора параметров модели $\hat{\beta}^{(k+1)}$ к точке минимума функционала. Условием выбора вектора параметров служит неравенство:

$$|J(\hat{\beta}_1^{(k+1)}, \hat{\beta}_2^{(k+1)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k+1)}) - J(\hat{\beta}_1^{(k)}, \hat{\beta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(k)})| < \varepsilon.$$

Итерационный процесс сходится, если функционал J является гладкой функцией и начальное приближение вектора параметров модели выбрано так, чтобы выполнялось неравенство [5]:

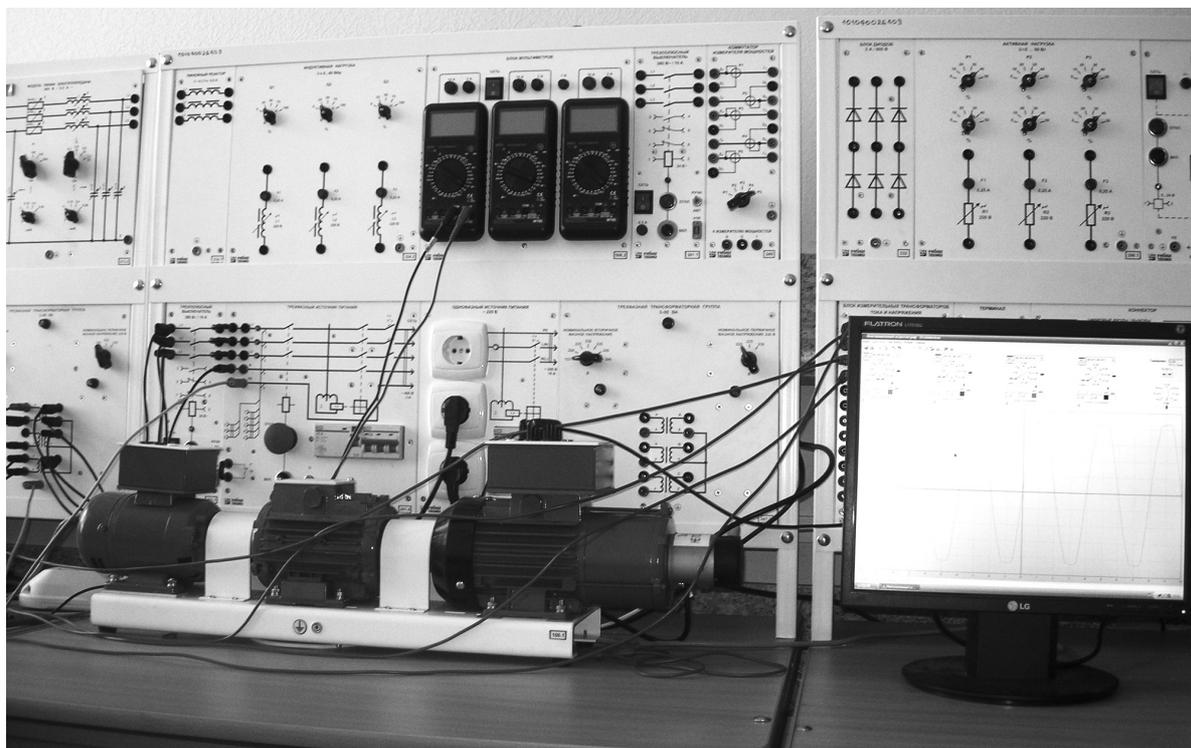


Рис. 3. Лабораторная установка

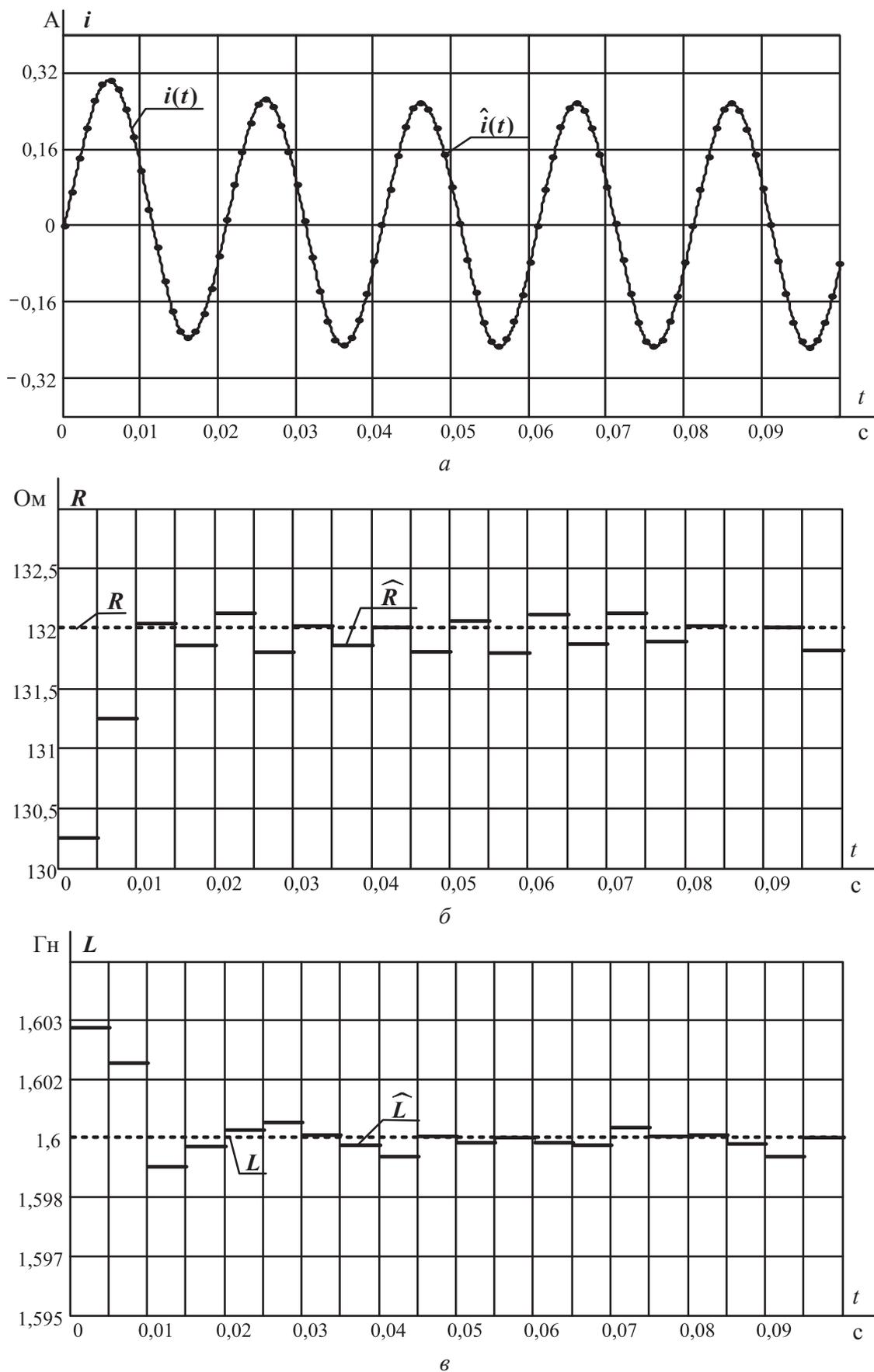


Рис. 4. Исследование RL-цепи лабораторной установки: а) выходные величины; б) параметр R; в) параметр L

$$J(\hat{\beta}^{(k)}) \leq J(\hat{\beta}^{(0)}).$$

Достоинством метода является его простота, невысокие требования к памяти и сходимость с любыми начальными приближениями при гладких минимизируемых функциях. Этот метод применяется в тех случаях, когда вычисление производных функций требует большого объема работы. Основной недостаток – медленная сходимость [6].

Апробация алгоритма

Проверка работы алгоритма настройки параметров модели RL -цепи электромеханической системы производилась на примере последовательного соединения резистора и катушки индуктивности. На вход объекта подавали синусоидальное напряжение $u(t)$, на выходе снимали ток $i(t)$.

Модель объекта – дифференциальное уравнение первого порядка, которое составлено по второму закону Кирхгофа и описывает протекающие процессы [9]:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u(t) - \frac{R}{L} \cdot i(t). \quad (1)$$

Значениями вектора параметров модели $\hat{\beta}$ являются величины резистора R и индуктивности L . Размерности всех величин в единицах системы Си.

Для определения выходной величины модели – тока $i(t)$, было решено дифференциальное уравнение (1) методом Рунге–Кутты четвертого порядка, основанным на разложении искомого решения в ряд Тейлора, учитывающего члены, содержащие степени шага h до четвертой степени включительно. Погрешность данного алгоритма пропорциональна h^4 . Естественно, уменьшение шага приводит к увеличению точности. Однако с ростом числа шагов погрешность может увеличиваться за счет погрешности округления [9].

Для исследования работы предложенного алгоритма имитировали работу RL -цепи с помощью математической программы MathCad для 10 различных параметров модели цепи $\beta=(R; L)$ и вектора начальных значений $\hat{\beta}^{(0)}=(\hat{R}^{(0)}, \hat{L}^{(0)})$. На рис. 2 представлены результаты исследования для $\beta=(10; 0,2)$, $\hat{\beta}^{(0)}=(5; 0,3)$ и с шагом синхронизации начальных условий выходной величины, согласно рекомендациям [7, 8] $\Delta T=0,005$ с.

Средние значения вектора параметров модели составили $\hat{\beta}=(10,00042; 0,20001)$ и совпали со значениями вектора параметров цепи. Величина функционала при средних значениях параметров модели составила $J=0,0000195$.

С помощью компьютеризированной лабораторной установки (рис. 3), предназначенной для исследования динамических режимов электрических цепей с реактивными элементами и электрических двигателей, расположенной в лаборатории Энергетического института ТПУ, провели серию экспериментов.

На рис. 4 представлены результаты настройки параметров RL -цепи, собранной на лабораторной

установке. Вектор параметров цепи $\beta=(132; 1,6)$, вектор параметров начальных значений модели $\hat{\beta}^{(0)}=(13,2; 0,16)$, шаг синхронизации начальных условий выходной величины $\Delta T=0,005$ с.

Средние значения вектора параметров модели $\hat{\beta}=(132,01424; 1,60002)$. Величина невязки выходных сигналов при средних значениях параметров модели и объекта составила $J=0,00021$.

На рис. 5 представлены результаты исследования алгоритма настройки параметров RL -цепи при различных начальных значениях вектора параметров модели.

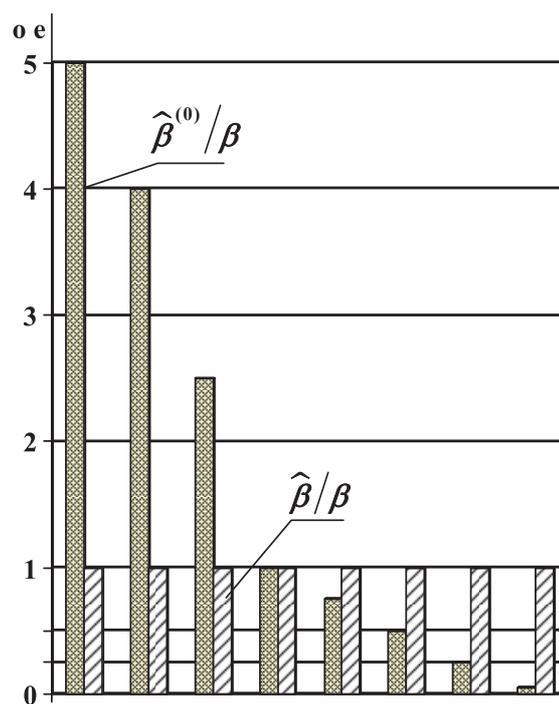


Рис. 5. Отношение вектора параметров модели и объекта

Анализ результатов работы алгоритма

Экспериментальная проверка (15 опытов) работы алгоритма позволила получить:

- средние параметры модели RL -цепи с невязкой выходных сигналов на уровне менее 1 %;
- на отдельных участках синхронизации найденные величины не отклоняются от истинных значений более чем на 5 %;
- синхронизация начальных условий выходных величин позволила получить средние параметры модели, которые не отклоняются от истинных значений более чем на 2 %;
- как показано на рис. 5, работа алгоритма не зависит от выбора начальных значений вектора параметров модели.

Выводы

1. Предложен и апробирован на лабораторной установке алгоритм настройки параметров модели RL -цепи электромеханической системы,

- который позволил получить оценки параметров объекта с невязкой выходных сигналов на уровне менее 1 %.
- Доказано, что работа предложенного алгоритма не зависит от выбора вектора начальных параметров модели. Это позволяет использовать его для идентификации RL -цепей с неизвестными параметрами.
 - Синхронизация начальных условий выходных величин позволила получить средние параметры модели, которые не отклоняются от истинных значений более чем на 2 %, следовательно, предложенный алгоритм может быть использован для параметрической идентификации RL -цепей в системах управления и функциональной диагностики электромеханического оборудования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Luenberger D.G. Introduction to dynamic systems. – N.Y: Wiley, 1979. – 446 p.
- Власов К.П. Теория автоматического управления. – Харьков: Изд-во «Гуманитарный центр», 2007. – 526 с.
- Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 136 с.
- Дилигенская А.С. Идентификация объектов управления. – Самара: Самар. гос. Техн. ун-т, 2009. – 136 с.
- Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений. – СПб.: Лань, 2001. – 384 с.
- Методы оптимизации в примерах и задачах / под ред. А.В. Пантелеева, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
- Glazyrin A.S., Bolovin E.V. Time delay adjustment for the method of parameter identification of dynamic object // Aktualne problemy nowczesnych nauk–2012: Materiały VIII Międzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji. – Przemysl. Nauka i studia, 2012. – Т. 45. – С. 79–81.
- Боловин Е.В., Глазырин А.С. Способы повышения обусловленности матриц при решении систем разностных уравнений в задачах идентификации параметров динамических объектов // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 51–55.
- Зевеке Г.В., Ионкин П.А. Основы теории цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

Поступила 24.12.2012 г.

УДК 621.391

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЖОНСОНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

И.Г. Карпов, Ю.Т. Зырянов, А.Н. Грибков

Тамбовский государственный технический университет
E-mail: gribkovalexey@yandex.ru

Предложены модифицированные распределения Джонсона для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих только положительные значения. Разработана методика оценки параметров модифицированных распределений Джонсона по экспериментальным данным.

Ключевые слова:

Модифицированные распределения Джонсона, аппроксимация законов распределения, плотность распределения вероятностей.

Key words:

Johnson's modified distributions, approximation of distribution laws, density of probabilities distribution.

Как известно, форму большинства непрерывных плотностей распределения вероятностей (ПРВ) можно достаточно подробно описать, используя четыре первых момента. Во многих случаях если провести аппроксимацию результатов измерений распределением, имеющим те же четыре момента, что и гистограмма, построенная по экспериментальным данным, то погрешность аппроксимации будет сравнительно небольшой. В настоящее время для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих как положительные, так и отрицательные значения, часто применяются распределения Джонсона и Пирсона [1–4]. Основным достоин-

ством распределений Джонсона по сравнению с другими ПРВ является то, что на их основе можно получать многомерные распределения [5, 6].

Распределения Н. Джонсона состоят из трех семейств распределений, получаемых путем различных нелинейных преобразований гауссовской нормированной плотности распределения вероятностей. При этом Джонсон использовал три типа функций $h(y, \mu, \lambda)$ [2–4]:

$$h_1(y; \mu, \lambda) = \ln[(y - \mu) / \lambda], \quad y \geq \mu, \quad (1)$$

$$h_2(y; \mu, \lambda) = \ln[(y - \mu)(\lambda + \mu - y)], \quad \mu \leq y \leq \mu + \lambda, \quad (2)$$

$$h_3(y; \mu, \lambda) = \text{Arsh}[(y - \mu) / \lambda], \quad -\infty < y < \infty. \quad (3)$$

Этим функциям соответствуют три семейства распределений Джонсона, параметры которых определяются с использованием положительных степенных моментов (математическое ожидание m_1 и центральные моменты M_2, M_3, M_4) по методикам, изложенным в целом ряде работ, например в [1–4]. При этом в работах [1–3] рассматривается оценка параметров распределений Джонсона с использованием методов моментов и квантилей, а в работе [4] рассматривается также метод максимального правдоподобия.

Наибольшая погрешность аппроксимации законов распределения экспериментальных данных распределениями Джонсона возникает на их хвостах [2, 6, 7]. Поэтому в [7] описаны три нелинейных преобразования логистического нормированного распределения, подобные функциям (1)–(3).

Цель данной работы – рассмотреть возможность аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих только положительные значения, с использованием распределений, полученных на основе модификации распределений Джонсона [6].

1. Модифицированные распределения Джонсона и их топографическая классификация

При решении задачи аппроксимации закона распределения экспериментальных данных, принимающих только положительные значения, необходимо принимать во внимание два важных обстоятельства:

- 1) истинный закон распределения случайной величины очень часто имеет асимметричную форму;
- 2) у него могут отсутствовать положительные степенные моменты.

Поэтому при оценке параметров экспериментального закона распределения целесообразно вместо степенных моментов использовать логарифмические моменты (математическое ожидание l_1 и центральные моменты L_2, L_3, L_4), а вместо распределений Джонсона предлагается использовать распределения (назовем их модифицированными распределениями Джонсона), соответствующие пяти типам функций $H(y)$ [6]:

$$H_1(y; \chi) = \ln[\ln(\chi/y)], \quad 0 < y < \chi; \quad (4)$$

$$H_2(y; \chi) = \ln[\ln(y/\chi)], \quad \chi < y < \infty; \quad (5)$$

$$H_3(y; \chi) = \ln(y/\chi), \quad 0 < y < \infty; \quad (6)$$

$$H_4(y; c, \chi) = \ln \left[\frac{\ln(y/c\chi)}{\ln(\chi/y)} \right], \quad c\chi < y < \chi; \quad (7)$$

$$H_5(y; c, \chi) = \text{Arsh}[c \ln(y/\chi)], \quad 0 < y < \infty. \quad (8)$$

Параметр сдвига μ в функциях (4)–(8) полагаем равным нулю, так как он косвенным образом учитывается областью существования соответствующего одностороннего закона распределения.

С учетом выражений (4)–(8) для функций $H(y)$ модифицированные распределения Джонсона будут определяться соотношениями:

$$p(y) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi} \ln(\chi/y) z} \times \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln \left(\ln \left(\frac{\chi}{y} \right) \right) - m \right]^2 \right\}, \quad 0 < y < \chi; \quad (9)$$

$$p(y) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi} \ln(y/\chi) y} \times \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln \left(\ln \left(\frac{y}{\chi} \right) \right) - m \right]^2 \right\}, \quad \chi < y < \infty; \quad (10)$$

$$p(y) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi} y} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln \left(\frac{y}{\chi} \right) \right]^2 \right\}, \quad 0 < y < \infty; \quad (11)$$

$$p(y) = \frac{\ln(1/c)\gamma}{\sqrt{2\pi} y \ln(y/c\chi) \ln(\chi/y)} \times \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln \left(\frac{\ln(y/c\chi)}{\ln(\chi/y)} \right) - m \right]^2 \right\}, \quad c\chi < z < \chi; \quad (12)$$

$$p(y) = \frac{c\gamma \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} [\text{Arsh}(c \ln(y/\chi)) - m]^2 \right\}}{\sqrt{2\pi} (1 + (c \ln(y/\chi))^2) z}, \quad (13)$$

$$0 < y < \infty,$$

где $\gamma > 0, -\infty < m < \infty, c > 0$ – параметры формы (для ПРВ (12) параметр $c < 1$); $\chi > 0$ – параметр масштаба.

Кривые, соответствующие указанным распределениям, имеют весьма разнообразную форму: унимодальную, J -образную, U -образную либо бимодальную. Их топографическую классификацию удобно производить с помощью диаграммы в плоскости переменных η_a и η_{12} , приведенной на рисунке. Коэффициент асимметрии η_a , коэффициент эксцесса η_3 , нормированный совместный коэффициент асимметрии и эксцесса η_{12} для этих ПРВ в общем случае определяются выражениями

$$\eta_a = \frac{L_3}{L_2^{1.5}}, \quad \eta_3 = \frac{L_4}{L_2} - 3, \quad \eta_{12} = \frac{1.5\eta_a^2 + 6}{\eta_3 + 6}, \quad (14)$$

где $0 \leq \eta_{12} \leq 1.5$. Верхней границе области возможных значений коэффициента η_{12} соответствуют распределения в виде совокупности двух дельта-функций, а нижней границе – распределения, имеющие менее четырех моментов.

Кривые 2а и 2б характеризуют собой соответственно области существования распределений (9) и (10). Коэффициенты асимметрии η_a для ПРВ (9) и (10) определяются соответственно выражениями

$$\eta_a = -[\exp(1/\gamma^2) + 2] \sqrt{\exp(1/\gamma^2) - 1};$$

$$\eta_a = [\exp(1/\gamma^2) + 2] \sqrt{\exp(1/\gamma^2) - 1}.$$

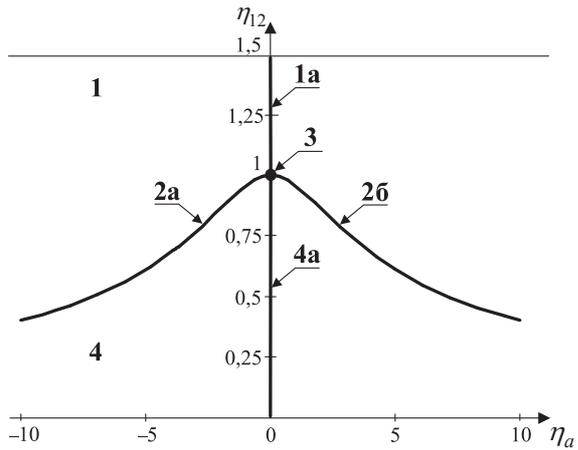


Рисунок. Диаграмма модифицированных распределений Джонсона

Нормированный совместный коэффициент асимметрии и эксцесса η_{12} для ПРВ (9), (10) определяется соотношением

$$\eta_{12} = \frac{1,5 \exp(1/\gamma^2) + 4,5}{\exp(2/\gamma^2) + 2 \exp(1/\gamma^2) + 3}.$$

Введем вспомогательный коэффициент η_{22} :

$$\eta_{22} = \eta_{12} \frac{[f(\eta_a) + 1]^2 + 2}{1,5 f(\eta_a) + 4,5},$$

$$f(\eta_a) = \left(\sqrt{1 + \frac{\eta_a^2}{4}} + \frac{\eta_a}{2} \right)^{2/3} + \left(\sqrt{1 + \frac{\eta_a^2}{4}} - \frac{\eta_a}{2} \right)^{2/3} - 1. \quad (15)$$

Для ПРВ (9) и (10) вспомогательный коэффициент $\eta_{22}=1$.

Выше линий 2а и 2б находится область существования распределения (12), при этом вспомогательный коэффициент $\eta_{22}>0$. Для ПРВ (12) при $m>0$ выполняется неравенство $\eta_a<0$, при $m<0$ – неравенство $\eta_a>0$, а при $m=0$ – неравенство $\eta_a=0$. Отрезок прямой 1а характеризует собой область существования частного случая ПРВ (12) при $m=0$.

Точка 3 характеризует собой область существования логнормального распределения (11). Для него $\eta_a=0$, $\eta_{12}=1$ и $\eta_{22}=1$. Ниже линий 2а и 2б находится область существования распределения (13). При этом вспомогательный коэффициент $\eta_{22}<0$. Распределение (13) при $m>0$ имеет коэффициент $\eta_a>0$, при $m<0$ – $\eta_a<0$, а при $m=0$ – $\eta_a=0$. Отрезку прямой 4а соответствует область существования частного случая ПРВ (13) при $m=0$.

2. Анализ возможностей модифицированных распределений Джонсона по аппроксимации теоретических законов распределения

Рассмотрим возможности распределений (9) и (10) по аппроксимации известных теоретических законов распределения, в первую очередь обобщенного гамма-распределения [6]:

$$p(x) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\alpha c - 1}}{\beta^{\alpha c}} \exp\left(-\frac{x^c}{\beta^c}\right), \quad 0 < x < \infty, \quad (16)$$

где $\alpha>0$, $c>0$ – параметры формы; $\beta>0$ – параметр масштаба.

Частными случаями ПРВ (16) являются: распределение Релея при $\alpha=0$, $\beta=\sqrt{2}\sigma$ и $c=2$; гамма-распределение при $c=1$; распределение хи-квадрат при $\alpha=0,5n$, $c=1$ и $\beta=2$; распределение Накагами при $\alpha=m$, $\beta=\sqrt{\Omega/m}$ и $c=2$; распределение Вейбулла при $\alpha=1$ и $\beta^c=\lambda$.

Аппроксимация ПРВ (16) выражением (9) осуществлялась с помощью логарифмических моментов, которые для ПРВ (9) равны:

$$\begin{aligned} l_1 &= \ln(\chi) - \exp(m + 1/2 \gamma^2), \\ L_2 &= \exp(2m + \gamma^{-2})[\exp(\gamma^{-2}) - 1], \\ L_3 &= -\exp(3m + 3/2 \gamma^2) \times \\ &\times [\exp(\gamma^{-2}) - 1]^2 [\exp(\gamma^{-2}) + 2]. \end{aligned}$$

Для ПРВ (16) эти моменты определяются соотношениями [6]:

$$l_1 = \ln(\beta) + \frac{\psi(\alpha)}{c}, \quad L_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}, \quad L_3 = \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \psi(\alpha)}{\partial \alpha^2},$$

где $\psi(\alpha)$ – пси-функция [8].

Было установлено, что параметры ПРВ (9) связаны с параметрами ПРВ (16) соотношениями [6]:

$$\gamma^{-2} = \ln \left[\left(\sqrt{1 + \frac{\eta_a^2}{4}} + \frac{\eta_a}{2} \right)^{2/3} + \left(\sqrt{1 + \frac{\eta_a^2}{4}} - \frac{\eta_a}{2} \right)^{2/3} - 1 \right], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} m &= \ln(\delta) - 1/2 \gamma^2 = m_0 - \ln(c), \\ \chi &= \exp(l_1 + \delta) = \beta \exp(\chi_0/c), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\delta = \sqrt{L_2 / (\exp(\gamma^{-2}) - 1)}.$$

При этом с помощью вспомогательных параметров m_0 и χ_0 , зависящих (как и параметр γ) только от параметра α , целесообразно ПРВ (9) преобразовать к виду

$$\begin{aligned} p_a(x) &= \\ &= \frac{c \gamma \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln \left(\chi_0 - c \ln \left(\frac{x}{\beta} \right) \right) - m_0 \right]^2 \right\}}{\sqrt{2\pi} x \left(\chi_0 - c \ln \left(\frac{x}{\beta} \right) \right)}, \\ &0 < x < \chi. \end{aligned} \quad (19)$$

ПРВ (19) отражает зависимость от параметров c и β аналогично ПРВ (16). Изменение в (16) параметра α в ПРВ (19) приводит к изменению параметров m_0 , χ_0 и γ . Как следует из (18), параметр масштаба χ зависит от всех трех параметров ПРВ (16). Если в ПРВ (16) параметр $\alpha=1$ (распределение Вейбулла), то $m_0=1,2$, $\chi_0=2,95$, $\gamma^2=8,13$. При этом ПРВ (19) принимает вид

$$p_a(x) = \sqrt{\frac{4,065}{\pi}} \times \frac{\exp\left\{-4,065 \left[\ln\left(2,95 - c \ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\right) - 1,2 \right]^2\right\}}{x \left(2,95 - c \ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\right)},$$

$$0 < x < \chi,$$

где $\chi = \beta \exp(2,95/c)$. Если к тому же параметр $c=2$ (закон Рэлея), то

$$p_a(x) = \sqrt{\frac{16,26}{\pi}} \times \frac{\exp\left\{-4,065 \left[\ln\left(2,95 - 2 \ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\right) - 1,2 \right]^2\right\}}{x \left(2,95 - 2 \ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\right)},$$

$$0 < x < \chi,$$

где $\chi = \beta \exp(1,475)$.

В качестве критерия оценки точности аппроксимации использовался модуль разности расстояний между истинной и аппроксимирующей ПРВ, измеряемый в процентах и определяемый с помощью выражения [6]:

$$\Delta = 50 \int_0^{\infty} |p(x) - p_a(x)| dx, \quad \% \quad (20)$$

Достоинством критерия (20) является то, что он при значениях $\Delta < 5,0$ % гарантирует приемлемую точность аппроксимации истинной ПРВ во всей области ее протяженности.

Оценка погрешности аппроксимации обобщенного гамма-распределения (16) с помощью ПРВ (9) по критерию (20) показала, что она зависит только от значений параметра α . Ошибка аппроксимации Δ возрастает при $\alpha \rightarrow 0$. Например, если $\alpha=10$, то $\Delta < 0,13$ %; если $\alpha=1$, то $\Delta < 0,64$ %; если $\alpha=0,25$, то $\Delta < 5,0$ %.

Рассмотрим теперь возможности ПРВ (9) по аппроксимации К-распределения [6]:

$$p(x) = \frac{4x^\nu}{\Gamma(\nu)\beta^{\nu+1}} K_{\nu-1}\left(\frac{2x}{\beta}\right), \quad 0 < x < \infty, \quad (21)$$

где $\nu > 0$ – параметр формы; $\beta > 0$ – параметр масштаба; $K_\nu(z)$ – функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода).

Логарифмические моменты для ПРВ (21) имеют следующий вид:

$$l_1 = \frac{1}{2}(\psi(\nu) - 0,577) + \ln(\beta),$$

$$L_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{d\nu} \psi(\nu) + 1,645 \right),$$

$$L_3 = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2}{d\nu^2} \psi(\nu) - 2,404 \right).$$

Было установлено, что параметры ПРВ (9) связаны с параметрами ПРВ (21) по-прежнему соотношениями (17) и (18), где

$$m_0 = \ln(c\delta) - 1/2\gamma^2; \quad \chi_0 = c\delta + \psi(\nu) - 0,577; \quad c = 2;$$

$$\delta = \sqrt{L_2 / (\exp(\gamma^2) - 1)}.$$

Оценка погрешности аппроксимации ПРВ (21) по критерию (20) показала, что она имеет максимальное значение 1,29 % при $\nu=5$, а при других значениях параметра ν уменьшается. Так, если $\nu=20$, то $\Delta < 1,0$ %; если $\nu=1$, то $\Delta < 0,35$ %.

Необходимо отметить, что ПРВ (9) можно применять для аппроксимации теоретических законов распределения, когда коэффициент асимметрии $\eta_a < 0$, а вспомогательный коэффициент $\eta_{22}=1$. Если $\eta_a=0$, $\eta_{12}=1$, то для аппроксимации используется логнормальное распределение (11); а если $\eta_a > 0$, $\eta_{22}=1$ – распределение (10).

Рассмотрим возможности распределения (10) по аппроксимации законов распределения, подобных ПРВ [6]:

$$p(x) = \frac{c \beta^{\alpha c}}{\Gamma(\alpha) x^{\alpha c + 1}} \exp\left(-\frac{\beta^c}{x^c}\right), \quad 0 < x < \infty. \quad (22)$$

Логарифмические моменты для ПРВ (10) и (22) соответственно определяются выражениями:

$$l_1 = \ln(\chi) + \exp(m + 1/2\gamma^2),$$

$$L_2 = \exp(2m + \gamma^2)[\exp(\gamma^2) - 1],$$

$$L_3 = \exp(3m + 3/2\gamma^2)[\exp(\gamma^2) - 1]^2[\exp(\gamma^2) + 2]$$

и

$$l_1 = \ln(\beta) - \frac{\psi(\alpha)}{c}, \quad L_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha}, \quad L_3 = -\frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \psi(\alpha)}{\partial \alpha^2}.$$

При этом параметры ПРВ (10) определяются формулой (17), а также соотношениями

$$m = \ln(\delta) - 1/2\gamma^2 = m_0 - \ln(c),$$

$$\chi = \exp(l_1 - \delta) = \beta \exp(\chi_0/c),$$

где

$$m = \ln(\delta) - 1/2\gamma^2 = m_0 - \ln(c),$$

$$\chi = \exp(l_1 - \delta) = \beta \exp(\chi_0/c).$$

С помощью вспомогательных параметров m_0 и χ_0 , зависящих (как и параметр γ) только от параметра α , целесообразно преобразовать ПРВ (10)

$$p_a(x) = \frac{c \gamma \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2} \left[\ln\left(c \ln\left(\frac{x}{\beta}\right) - \chi_0\right) - m_0 \right]^2\right\}}{\sqrt{2\pi} x \left(c \ln\left(\frac{x}{\beta}\right) - \chi_0\right)},$$

$$\chi < x < \infty. \quad (23)$$

ПРВ (23) отражает зависимость от параметров c и β аналогично ПРВ (22). Изменение в (22) параметра α в ПРВ (23) приводит к изменению параметров m_0 , χ_0 и γ . Оценка погрешности аппроксима-

ции с помощью ПРВ (23) распределения (22) по критерию (20) показала, что она зависит только от значений параметра α . Ошибка Δ возрастает при $\alpha \rightarrow 0$. Например, если $\alpha=10$, то $\Delta=0,13\%$; если $\alpha=1$, то $\Delta=0,64\%$; если $\alpha=0,25$, $\Delta=3,0\%$.

Производилась также оценка возможностей распределения (10) по аппроксимации обратного гауссовского распределения [2]:

$$p(x) = \frac{c}{2\sqrt{\pi\lambda} x^{1,5}} \exp\left(c - \lambda x - \frac{c^2}{4\lambda x}\right),$$

$$0 < x < \infty, \quad (24)$$

где $c > 0$ – параметр формы; $\lambda > 0$ – параметр масштаба.

Оценка погрешности аппроксимации с помощью ПРВ (10) распределения (24) по критерию (20) показала, что она зависит только от параметра формы c . Ошибка аппроксимации Δ возрастает при $c \rightarrow 0$. Например, если $c=20$, то $\Delta=0,28\%$; если $c=2$, то $\Delta=1,9\%$; если $c=0,1$, то $\Delta=4,7\%$.

Таким образом, модифицированные распределения Джонсона (9) и (10) позволяют с приемлемой точностью аппроксимировать известные теоретические законы распределения, такие как К-распределение, обратное гауссовское распределение, обобщенное гамма-распределение и т. д.

3. Применение модифицированных распределений Джонсона для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных

Аппроксимация экспериментальных распределений с помощью модифицированных распределений Джонсона (9)–(13) может осуществляться по следующему алгоритму:

1. Вначале определяются выборочные логарифмические моменты:

$$\hat{l}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \hat{L}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \hat{l}_1)^s, \quad s = 2, 3, 4, \quad (32)$$

затем коэффициенты η_a , η_3 и η_{12} по соотношениям (14), а также вспомогательный коэффициент η_{22} по формуле (15).

2. Если для вспомогательного коэффициента η_{22} выполняется условие $\eta_{22} > 1,02$, то для аппроксимации экспериментального распределения используется ПРВ (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.
2. Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения. Ч. 1. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 703 с.
3. Johnson N.L. Systems of frequency curves generated by method of translation // *Biometrika*. – 1949. – V. 36. – № 1. – P. 149–176.
4. Бостанджиян В.А. Распределение Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратное нормальное. Оценивание их параметров. – Черногловка: Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2009. – 240 с.
5. Буркатовская Ю.Б., Марков Н.Г., Морозов А.С., Серых А.П. Применение распределений Джонсона к задаче классифика-

3. Если для вспомогательного коэффициента η_{22} выполняется условие $\eta_{22} < 0,98$, то для аппроксимации экспериментального распределения используется ПРВ (13).

4. Если для коэффициентов η_a и η_{22} выполняются условия $-0,1 \leq \eta_a \leq 0,1$; $0,98 \leq \eta_{22} \leq 1,02$, то для аппроксимации экспериментального распределения используется логнормальный закон (11), параметры которого определяются первым начальным и вторым центральным логарифмическими моментами $\chi = \exp(l_1)$, $\gamma = 1/\sqrt{L_2}$.

5. Если коэффициент асимметрии $\eta_a < -0,1$, а для коэффициента η_{22} выполняется условие $0,98 \leq \eta_{22} \leq 1,02$, то для аппроксимации экспериментального распределения используется ПРВ (9).

6. Если коэффициент асимметрии $\eta_a > 0,1$, а для коэффициента η_{22} выполняется условие $0,98 \leq \eta_{22} \leq 1,02$, то для аппроксимации экспериментального распределения используется ПРВ (10).

Оценка параметров модифицированных распределений Джонсона (9), (10), (12) и (13) производится по известным методикам оценки параметров распределений Джонсона, изложенным в целом ряде работ, например в [1–4]. При этом степенные моменты заменяются на логарифмические.

Выводы

На основе модификации распределений Джонсона получены модифицированные распределения Джонсона (9)–(13), а также произведена их топологическая классификация с использованием коэффициента асимметрии и совместного коэффициента асимметрии и эксцесса. Показано, что модифицированные распределения Джонсона (9) и (10) позволяют с приемлемой точностью аппроксимировать известные теоретические законы распределения, такие как К-распределение, обратное гауссовское распределение, обобщенное гамма-распределение и т. д. Разработана методика аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих только положительные значения, с использованием модифицированных распределений Джонсона (9)–(13) на основе методики оценки параметров распределений Джонсона.

ции аэрокосмических изображений // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 5. – С. 76–80.

6. Карпов И.Г., Карпов М.Г., Проскурин Д.К. Методы обобщенного вероятностного описания и идентификации негауссовских случайных величин и процессов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – 172 с.
7. Tadikamalla P.R., Johnson N.L. Systems of frequency curves generated by transformations of logistic variables // *Biometrika*. – 1982. – V. 69. – № 10. – P. 461–465.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1984. – 800 с.

Поступила 01.10.2012 г.

СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Е.В. Боловин, А.С. Глазырин

Томский политехнический университет

E-mail: djon-raptor@mail.ru

Разработан алгоритм идентификации параметров динамических объектов при гармонических входных воздействиях на основе решения систем разностных уравнений. Предложена и проверена методика выбора коэффициента времени при составлении разностных уравнений. Рассмотрены и предложены основные способы улучшения обусловленности матрицы входных величин.

Ключевые слова:

Идентификация, разностные уравнения, коэффициент временной задержки, обусловленность матриц.

Key words:

Identification, difference equations, time delay coefficient, conditionality of matrices.

Введение

В настоящее время проблема идентификации параметров динамических объектов, в частности электродвигателей в составе «бездатчиковых» электроприводов, становится все более актуальной. Одним из направлений развития теории динамической идентификации является оперативная оценка параметров динамических объектов на основе разностных схем [1, 2]. Для решения этого класса задач идентификации необходимо представить системы разностных уравнений в матричном виде. Однако при составлении матриц возникают проблемы их плохой обусловленности.

Цель представленной работы – предложить способы улучшения обусловленности матриц за счет оптимального выбора коэффициента временной задержки при динамической идентификации параметров на основе решения систем разностных уравнений.

Требования к процедуре идентификации и оценкам

Приведем основные требования, предъявляемые к процедуре идентификации и полученным в результате оценкам [3]:

1. Несмещенная оценка.
2. Состоятельная оценка.
3. Эффективная оценка.
4. Высокая точность.
5. Надежность.
6. Наименьшие затраты на процедуру идентификации.

Особенности составления системы разностных уравнений в матричном виде

Динамические процессы, происходящие в объектах, описанные системой дифференциальных уравнений (СДУ) n -го порядка, как правило, в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^m a_{ji}(t_j)x_i + f_j(t_j) \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где $\frac{dx_j}{dt}$ – производные переменных состояний;

$a_{ji}(t_j)$ – искомые коэффициенты, x_i – значения переменных состояния, полученные из сигналов дат-

чиков в точках t_j ; $f_j(t_j)$ – независимые свободные члены уравнений, обусловленные внешним воздействием на динамическую систему.

Полученную систему (1) можно записать в матричном виде (2):

$$A \cdot x = B, \quad (2)$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица входных ве-

личин; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ – матрица неизвестных параме-

тров; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ – матрица выходных величин.

Способы улучшения обусловленности матрицы входных величин

Одним из способов уменьшения погрешности идентификации параметров является переход к переобусловленной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с прямоугольной матрицей входных величин. Такой подход положительно себя зарекомендовал в решении задач Навье–Стокса [4]. Переобусловленные СЛАУ являются несовместными.

Определение 1. Система линейных алгебраических уравнений называется несовместной, если для заданной правой части не существует вектора φ , обращающего СЛАУ в тождество. Несовместность может быть вызвана неточностью задания правой части или неточностью задания элементов матрицы системы. Также несовместной является СЛАУ с прямоугольными матрицами, для которых не определена обратная матрица A^{-1} [5].

Примечание. Несовместными могут быть СЛАУ с хорошо обусловленными матрицами.

Воскобойниковым Ю.Е. рассмотрен случай для матрицы A , имеющей размеры $N \times M$. Вектор φ_{HK} размерностью M называют псевдорешением уравнения (2), с учетом определения 1, если он доставляет минимум следующему функционалу

$$\Psi_{HK}(\varphi) = \|f - A\varphi\|^2 = (f - A\varphi)^T (f - A\varphi)$$

среди всех векторов евклидова пространства E^M . Используя правила векторного дифференцирования, получаем необходимое условие экстремума:

$$\frac{d}{d\varphi} [(f - A\varphi)^T (f - A\varphi)] = A^T (f - A\varphi) = 0_M,$$

из которого следует система уравнений (называемая системой нормальных уравнений) вида:

$$A^T A \varphi_{HK} = A^T f.$$

В отличие от исходной системы $A\varphi=f$ эта система всегда разрешима, т. е. для любой правой части f существует псевдорешение φ_{HK} . Если матрица A имеет ранг, равный M , то

$$\begin{aligned} \varphi_{HK} &= (A^T A)^{-1} A^T f \left| \frac{x_1 - x}{x} \right| \cdot 100 \% \geq \\ &\geq 0,1 \% \left| \frac{y_1 - y}{y} \right| \cdot 100 \% \geq 0,1 \%. \end{aligned}$$

К сожалению, алгоритм построения φ_{HK} является неустойчивым по отношению к погрешностям исходных данных, что является следствием плохой обусловленности решаемых СЛАУ.

При идентификации параметров динамических объектов на основе решения систем разностных уравнений плохая обусловленность матрицы приводит к получению неточных оценок.

Определение 2. Система уравнений считается хорошо обусловленной, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают малые изменения в решении.

Определение 3. Система уравнений считается плохо обусловленной, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают большие изменения в решении.

Примечание. Будем считать, что малые изменения в коэффициентах матрицы и решении – это изменения, составляющие 0,1% от самих значений.

Предположим, есть следующая СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Соответственно, матрица неизвестных параметров $[xy]^T$.

Внесем небольшие изменения в правую часть системы (3):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $d_1 \approx b_1$, $d_2 \approx b_2$.

Решением (4) является $[x_1 y_1]^T$.

Если

$$\left| \frac{x_1 - x}{x} \right| \cdot 100 \% \leq 0,1 \% \text{ и } \left| \frac{y_1 - y}{y} \right| \cdot 100 \% \leq 0,1 \%,$$

то система является хорошо обусловленной. Если же

$$\left| \frac{x_1 - x}{x} \right| \cdot 100 \% \geq 0,1 \% \text{ и } \left| \frac{y_1 - y}{y} \right| \cdot 100 \% \geq 0,1 \%,$$

то система плохо обусловленная.

Изменим систему (3), внося небольшие изменения в коэффициенты матрицы A :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $c_{11} \neq a_{11}$, $c_{12} \neq a_{12}$, $c_{21} \neq a_{21}$, $c_{22} \neq a_{22}$.

Решением (5) является $[x_2 y_2]^T$. Если

$$\left| \frac{x_2 - x}{x} \right| \cdot 100 \% \leq 0,1 \% \text{ и } \left| \frac{y_2 - y}{y} \right| \cdot 100 \% \leq 0,1 \%,$$

то система является хорошо обусловленной. Если же

$$\left| \frac{x_2 - x}{x} \right| \cdot 100 \% \geq 0,1 \% \text{ и } \left| \frac{y_2 - y}{y} \right| \cdot 100 \% \geq 0,1 \%,$$

то система плохо обусловленная.

Определение 4. Матрица хорошо обусловлена тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно независимы [6].

Оптимальный выбор коэффициента временной задержки

Одна из основных причин плохой обусловленности матрицы – стремление определителя к нулю и невозможность найти обратную матрицу. Решением данной проблемы является совершенствование метода составления систем линейных алгебраических уравнений на основе разностных схем. Продемонстрируем это на примере RL-цепи.

Пример 1. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для RL-цепи:

$$i(t_j) \cdot R + \frac{di(t_j)}{dt} \cdot L = U(t_j),$$

$$\text{или } i_j \cdot R + \left(\frac{di}{dt} \right)_j \cdot L = U_j,$$

где t_j – время на j -м шаге расчёта; $i(t_j) = i_j$ – ток; R – сопротивление; L – индуктивность; $U(t_j) = U_j$ – гармоническое напряжение, синусоидальное или косинусоидальное.

Для определения оценок двух искомым параметров \hat{R}_j и \hat{L}_j составим систему уравнений, добавив второе уравнение, полученное на основе задержки по времени $\tau = k \cdot \Delta t$, причём Δt – период дискретизации сигналов датчиков тока и напряжения, а k – количество задержек по времени:

$$\begin{pmatrix} i_j & \left(\frac{di}{dt} \right)_j \\ i_{j-k} & \left(\frac{di}{dt} \right)_{j-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{R}_j \\ \hat{L}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_j \\ U_{j-k} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решением (6) является:

$$\begin{pmatrix} \widehat{R}_j \\ \widehat{L}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_j & \left(\frac{di}{dt}\right)_j \\ i_{j-k} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{j-k} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_j \\ U_{j-k} \end{pmatrix} \Rightarrow \widehat{\beta} = A^{-1} \cdot B.$$

Будем варьировать k так, чтобы временная задержка была в пределах от 0 до половины периода входного гармонического напряжения. Чем определитель матрицы коэффициентов больше, тем более корректной является задача идентификации параметров и наоборот [5]. Среднее значение определителя вычисляется при этом как:

$$DetA_k = \frac{1}{N-k+1} \cdot \sum_{j=k+1}^N \begin{vmatrix} i_j & \left(\frac{di}{dt}\right)_j \\ i_{j-k} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{j-k} \end{vmatrix}.$$

При моделировании принималось, что $U(t)=220\sqrt{2}\cos(2\pi 50t)$, $R=0,1$, $L=0,025$, $\Delta t=100\cdot 10^{-6}$, $N=10^4$. Размерности всех величин в единицах системы Си.

Зависимость $DetA_k$ от количества временных задержек k представлена на рисунке.

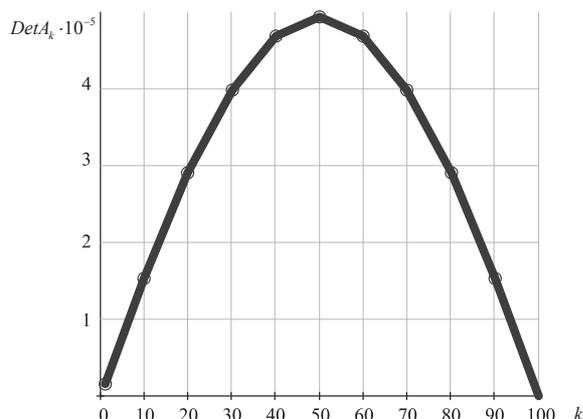


Рисунок. Зависимость $DetA_k$ от количества временных задержек k

Из рис. 1 видно, что определитель имеет максимальное значение при временной задержке равной 50, что соответствует четверти периода входного сигнала. Таким образом, при составлении разностных уравнений динамических объектов, при входном гармоническом сигнале, необходимо учитывать коэффициент временных задержек. В общем случае k должен иметь значение, соответствующее четверти периода входного сигнала, остальные временные задержки равномерно разбиваются от 0 до k в зависимости от количества уравнений.

Однако считается, что большое значение определителя матрицы входных сигналов не является важным критерием обусловленности, более значимо число обусловленности матрицы [6]. Соответственно, необходимо проверить правильность выбора временных задержек k .

Определение 5. Число обусловленности $cond(A)$ является количественной оценкой обусловленности. Если $cond(A) \geq 10^3$, то матрица A плохо обусловлена. Если $1 \leq cond(A) \leq 100$, то матрица считается хорошо обусловленной.

Примечание. Число обусловленности матрицы всегда больше 1, $cond(A) \geq 1$.

Следует отметить, что число обусловленности матрицы напрямую связано с понятием норма матрицы. Как и определитель квадратной матрицы, норма матрицы – это число. Норма матрицы всегда является положительным числом.

Различают несколько норм матрицы.

Определение 6. ∞ -норма – это максимальная из сумм модулей элементов строки. Для предыдущего примера:

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ji}| \cdot X_{51} = A_{51}^{-1} \cdot B_{51} = \\ &= \begin{bmatrix} i_{51} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51} \\ i_{51-50} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51-50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_{51} \\ U_{51-50} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -7,853 \\ 2,559 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определение 7. 1-норма – это максимальная сумма модулей элементов каждого из столбцов матрицы:

$$\|A\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ji}|.$$

Определение 8. 2-норма (евклидова норма) – длина векторов в n -мерном пространстве:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ji}|^2}.$$

Пример 2. Определим зависимость числа обусловленности от нормы матрицы. Рассчитаем ∞ -норму матрицы A для примера 1.

Перепишем систему (6) с учетом, что коэффициент временной задержки $k=50$, $j=51$.

$$A_{51} \cdot X_{51} = B_{51} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_{51} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51} \\ i_{51-50} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51-50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{R}_{51} \\ \widehat{L}_{51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{51} \\ U_{51-50} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Соответственно матрица A_{51} :

$$\begin{aligned} A_{51} &= \begin{bmatrix} i_j & \left(\frac{di}{dt}\right)_j \\ i_{j-k} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{j-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{51} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51} \\ i_{51-50} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51-50} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 39,72 & 118,064 \\ 1,245 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

∞ -норма матрицы A_{51} равна:

$$\begin{aligned} \|A_{51}\|_{\infty} &= \max_{1 \leq j \leq 2} \sum_{i=1}^2 |a_{ji}| = \\ &= \max[(|39,72| + |118,064|), (|1,245| + |0|)] = \\ &= \max[(157,784), (1,245)] = 157,784. \end{aligned}$$

Найдем ∞ -норму матрицы X_{51} :

$$X_{51} = A_{51}^{-1} \cdot B_{51} = \begin{bmatrix} i_{51} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51} \\ i_{51-50} & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51-50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_{51} \\ U_{51-50} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -7,853 \\ 2,559 \end{bmatrix};$$

$$\|X_{51}\|_{\infty} = 7,853.$$

На основании определений 6 и 7 внесем небольшие изменения в левую часть системы (7):

$$A'_{51} \cdot X'_{51} = B_{51} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_{51} + 0,001 & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51} + 0,001 \\ i_{51-50} + 0,001 & \left(\frac{di}{dt}\right)_{51-50} + 0,001 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{R}'_{51} \\ \hat{L}'_{51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{51} \\ U_{51-50} \end{pmatrix}.$$

Найдем ∞ -нормы матриц A'_{51} и X'_{51} :

$$\|A'_{51}\|_{\infty} = 157,784;$$

$$\|X'_{51}\|_{\infty} = 7,848.$$

Таким образом, изменение левой части равно:

$$[\Delta A] = [A'] - [A] = \begin{bmatrix} 49,721 & 118,065 \\ 2,246 & 0,001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 39,72 & 118,064 \\ 1,245 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 \\ 0,001 & 0,001 \end{bmatrix},$$

а изменение решения:

$$[\Delta X] = [X'] - [X] = \begin{bmatrix} -7,853 \\ 2,559 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7,848 \\ 2,558 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,251 \cdot 10^{-3} \\ 1,385 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Найдем ∞ -нормы векторов ΔA и ΔX : $\|\Delta A\|_{\infty} = 0,001$, $\|\Delta X\|_{\infty} = 4,251 \cdot 10^{-3}$.

Отношение ∞ -нормы векторов ΔA , ΔX соответственно к A_{51} , X_{51} равно:

$$\frac{\|\Delta X\|_{\infty}}{\|X_{51}\|_{\infty}} \cdot 100 \% = \frac{4,251 \cdot 10^{-3}}{7,853} \cdot 100 \% = 6,367 \cdot 10^{-2} \leq 0,1 \%,$$

$$\frac{\|\Delta A\|_{\infty}}{\|A_{51}\|_{\infty}} \cdot 100 \% = \frac{0,001}{157,784} \cdot 100 \% = 1,268 \cdot 10^{-3} \leq 0,1 \%.$$

Видно, что изменение левой части, равное $1,268 \cdot 10^{-3} \% \leq 0,1 \%$, вызвало малое изменение в решении $6,367 \cdot 10^{-2} \% \leq 0,1 \%$. Отношение изменения решения к изменению левой части:

$$\frac{\|\Delta X\|_{\infty} / \|X_{51}\|_{\infty}}{\|\Delta A\|_{\infty} / \|A_{51}\|_{\infty}} = \frac{6,367 \cdot 10^{-4}}{1,268 \cdot 10^{-5}} = 50,213.$$

Таким образом, на основании определений 6, 7 и 10 можно утверждать, что выбор коэффициента временной задержки является оптимальным и не противоречит законам обусловленности матрицы.

Примечание. Идентификация параметров начинается с 51 значения, что связано с временной задержкой и особенностью процедуры идентификации. Таким образом, первым значением процесса идентификации параметров динамических объектов при гармоническом входном сигнале является решение (2), приведенное в общем виде к следующему уравнению:

$$A_H \cdot x = B_H,$$

где $A_H = \begin{bmatrix} a_1(t_{51}) & a_2(t_{51}) & \dots & a_m(t_{51}) \\ a_1(t_{50}) & a_2(t_{50}) & \dots & a_m(t_{50}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(t_1) & a_2(t_1) & \dots & a_m(t_1) \end{bmatrix}$ – матрица вход-

ных величин; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ – матрица неизвестных пара-

метров; $B_H = \begin{bmatrix} b(t_{51}) \\ b(t_{50}) \\ \dots \\ b(t_1) \end{bmatrix}$ – матрица выходных величин.

Таким образом, после учета всех представленных выше способов улучшения обусловленности матрицы входных величин для идентификации параметров динамических объектов при гармонических входных воздействиях решение уравнения (2) выглядит следующим образом:

$$\hat{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B.$$

Выводы

1. Сформулированы основные требования, предъявляемые к процедуре идентификации и полученным в результате оценкам.
2. Определены основные причины плохой обусловленности матриц входных величин, и предложены способы улучшения обусловленности таких матриц.
3. Рассмотрен оптимальный выбор коэффициента временной задержки, необходимый для составления разностных уравнений. Выявлено, что максимальное значение определителя получено при коэффициенте временной задержки, соответствующем четверти волны входного сигнала. В результате проверки на противоречие обусловленности матриц можно утверждать, что методика данного выбора является работоспособной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазырин А.С., Боловин Е.В. Разработка и лабораторное апробирование метода идентификации параметров электродвигателей на основе разностных схем // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 4. – С. 112–115.
2. Глазырин А.С., Боловин Е.В. Разработка метода идентификации параметров асинхронных электродвигателей с неподвижным короткозамкнутым ротором на основе разностных схем // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 101–105.
3. Овчаренко В.Н. Оптимизация входных сигналов в задаче идентификации линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 5. – С. 72–81.
4. Ольшанский М.А. Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2006. – 284 с.
5. Воскобойников Ю.Е., Мицель А.А. Современные проблемы прикладной математики. Ч. 1. – Томск: Изд-во Томского государственного университета управления и радиоэлектроники, 2010. – 136 с.
6. Цей Р., Шумафов М.М. Число обусловленности матрицы как показатель устойчивости при решении прикладных задач // Труды ФОРА. – 2011. – № 16. – С. 61–67.

Поступила 20.12.2012 г.

УДК 539.219.3:546.82

ДИФфуЗИЯ ВОДОРОДА В СУБМИКРОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ТИТАНЕ

Г.П. Грабовецкая, Н.Н. Никитенков*, И.П. Мишин, И.В. Душкин*, Е.Н. Степанова*, В.С. Сыпченко*

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск

*Томский политехнический университет

E-mail: grabg@ispms.tsc.ru

Проведены сравнительные исследования диффузии водорода в крупно- и субмикрорекристаллическом титане методом сопряжения электролитической ячейки с вакуумной камерой через мембрану. Установлено, что формирование субмикрорекристаллической структуры приводит к уменьшению эффективного коэффициента диффузии водорода в титане и повышению способности накапливать водород в объеме, что обусловлено большей протяженностью границ зерен в субмикрорекристаллических образцах по сравнению с крупнокристаллическими. Проанализировано влияние плотности дислокаций и протяженности границ зерен на способность титана накапливать водород в объеме.

Ключевые слова:

Титан, субмикрорекристаллическая структура, диффузия, водород, метод мембраны.

Key words:

Titanium, submicrocrystalline structure, diffusion, hydrogen, membrane method.

Введение

Наличие в металлах примесей внедрения оказывает ощутимое влияние на их эксплуатационные характеристики [1, 2]. Особое место в ряду примесей внедрения по влиянию на физико-механические свойства металлов занимает водород. Это связано с тем, что водород, благодаря высокой диффузионной подвижности в металлах, может перераспределяться в объеме материала под действием полей упругих напряжений, образуя скопления в наиболее напряженных участках и увеличивая тем самым вероятность выделения гидридов и образования пор и трещин [3]. Известно [4, 5], что диффузия водорода в металле зависит не только от типа кристаллической решетки металла, но и от степени ее совершенства. Наиболее существенно дефекты кристаллической решетки влияют на коэффициенты диффузии и растворимости водорода в металле.

В последнее время активно разрабатываются и исследуются ультрамелкозернистые (нано- и субмикрорекристаллические (СМК) материалы), инте-

рес к которым связан с их уникальными физико-химическими свойствами по сравнению с крупнокристаллическими (КК) материалами. Вместе с тем нано- и СМК-металлические материалы имеют большую протяженность границ зерен и часто высокую плотность дефектов кристаллической решетки (дислокаций и вакансий) в объеме зерен, которые являются ловушками для водорода. Так, по данным, приведенным в [6–8], объемная доля границ в субмикрорекристаллических металлических материалах, полученных методами интенсивной пластической деформации, составляет 0,1...1,0 %, плотность дислокаций – $10^{14}...10^{15} \text{ м}^{-2}$, а плотность вакансий может достигать 10^{-4} (в хорошо отожженных металлах плотность дислокаций составляет $10^4...10^8 \text{ м}^{-2}$, а плотность вакансий – $10^{-23}...10^{-22}$). Это дает основание предполагать, что коэффициенты диффузии и способность накапливать водород в объеме из водородосодержащей среды для нано- и СМК-материалов будут существенно отличаться от соответствующих величин для КК-материалов.

Целью данной работы является исследование на примере титана влияния формирования СМК-состояния на эффективные коэффициенты диффузии и способность накапливать водород в объеме металлических материалов.

Материал и методы исследования

В качестве материалов для исследования использовали титан технической чистоты (99,58 мас. %) (состав в мас. %: <0,12O; 0,18Fe; <0,07C; <0,04N; <0,01H, остальное титан) в КК- и СМК-состояниях и двухфазный ($\alpha+\beta$) титановый сплав ВТ6.

СМК-состояние в титане было получено методом, сочетающим равноканальное угловое прессование (режим V_c , восемь проходов при температурах 673...573 К) и холодную деформацию на 75 %. Деформацию титана после равноканального углового прессования на 75 % осуществляли многоходовой прокаткой при комнатной температуре с шагом 5...12 %. Деформацию (ε) рассчитывали по формуле:

$$\varepsilon = \frac{(h_0 - h) \cdot 100}{h_0} \%,$$

где h_0 – толщина заготовки до прокатки; h – толщина заготовки после многоходовой прокатки.

Сплав ВТ6 использовали в двух состояниях: в мелкокристаллическом (МК) (размер зерен ~10 мкм) и СМК- (размер элементов зеренно-субзеренной структуры ~0,45 мкм) состояниях. Содержание β -фазы в сплаве в обоих состояниях в пределах ошибки измерения методом рентгеноструктурного анализа одинаково и равно ~10 об. %. СМК-состояние в сплаве ВТ6 было получено методом всестороннего прессования при температуре 873 К [9].

Структурные исследования проводили с помощью оптического Olympus GX-71 и электронного ЭМ-125К микроскопов. Размеры структурных элементов измеряли на фотографиях микроструктуры методом секущей. Плотность дислокаций в титане определяли по уширению рентгеновских линий с помощью дифрактометра Shimadzu XRD-6000 в излучении $\text{Cu-K}\alpha$. Разделение вкладов в уширение рентгеновских линий за счет малых размеров областей когерентного рассеяния и микроискажений кристаллической решетки проводили с помощью метода, предложенного для титана в [10], по линиям (0111) и (0113). Плотность дислокаций ρ рассчитывали по формуле [11]:

$$\rho = \frac{\pi\beta^2 \text{ctg}^2\theta}{16b^2}, \text{ м}^{-2},$$

где β – уширение рентгеновских линий, обусловленное микродеформацией решетки; θ – угол, соответствующий максимуму рентгеновской линии; b – вектор Бюргерса.

Для исследования диффузии водорода в титане использовали метод мембраны [5]. Толщина используемых мембран составляла 40...50 мкм.

Имеющаяся установка позволяла объединить электролитическую ячейку (для насыщения образца водородом) и высоковакуумную камеру (для масс-спектрометрического анализа прошедших через мембрану продуктов электролиза) [12, 13]. После включения электролитической ячейки при появлении признаков возрастания интенсивности линий водорода фиксировалось время, прошедшее от момента включения электролиза. Масс-спектрометр позволял отслеживать изменение в вакуумной камере масс следующих элементов и соединений: Н; Н₂; HD; D₂; СН; ОН. Измерения интенсивностей линий указанных элементов и соединений производили многократно в течение всего времени возрастания и выхода их на насыщение (далее для простоты речь будет идти только о линии Н₂). Эффективный коэффициент диффузии водорода D_H оценивали исходя из величины промежутка времени от момента включения электролиза и момента возрастания интенсивности линий водорода t_0 по формуле Бэррера [14]:

$$D_H = l^2 / 6\Delta t, \quad (1)$$

где l – толщина мембраны, Δt – величина промежутка времени между моментом включения электролиза и моментом начала возрастания линии Н₂, фиксируемой масс-спектрометром, установленным в вакуумной камере.

Для электролиза использовали электролит 0,1М Н₂SO₄. Плотность тока электролиза 1 А·см⁻², начальное давление в вакуумной камере 10⁻³ Па. В процессе электролиза наблюдался медленный разогрев мембраны в течение одного часа до температуры ~ 323 К. Далее температура оставалась постоянной.

Сплав ВТ6 был использован для сравнительных исследований влияния β -фазы на способность СМК-структуры накапливать водород в объеме при повышенных температурах. Для этого образцы в форме параллелепипеда с размерами 10×10×20 мм насыщали водородом методом Сиверста в среде осушенного водорода при температурах 873, 923 и 973 К и давлении 0,9·10⁵ Па. Скорость нагрева и охлаждения образцов составляла 12 °С/мин. Время выдержки при температуре насыщения – 15 мин.

Концентрацию водорода в мембранах из титана после извлечения мембраны из промежутка электролит-вакуум и образцах сплава ВТ6 измеряли с помощью газового анализатора водорода RHEN 602 с точностью 0,0001 %.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлена структура КК-титана после отжига при температуре 1073 К, 1 ч. Видно, что структура сплава неоднородна: наряду с зернами размерами 50...100 мкм имеются зерна, размеры которых составляют 10...15 мкм. Плотность дислокаций в отожженном титане не превышает 10⁹ м⁻².

Типичное электронно-микроскопическое изображение структуры СМК-титана ВТ1–0 представлено на рис. 2. На светлопольном снимке (рис. 2, а)

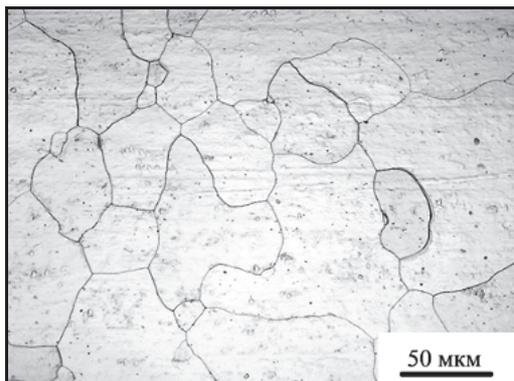


Рис. 1. Микрофотография структуры КК-титана VT1-0

сложный деформационный контраст не позволяет выявить особенности микроструктуры. На темнопольном снимке видны отдельные зерна и субзерна (рис. 2, б). Среднее значение размера элементов зеренно-субзеренной структуры составляет 0,12 мкм. Основной объем материала занимают элементы размерами до 0,15 мкм (рис. 2, в). На электроннограммах (рис. 2, а), снятых с площади 1,2 мкм², наблюдается высокая плотность точечных рефлексов. При этом часть рефлексов имеет азимутальное размытие. Такой вид электроно-

грамм характерен для неравновесных нано- и СМК-материалов, имеющих большие разориентировки между элементами структуры и внутренние поля упругих напряжений [6, 7]. Плотность дислокаций в СМК-титане составляет $\sim 2 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$.

На рис. 3, а, представлены кривые, показывающие изменение содержания в вакуумной камере водорода H_2 , прошедшего в процессе электролиза через мембрану из КК- и СМК-титана. Эти же нормированные кривые представлены на рис 3, б, (за единицу принят исходный уровень водорода в вакуумной камере). Видно, что время проникновения водорода через мембрану и время выхода водорода на стационарный уровень для СМК-титана больше по сравнению с КК-титаном.

Значения скорости выхода водорода в вакуумной камере на стационарный уровень и рассчитанные по формуле (1) значения коэффициента D_{H} для титана при температуре 323 К приведены в табл. 1. Видно, что значение коэффициента D_{H} и скорость выхода водорода в вакуумной камере на стационарный уровень для СМК-титана ниже соответствующих значений для КК-титана. Следует отметить, что полученное в эксперименте значение коэффициента D_{H} для отожженного КК-титана хорошо согласуется с данными работы [15], в которой

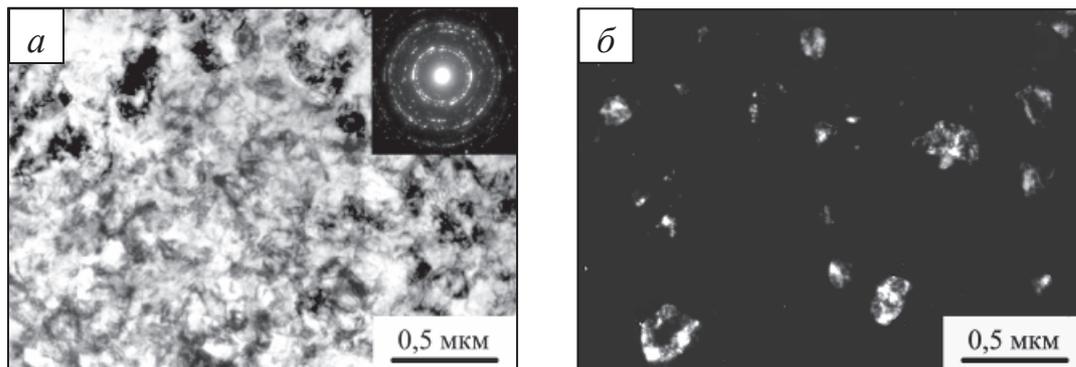


Рис. 2. Электронно-микроскопическое изображение микроструктуры (а, б) и гистограмма распределения элементов зеренно-субзеренной структуры по размерам (в) СМК-титана VT1-0

значения коэффициента D_H технического чистого титана определяли путем изучения распределения водорода по глубине образца после его частичного насыщения водородом или частичной дегазации (табл. 1).

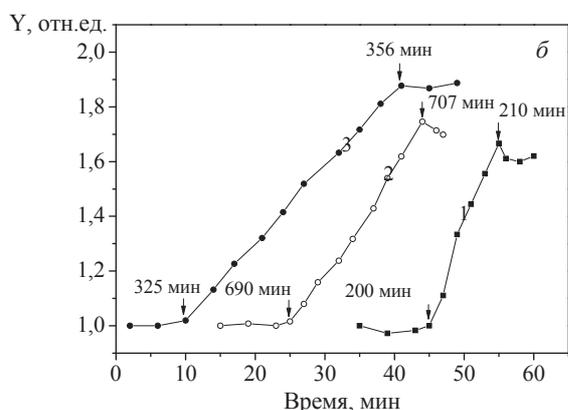
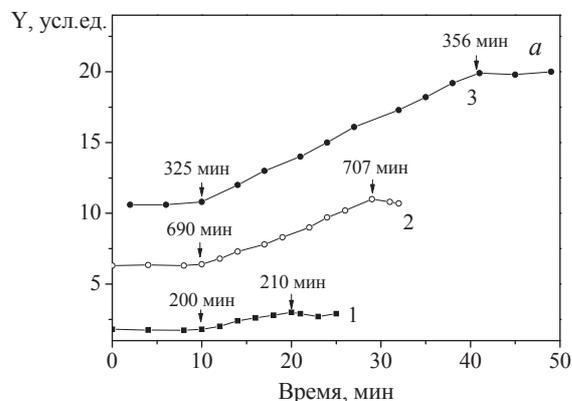


Рис. 3. Кривые зависимости содержания водорода в вакуумной камере от времени электролиза (а – в условных единицах (величинах, пропорциональных току с детектора масс-спектрометра); б – в относительных единицах), мембраны: 1) КК-титан; 2) СМК-титан; 3) СМК-титан после отжига в течение 1 ч при температуре 573 К

Таблица 1. Значения эффективного коэффициента диффузии водорода (D_H) и скорости выхода водорода в вакуумной камере на стационарный уровень (V_H) КК- и СМК-титана (температура 323 К)

| Титан | Толщина мембраны, мкм | V_H , отн. ед./мин | D_H , м ² /с |
|-----------------------------------|-----------------------|----------------------|---------------------------|
| КК | – | – | $4,2 \cdot 10^{-14}$ [14] |
| КК | 48 | 0,62 | $3,2 \cdot 10^{-14}$ |
| СМК | 50 | 0,34 | $1,0 \cdot 10^{-14}$ |
| СМК после отжига при 573 К, 1 час | 40 | 0,28 | $1,4 \cdot 10^{-14}$ |

Измерения концентрации водорода в мембранах после выхода интенсивности линии H_2 на насыщение показали, что способность накапливать водород СМК-титана существенно выше по сравнению с КК-состоянием (табл. 2).

Таблица 2. Концентрация водорода в мембране из КК- и СМК-титана

| Титан | Концентрация водорода, мас. % | |
|---------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| | Исходный | После электролиза |
| КК | 0,0039 | 0,0048 |
| СМК | 0,0040 | 0,0133 |
| СМК после отжига при 573 К, 1 ч | 0,0038 | 0,0105 |

Подтверждением большей способности СМК-структуры накапливать водород являются и результаты исследования влияния размера зерна на концентрацию водорода в сплаве ВТ6 после отжигов в интервале температур 873...973 К. Результаты этого исследования представлены в табл. 3. Видно, что концентрация водорода в двухфазном сплаве ВТ6, как и в однофазном титане, в СМК-состоянии после отжига во всем исследованном интервале температур выше, чем в МК-состоянии. Разница в значениях концентрации водорода в сплаве в МК- и СМК-состояниях тем выше, чем ниже температура насыщения водородом.

Таблица 3. Поглощение водорода сплавом ВТ6 в МК и СМК-состояниях

| Температура, К | Общее количество водорода, поглощенного сплавом, мас. % | |
|----------------|---|-------|
| | МК | СМК |
| 873 | 0,477 | 0,783 |
| 923 | 0,571 | 0,873 |
| 973 | 0,763 | 0,915 |

Разница значений коэффициента D_H и способности накапливать водород в объеме для титана в КК- и СМК-состояниях может определяться не только плотностью дефектов кристаллической решетки, но и такими факторами, как толщина и состав оксидной пленки на поверхности титана и количество кислорода и азота, растворенных в его объеме. Известно [16, 17], что при комнатной температуре на воздухе на поверхности титана за несколько часов формируется защитная оксидная пленка толщиной ~ 2 нм, по составу близкая к TiO_2 . Дальнейшее окисление титана при комнатной температуре происходит очень медленно (за четыре года до ~ 5 нм [17]). По данным [18] скорости окисления КК- и СМК-титана близки и вплоть до температуры 1043 К незначительны. Следовательно, можно предполагать, что оксидные пленки, образовавшиеся на поверхности исследуемого титана в КК- и СМК-состояниях, одинаковы.

Проведенные исследования показали, что в процессе формирования СМК-структуры по указанному выше режиму концентрации кислорода и азота в титане изменяются в пределах ошибки измерения и составляют соответственно $0,08 \pm 0,01$ мас. % и $0,009 \pm 0,001$ мас. %. Кроме того, согласно данным [19] содержание кислорода и азота в металлах IV группы до концентраций 0,1 мас. % незначительно влияет на скорость диффузии в них водорода.

Таким образом, основным фактором, влияющим на разницу коэффициентов D_n и способность накапливать водород в объеме титаном в КК- и СМК-состояниях, является плотность дефектов кристаллической решетки.

Выше отмечалось, что дефектами в кристаллической решетке в исследуемых материалах в СМК-состоянии могут быть границы зерен, дислокации и вакансии. Снизить их плотность в СМК-материале без изменения размера элементов зеренно-субзеренной структуры можно путем отжига при температурах ниже температуры его рекристаллизации. В работе [20] было показано, что часовые отжиги в интервале температур 373...623 К приводят к уменьшению плотности дислокаций и вакансий в исследуемом СМК-титане без изменения размера элементов зеренно-субзеренной структуры. Поэтому с целью выяснения роли протяженности границ зерен в изменении величины коэффициента D_n и способности СМК-структуры накапливать водород в объеме плотности вакансий и дислокаций в СМК-материале была уменьшена путем отжига при температуре 573 К, 1 час. После указанного отжига плотность дислокаций в СМК-титане уменьшилась до $\sim 8 \cdot 10^9 \text{ м}^{-2}$. Из рис. 3 и табл. 2 видно, что уменьшение количества ловушек для водорода в СМК-

титане приводит к повышению значения D_n и снижению способности накапливать водород в объеме. При этом изменение плотности дислокаций в СМК-титане примерно на четыре порядка приводит к увеличению значения D_n в 1,4 и уменьшению концентрации водорода в мембране в $\sim 1,3$ раза. В то же время разница в значениях коэффициента D_n и концентрации водорода в мембранах из отожженных КК- и СМК-титана, имеющих близкие плотности дислокаций, составляет $\sim 2,2$ раза. Эти данные свидетельствуют о том, что уменьшение коэффициента D_n и увеличение способности СМК-титана накапливать водород в объеме обусловлено большей протяженностью границ зерен.

Заключение

Показано, что формирование в титане СМК-состояния приводит к снижению его эффективного коэффициента диффузии водорода и повышению способности накапливать водород в объеме, что преимущественно обусловлено большей протяженностью границ зерен в СМК-образцах по сравнению с КК.

Работа поддержана грантом правительства Российской Федерации № 11.G34.31.0003 от 01.12.2010 по направлению «Технологии водородной энергетики».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цвиккер У. Титан и его сплавы. – М.: Металлургия, 1979. – 512 с.
2. Штрель М.А. Прочность сплавов. Ч. II. Деформация. – М.: МИСиС, 1997. – 527 с.
3. Колачев Б.А., Ливанов В.А., Буханова А.А. Механические свойства титана и его сплавов. – М.: Металлургия, 1974. – 544 с.
4. Гельд П.В. Водород в металлах и сплавах. – М.: Металлургия, 1974. – 272 с.
5. Баранов В.П. Определение эффективных коэффициентов диффузии водорода в деформированных высокопрочных сталях // Современные проблемы науки и образования. – 2007. – № 1. – С. 38–41.
6. Зернограничная диффузия и свойства наноструктурных материалов / Ю.Р. Колобов и др. – Новосибирск: Наука, 2001. – 232 с.
7. Носкова Н.И., Мулюков Р.Р. Субмикроструктурные и нанокристаллические металлы и сплавы. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 278 с.
8. Лотков А.И., Батулин А.А., Гришков В.Н., Копылов В.И. О возможной роли дефектов кристаллического строения в механизмах нанофрагментирования зеренной структуры при интенсивной холодной пластической деформации // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 67–79.
9. Формирование субмикроструктурной структуры в титане и титановых сплавах и их механические свойства / Г.А. Салишев и др. // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2006. – Т. 608. – № 2. – С. 19–26.
10. Папшева Н.Д., Александров М.К., Акушская О.М. Влияние ультразвуковых колебаний на тонкую кристаллическую структуру поверхностного слоя // Известия Самарского научного центра РАН. – 2009. – Т. 11. – № 5 (2). – С. 412–415.
11. Малыхин Д.Г., Корнеева В.В. Определение плотности дислокаций по рентгеновскому анализу микроискажений в поликристаллических материалах // Вісник Харківського університету. Серія фізична. – 2010. – Вып. 1. – № 887. – С. 115–117.
12. Установка для исследования радиационного и термического выделения газов из неорганических материалов / Н.Н. Никитенков и др. // Приборы и техника эксперимента. – 2009. – № 6. – С. 110–115.
13. Тюрин Ю.И., Семенов А.М., Никитенков Н.Н. Высоковакуумный метод измерения коэффициентов диффузии легких изотопов в металлах in situ // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2004. – № 5. – С. 90–93.
14. Гельд П.В., Рябов Р.А., Кодес Е.С. Водород и несовершенство структуры металлов. – М.: Металлургия, 1979. – 221 с.
15. Колачев Б.А., Назимов О.П., Журавлев Л.Н. Диффузия водорода в титане и β -титановом сплаве ВТ-15 // Известия вузов. Цветная металлургия. – 1969. – № 4. – С. 104–109.
16. Кубашевский О., Гопкинс Б. Окисление металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1965. – 428 с.
17. Якименко Л.М. Электродные материалы в прикладной химии. – М.: Химия, 1977. – 264 с.
18. Особенности окисления субмикроструктурного титана на воздухе / А.В. Коршунов и др. // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 3. – С. 10–16.
19. Нестехиометрические соединения / под ред. Л. Манделькорна. – М.: Химия, 1971. – 607 с.
20. Грабовецкая Г.П., Колобов Ю.Р., Гирсова Н.В. Влияние холодной пластической деформации на структуру и деформационное поведение субмикроструктурного титана, полученного методом равноканального углового прессования // Физика металлов и металловедение. – 2004. – № 6. – С. 34–42.

Поступила 03.10.2012 г.

УДК 621.385.69

ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОАКСИАЛЬНОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ ТРИОДЕ С РАДИАЛЬНО РАСХОДЯЩИМСЯ ПУЧКОМ

В.П. Григорьев, А.А. Тимофеев, А.В. Григорьев

Томский политехнический университет

E-mail: grig@am.tpu.ru

Методом кинетического уравнения исследуется механизм излучения электромагнитных колебаний в цилиндрическом триоде с виртуальным катодом с расходящимся электронным пучком. Определены спектр и инкремент возбуждаемых колебаний, и получено выражение для эффективности излучения. Проведен анализ эффективности излучения от типа возбуждаемых колебаний и параметров системы. Показано, что в коаксиальном триоде преимущественно возбуждаются низшие типы колебаний. При этом наиболее эффективное возбуждение электромагнитных колебаний имеет место на ТЕМ-моде.

Ключевые слова:

Коаксиальный триод, виртуальный катод, резонатор, собственная частота, собственные функции, возбуждение колебаний, эффективность излучения.

Key words:

Coaxial triode, virtual cathode, resonator, eigenfrequency, eigenfunctions, oscillation excitation, emission efficiency.

Генераторы электромагнитного излучения на основе систем с виртуальным катодом (ВК) привлекают к себе внимание в связи с отсутствием ограничения на ток из-за пространственного заряда, что обеспечивает достижение высокого уровня мощности излучения. Наиболее перспективны в этом плане триоды с виртуальным катодом, отличительными особенностями которых являются конструктивная простота, возможность использования всего тока пучка, компактность и отсутствие внешнего магнитного поля [1]. Наиболее полно последние преимущества могут быть реализованы в цилиндрических триодах коаксиального типа.

На возможность генерации электронно-магнитного излучения в таких системах с радиально сходящимся пучком было указано в теоретических [2, 3] и экспериментальных [4] работах. Однако, как показывают исследования стационарных состояний коаксиальных триодов различной геометрии [3], более предпочтительно использовать триоды с расходящимся электронным пучком.

Кроме того, в таких приборах весьма привлекательной представляется возможность генерации бездисперсионной ТЕМ-моды, для которой можно эффективно использовать согласующие элементы, рассчитанные на узкую полосу частот. Для полного использования всех преимуществ таких коаксиальных триодов на высоком уровне мощности необходимо провести детальное исследование и установить закономерности механизма взаимодействия радиально расходящимся электронными потоками с собственными полями при формировании виртуального катода.

В данной работе исследуется устойчивость радиально расходящегося электронного потока и возбуждение электромагнитных колебаний в коаксиальном отражательном триоде с виртуальным катодом.

Схема триода в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , соответствующая реальным установкам, представлена на рис. 1. В такой геометрии объемы 1 и 2, образованные разделением внутрен-

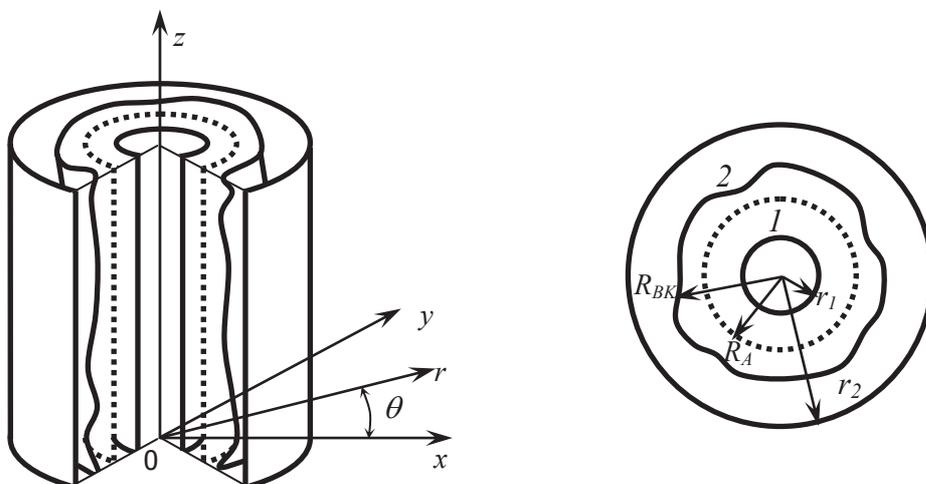


Рис. 1. Схема коаксиального триода: (r, θ, z) – цилиндрические координаты; R_K, R_A, R_{BK} – радиусы соответственно катода, анода, виртуального катода

него пространства сеточным анодом на радиусе R_A , представляют резонаторы с различными собственными частотами и типами колебаний. Радиусы катода и ВК обозначим через r_1 и R_{BK} , радиус цилиндрической камеры – r_2 , размеры резонансной системы по z – через h , а расстояние катод–анод и анод–ВК, соответственно, через ΔR_1 и ΔR_2 . Считаем, что по координате z размеры катода L_z и электронного пучка совпадают.

Основные уравнения

В стационарных радиально расходящихся электронных потоках движение электронов складывается из доминирующего радиального движения и поперечного движения по координатам r, z , которое в отсутствие внешнего магнитного поля можно учесть в виде разброса по скоростям, обеспечивающего поперечную температуру пучка в стационарном распределении.

Радиальное движение представляет нелинейные колебания в потенциальной яме $U(r)$, образованной внешним ускоряющим полем и полем пространственного заряда пучка, которая в отличие от плоских систем в коаксиальных триодах из-за кривизны является несимметричной [3]. Для описания радиального движения введем переменные – квадрат амплитуды колебаний электронов в стационарном состоянии $x=a^2$ и фазу $\varphi=\Omega t+\varphi_0$, где φ_0 – начальная фаза, а частота нелинейных колебаний $\Omega(x)$ при известном распределении потенциала $U(r)=(\gamma-\gamma_0)m_0c^2/e$ по областям $j=1-(-\pi\leq\varphi\leq 0)$ и $j=2-(0\leq\varphi\leq\pi)$ [3] определяется соответствующим временем пролета электронов от анода до точек поворота:

$$\Omega_j = \frac{\pi}{2} \left\{ \int_1^{\gamma_0} \left| \frac{dr}{d\gamma} \right| \frac{\gamma d\gamma}{c(\gamma^2-1)^{1/2}} \right\}_j^{-1}, \quad j=1,2, \quad (1)$$

где $\gamma(r)$ – относительная энергия электронов, $\gamma_0=\gamma(R_A)$, e, m_0 – элементарный заряд и масса покоя электрона соответственно.

Учитывая связь переменных (φ, x) с координатой r и импульсом $P_r, r-R_A=asin\varphi, P_r=m_0\gamma a\Omega\cos\varphi$, кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения электронов в промежутке катод – виртуальный катод под действием радиальных возмущений

$$F(\vec{r}, \vec{p}, t) = N\rho(z)[A_x f^{(0)}(x)g(p_\perp) + f^{(1)}(x, \varphi, \theta, p_\perp, t)] \quad (2)$$

запишется в виде

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \dot{\varphi} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \theta} = - \langle F_r^{(1)} \rangle \frac{2NA_x}{(m_0\gamma\Omega_r)^2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} g(\vec{p}_\perp), \quad (3)$$

где N – полное число электронов в области катод–виртуальный катод; $f^{(0)}(x), g(p_\perp), \rho_0(z)$ – стационарные распределения по соответствующим переменным, $\int f^{(0)}(x)g(p_\theta, p_z)dx dp_\theta dp_z = 1, \int \rho_0(z)dz = 1$ и интегри-

рование проводится по области, занятой пучком; $f^{(1)} \sim f_{on}^{(1)} \exp(i\varphi - i\omega t + in\theta)$ – функция распределения электронов, связанная с возмущением; $\langle \rangle$ – усреднение силы возмущения по координате z , что справедливо при $L_z < \lambda, p_\perp = \sqrt{p_\theta^2 + p_z^2}; A_x = A/2\pi^2 m_0 \gamma_0 \Omega_0 R_A$,

$$A = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(x_0, \varphi)}{2\pi\gamma_0} \left(1 + \frac{\sqrt{x_0}}{R_A} \sin\varphi \right) d\varphi \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Сила возмущений, действующая на электроны $E_r^{(1)} = -eE_r^{(1)}$, в общем случае определяется суммарным полем, связанным как с возмущением плотностей тока и заряда пучка, так и с искажением формы потенциальной ямы, обусловленной колебаниями виртуального катода. Однако при возбуждении электромагнитных колебаний, как показано в [1, 2], доминирующим оказывается взаимодействие на собственных модах резонансной системы, обусловленное возмущениями плотности тока электронов. Принимая это во внимание для вычисления $E_r^{(1)}$, используем метод разложения по собственным функциям резонатора $\vec{E}_n(\rho)$ [5], $E_r^{(1)} = -D_\lambda \varphi_\lambda(r) \sin k_z z e^{im\theta}, \lambda = E, H$. При этом следует учитывать, что в такого типа системах резонансное взаимодействие на собственных модах может происходить как для E -волн:

$$\Psi_E^{(r)} = J'_n(k_\perp r) - [J_n(k_\perp R_A) / N(k_\perp R_A)] N'_n(k_\perp r), \quad (5)$$

H -волн:

$$\Psi_H^{(r)} = J_n(\hat{K}_\perp r) - [J'_n(\hat{k}_\perp R_A) / N'(\hat{k}_\perp R_A)] N_n(\hat{k}_\perp r), \quad (6)$$

так и для ТЕМ-волны $\Psi_{TEM}^{(r)} = R_A/r$, где $J_n(\chi)$ и $N_n(\chi)$ – функции Бесселя и Неймана порядка n ; $J'_n(\chi)$ и $N'_n(\chi)$ – их производные по аргументу; k_\perp и \hat{k}_\perp – поперечные волновые числа E - и H -волн, определяемые из уравнений $\Psi_E(k_\perp r_{1,2}) = 0$ и $\Psi'_H(\hat{k}_\perp r_{1,2}) = 0$ в соответствующих областях.

Проводя разложение поля по гармоникам $\exp(i\varphi - i\omega t)$ и учитывая несимметричность системы (1), из (2)–(4) можно получить дисперсионное уравнение, описывающее возбуждение электромагнитных колебаний в рассматриваемом триоде

$$1 = \sum_{j=1}^2 \left\{ \Lambda A c^2 \int \frac{iZ_\lambda(\omega, x)}{\Delta_l} g(\vec{p}_\perp) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} d\Gamma \right\}_j, \quad (7)$$

где

$$d\Gamma = dx dp_\theta dp_z, \quad \Lambda = \frac{\omega e^2}{4\pi\gamma_0\Omega_0^2},$$

$$\omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_0}, \quad n_e = \frac{N_b}{\pi\Delta(R^2)L_z}.$$

$$Z_\lambda(\omega, x) = -i8\pi^2 D_\lambda^2 \rho_\perp^2 \frac{\Omega_0^2 \Delta(R^2)L}{c^2 R_A} J_\lambda = \frac{\omega + i\alpha_\lambda}{\Delta_\lambda^2} = Z_\lambda(0, x) \frac{\omega + i\alpha_\lambda}{\Delta_\lambda^2} \quad (8)$$

– импеданс, зависящий от типа возбуждаемых колебаний и параметров резонансной системы (1 или 2).

$$D_\lambda^2 = \frac{2\varepsilon_m d^2}{\pi h R_A \Phi_\lambda}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0 \end{cases},$$

$$\Phi_E = \left\{ \frac{r^2}{R_A^2} [\Psi'_E(k_\perp r)]^2 \right\}_{r_{\min}}^{r_{\max}},$$

$$\Phi_H = \left\{ \frac{r^2}{R_A^2} \left(1 - \frac{n^2}{\hat{k}_\perp^2 r^2} \right) \Psi_H^2(\hat{k}_\perp r) \right\}_{r_{\min}}^{r_{\max}},$$

$$\Phi_{TEM} = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{r_{1,2}}{R_A} \right|,$$

$$J_\lambda = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int \frac{r}{R_A} \gamma \cos \varphi \Psi_\lambda^*(r) e^{i\varphi} d\varphi \right] \times$$

$$\times \left[\int \frac{\cos \varphi}{\gamma} \Psi_\lambda(r) e^{-i\varphi} d\varphi \right], \quad (9)$$

φ_E области 1 или 2 соответственно, $\Delta(R^2) = r_{\max}^2 - r_{\min}^2$, r_{\min}^2 и r_{\max}^2 – наименьший и наибольший радиусы в областях 1 или 2.

$$\rho_\perp = \int_0^h \sin k_z z \rho_0(z) dz, \quad \Delta_l = \omega - l\Omega(x) - n\dot{\theta} - k_z v_z.$$

$$\Delta_\lambda^2 = \omega_\lambda^2 - \omega^2 - i\omega\alpha,$$

$$\alpha_\lambda = (1-i)\sqrt{\omega\omega_\lambda} / Q_\lambda, \quad \omega_\lambda = ck = c(k_z^2 + k_{\perp,\lambda}^2)^{1/2}$$

– собственная частота резонансного объема (1 или 2); Q_λ – добротность; $k_z = m\pi/h$, $m=1,2,3,\dots, k_{\perp,E} = k_\perp = \mu_S/R_A$, $k_{\perp,H} = \hat{k}_\perp = \hat{\mu}_S/R_A$, $\mu_S = \mu_{nS}$ и $\hat{\mu}_S = \hat{\mu}_{nS}$ – корни уравнений $\Psi'_E(r)=0$ и $\Psi'_H(r)=0$ соответственно.

Анализ дисперсионного уравнения.

Эффективность излучения

Из общего анализа дисперсионного уравнения (7) следует, что возбуждение когерентных колебаний электронного потока происходит на частотах, близких к частотам колебаний электронов в потенциальной яме или их гармоникам $\omega = l\Omega_j + \delta_\omega$, $|\delta_\omega| \ll l\Omega_j$. На этих же частотах возбуждаются электромагнитные колебания и колебания виртуального катода. При этом, как показано экспериментально и теоретически [1, 2], основное излучение генерируется в области, содержащей виртуальный катод. Учитывая последнее, достаточно рассмотреть резонансную область – 2.

Исследование возбуждения электромагнитных колебаний в коаксиальном триоде проведем для стационарного распределения вида:

$$f^{(0)}(x)g(\vec{p}_\perp) = \frac{1}{\pi^3} \frac{\Delta x}{\tilde{x}^2 + \Delta x^2} \cdot \frac{\Delta p_\theta}{p_\theta^2 + \Delta p_\theta^2} \frac{\Delta p_z}{p_z^2 + \Delta p_z^2}, \quad (10)$$

где $\tilde{x} = x - x_0$ – отклонение квадрата амплитуды колебаний электронов от среднего значения; Δx , $\Delta p_{\theta,z}$ – разбросы по соответствующим переменным.

В пределе Δx , $\Delta p_{\theta,z} \rightarrow 0$ распределение (10) описывает поток моноэнергетических осцилляторов.

Проводя интегрирование в уравнении (7) при малых разбросах, получим, что возбуждение электромагнитных колебаний на собственных частотах резонатора ($\omega \approx \omega_\lambda \approx \Omega_2$) происходит с инкрементом

$$\varsigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \Lambda A(iZ(0, x_0)) \frac{lc^2}{2\Omega_0^2 x_0} |K| \right\}^{1/3} \Omega_0 -$$

$$-\xi \Omega_0 - \frac{n}{R_A} \Delta v_\theta - k_z \Delta v_z - \frac{l\Omega_0}{\delta Q_\lambda}, \quad (11)$$

где $K = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 \frac{x_0}{\Omega_0}$ – параметр нелинейности;

$\xi = l |K| \frac{\Delta x}{x_0}$, $\Delta v_{\theta,z} = \frac{\Delta p_{\theta,z}}{m_0 \bar{\gamma}}$ – разбросы по скоро-

стям, усредненные в промежутке $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Из (11) и анализа выражения импеданса (8) следует, что наиболее быстрый рост электромагнитных колебаний происходит на низших типах колебаний резонатора по поперечным волновым числам. Кроме того, как и для плоских триодов [1], здесь сохраняется вывод о преимущественном возбуждении когерентных колебаний на первой гармонике $l=1$.

Выражение для эффективности излучения получим из условия выхода возбуждения электромагнитных колебаний на стационарный режим.

В рассматриваемом случае выход на стационарный режим возбуждаемых колебаний и уровень излучения связаны с нелинейностью движения электронов $\Delta \Omega = (\partial \Omega / \partial x)_0 (x - s)$ и выходом их из резонанса с возбуждаемой электромагнитной волной. Условие нарушения резонанса имеет вид:

$$|\Omega_0 - \Omega_s| = 2 |R_e \delta_\omega| = 2\varsigma / \sqrt{3}, \quad (12)$$

где a_s , Ω_s – амплитуда и частота колебаний осциллятора в момент насыщения.

Учитывая изменение энергии слаборелятивистского нелинейного осциллятора за счет изменения его амплитуды в процессе излучения

$$\delta \xi_{\text{осц}} =$$

$$= -\frac{m_0}{2} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} x \Omega^2 + \gamma \Omega^2 + 2\gamma x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega \right]_0 (x - x_s) \quad (13)$$

и определяя эффективность излучения η соотношением $\eta = \delta \xi_{\text{осц}} / \xi_{\text{осц}}$ из (11), (12), (13), получим:

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\varsigma}{l\Omega_0 |K|} \left| 1 + \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} + 2K \right|. \quad (14)$$

Из соотношений (8), (9), (11), (14) следует, что эффективность излучения зависит от геометрии диода, внешнего напряжения энергетического разброса электронов и типа возбуждаемых колебаний. Поэтому для получения максимальной эффективности излучения необходимо провести исследование импеданса и инкремента от типа колебаний.

В рассматриваемой резонансной системе возможно возбуждение как E - и H -волн, так и ТЕМ-волны. Однако прежде чем проводить сравнительный анализ эффективности возбуждения этих типов колебаний, заметим, что достаточно проанализировать низшие типы. Это обусловлено зависимостью импеданса от функций Бесселя, которые, как известно, достаточно быстро спадают с ростом порядка и увеличением аргумента. Кроме того, как

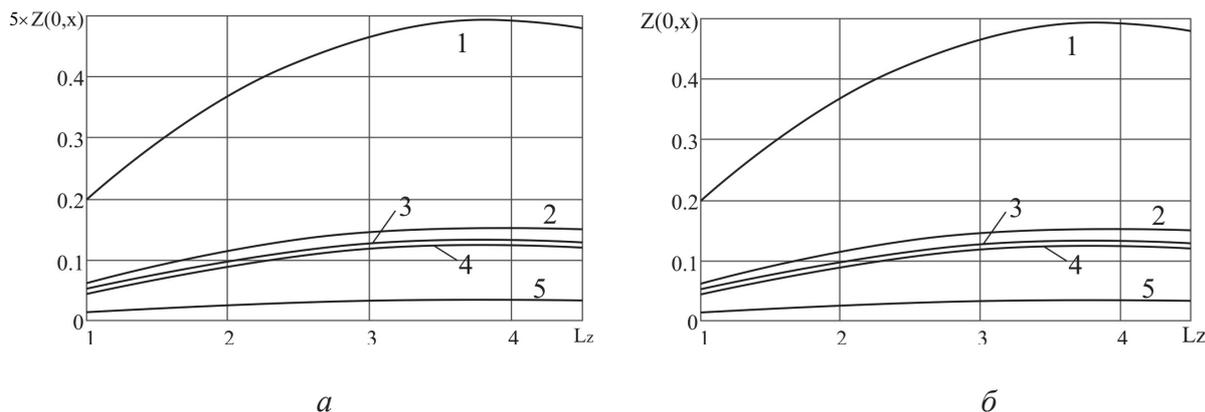


Рис. 2. Зависимость импеданса $Z(0,x)$ от длины катода L_z . 1 – ТЕМ, $m=9$; 2 – E_{019} ; 3 – H_{019} ; 4 – E_{119} ; 5 – H_{110} . Расстояние центра катода от края камеры: а) $L=14,8$ см, б) $L=13,0$ см

следует из выражений (11) и (14), для более высоких мод возрастает роль разбросов по импульсам электронов p_θ, p_z в подавлении возбуждения этих колебаний, что также ведет к снижению эффективности излучения на высоких модах. С учетом этого расчет и анализ импедансов проведем на низших типах колебаний для параметров экспериментальной установки [3]: $r_1=5,5$ см; $r_2=15,5$ см; $R_A=6,7$ см; $h=52$ см; ускоряющее напряжение 500...600 кВ и частота излучения $\omega=\Omega_0=1,812 \cdot 10^{10}$ с⁻¹.

Для приведенных параметров наиболее близкими по собственным частотам ω_p к частоте Ω_0 будут колебания ТЕМ, $m=9$, E_{019} , E_{119} , H_{019} и H_{110} . Зависимость импедансов $Z(0,x)$ для указанных типов колебаний и однородного пучка по координате z приведены на рис. 2.

Из сравнения графиков нетрудно заметить, что наиболее высокий импеданс для однородного по z пучка достигается при помещении катода в максимум волны. Кроме того, из поведения кривых на рис. 2 и выражений (11), (14) следует, что в коаксиальном триоде с расходящимся пучком наиболее эффективно возбуждается ТЕМ-мода. Этот вывод подтверждается еще тем, что с ТЕМ-модой наиболее просто осуществить резонанс одновременно в объемах 2–1. Что касается возбуждения других типов колебаний, то для согласования их резонансных условий в объемах 2 и 1 требуются дополнительные технические решения.

Используя выражение (14) и зависимость параметра нелинейности K от диодного напряжения [2], можно получить, что при возбуждении ТЕМ-моды в триоде с моноэнергетическим пучком $\zeta(\Delta x=\Delta p_{\theta,z}=0)=\zeta_0$,

$\gamma_0 \sim 2,0 \dots 2,5$ при $\lambda \sim 10$ см и $\zeta_0/\Omega_0 \sim 0,15 \dots 0,22$ теоретическая эффективность равна $\eta \sim 35 \dots 50$ %. Для повышения эффективности излучения в реальных установках необходимо оптимизировать параметры установки и согласование вывода электромагнитной энергии из резонансной системы.

Выводы

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Возбуждение электромагнитных колебаний в коаксиальном отражательном триоде с радиально расходящимся пучком происходит на частоте когерентных колебаний ω , близкой к частоте осциллирующих электронов, которая определяется распределением потенциала $U(r)$. Зависимость частоты когерентных колебаний от резонансного контура слабая и определяется величиной $\text{Re} \Delta_{\zeta_0}(\zeta_0/\omega) \ll 1$. При этом $\omega > \Omega_0$.
2. Наибольший рост возбуждаемых колебаний и эффективность излучения соответствуют колебаниям на первой гармонике $l=1$, приводящим к колебаниям центра тяжести электронного облака осциллирующих электронов (и ВК).
3. В таких системах преимущественно возбуждаются низшие типы электромагнитных колебаний. При этом наиболее высокая эффективность излучения достигается при настройке резонансной системы на возбуждение ТЕМ-моды.

Работа выполнена по теме Государственного задания «Исследование механизма СВЧ излучения и методов повышения эффективности коаксиального виркатора и релятивистского магнетона». № НИР 0.58.2012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диденко А.Н., Григорьев В.П., Жерлицын А.Г. Генерация электромагнитных колебаний в системах с виртуальным катодом // Плазменная электроника / под ред. В.И. Курилко. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 112–131.
2. Григорьев В.П. Электромагнитное излучение в коаксиальном триоде с виртуальным катодом // Журнал технической физики. – 1994. – Т. 64. – № 7. – С. 122–129.
3. Григорьев В.П., Коваль Т.В., Мельников Г.В., Рахматуллин Р.Р. Коаксиальный отражательный триод с радиально расходя-

щимся пучком // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 4. – С. 123–127.

4. Жерлицын А.Г., Коваль Т.В., Канаев Г.Г., Нгуен М.Т. Исследование генерации электромагнитного излучения в коаксиальном виркаторе с расходящимся пучком // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 81–85.
5. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. – Л.: ВКАС, 1949. – 426 с.

Поступила 14.02.2013 г.

УДК 620.17

ОЦЕНКА СДВИГАЮЩИХ УСИЛИЙ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОЖИЛЬНОГО КАБЕЛЯ ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ ИЗГИБА

Г.М. Исмаилов, М.С. Павлов*, А.Е. Тюрин**

Томский государственный педагогический университет

*Томский политехнический университет

**Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

E-mail: gmismailov@rambler.ru

Рассмотрены вопросы оценки силового взаимодействия элементов кабельных конструкций при деформациях изгиба. Получены выражения для оценки величины сдвигающих усилий в многожильных кабелях, возникающих при намотке, на основе представления многожильного кабеля как составного стержня с абсолютно жесткими поперечными связями.

Ключевые слова:

Кабель, сдвиги, сдвигающие усилия, токопроводящая жила, четырехслойный составной стержень, упругий.

Key words:

A cable, displacements, shifting efforts, current thread, a four-layer compound beam, elastic.

При работе передвижных машин и механизмов гибкие кабели, предназначенные для соединения с источниками питания, эксплуатируются в тяжелых условиях, подвергаясь значительным циклическим нагрузкам. Практика эксплуатации показывает, что самой распространенной деформацией является циклический изгиб и его сочетание с другими видами деформации, приводящие к разрушению проволок в токопроводящей жиле (ТПЖ), истиранию изоляционных и шланговых покрытий, что влечет за собой электрический пробой изоляции. Повышение работоспособности кабелей при механических деформациях с обеспечением необходимых прочностных характеристик элементов конструкции является одним из главных направлений разработки кабельных изделий.

В работе [1] экспериментальным путем определены усилия взаимодействия между элементами при выдергивании элементов из кабеля аналогично опыту Келли. Известен также способ определения силы трения и коэффициента трения [2], позволяющий определить усилия трения между элементами конструкции кабеля. Эти способы требуют проведения дополнительного эксперимента с готовыми изделиями и производятся без деформации, например изгиба кабеля. При проведении эксперимента трудно установить связь геометрических параметров со сдвигающими усилиями. Задача определения сдвигающих усилий до сих пор не решена теоретически.

Целью данной работы является определение сдвигающих усилий в многожильных кабелях при деформациях изгиба с учетом геометрических и механических характеристик материалов кабеля.

Заводом-изготовителем даются эксплуатационные характеристики, при соблюдении которых может быть обеспечена работоспособность кабеля в течение срока службы. Для гибких кабелей одним из таких параметров является минимальный радиус изгиба при монтаже и эксплуатации. Поэтому рассмотрим случай из практики намотки кабеля на барабан определенного радиуса.

Решение задач определения сдвигающих усилий для элементов кабеля возможно, если кабель представлен как составной стержень с абсолютно жесткими поперечными связями с использованием уравнений сдвигающих усилий из общей теории составных стержней [3]. Для упрощения задачи введем следующие допущения: медные проволоки жилы считаем сплошными медными стержнями; токопроводящие жилы расположены параллельно друг другу (без скрутки). Модельно мы рассматриваем систему как многослойную пластину в условиях плоской деформации. Переход к осесимметричной задаче осуществляется с помощью преобразования $G(1/x)$ [4].

При намотке на барабан радиуса R на кабель действует изгибающий момент M^0 , определяемый из соотношения [5]:

$$M^0 = \frac{EJ_x}{R},$$

где E – приведенный модуль упругости кабеля; J_x – момент инерции сечения кабеля.

Определим сдвигающие усилия между элементами в трех- и четырехжильных кабелях (рис. 1).

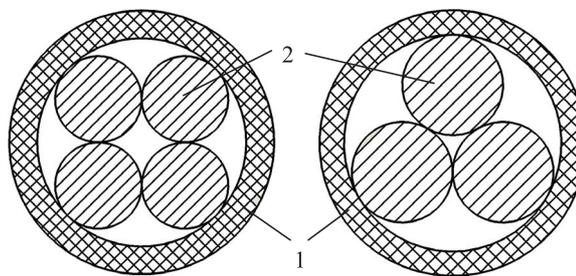


Рис. 1. Сечения трех- и четырехжильного кабелей: 1) внешняя изоляция; 2) токоведущие жилы с внутренней изоляцией

Каждый из этих кабелей может быть представлен как четырехслойный составной стержень (рис. 2). Предполагается, что токопроводящая жи-

ла и окружающая ее внутренняя изоляция работают как единое целое, а вклад внутренней изоляции в жесткость жилы несущественен.

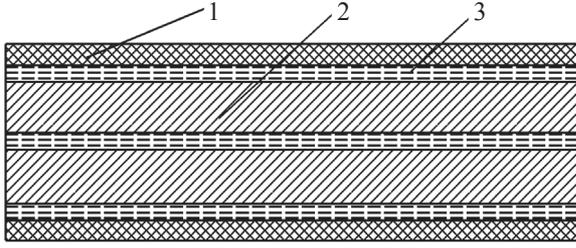


Рис. 2. Составной четырехслойный стержень: 1) стержень, изгибная жесткость которого равна жесткости полуцилиндра внешней изоляции; 2) стержень, изгибная жесткость которого равна жесткости пакета токопроводящих жил; 3) продольные связи соединения слоев

Введем следующие обозначения: r_n – внешний радиус сечения кабеля, r_t – радиус токоведущей жилы; F_n, J_n – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции полуцилиндра внешней изоляции соответственно; F_t, J_t – площадь поперечного сечения и момент инерции токоведущей жилы; E_n, E_t – модули упругости материалов внешней изоляции и токоведущей жилы соответственно.

Сдвигающие усилия в эквивалентном четырехслойном стержне можно определить из системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \left(\frac{T_1'}{\xi_1}\right)' - \Delta_{11}T_1 - \Delta_{12}T_2 - \Delta_{13}T_3 = \Delta_{10}; \\ \left(\frac{T_2'}{\xi_2}\right)' - \Delta_{21}T_1 - \Delta_{22}T_2 - \Delta_{23}T_3 = \Delta_{20}; \\ \left(\frac{T_3'}{\xi_3}\right)' - \Delta_{31}T_1 - \Delta_{32}T_2 - \Delta_{33}T_3 = \Delta_{30}, \end{cases} \quad (1)$$

где ξ_i – коэффициент сдвиговой жесткости i -го шва; T_i – суммарное сдвигающее усилие в i -м шве, накапливаемое по длине стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $T_i = \int_0^x \tau_i dx$, где τ_i – сдвигающее усилие, приходящееся на единицу длины i -го шва; x – координата рассматриваемого сечения.

Коэффициенты Δ_{ij} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{M^0 c_1}{\sum EJ} = \frac{1}{R} c_1, \quad \Delta_{20} = \frac{1}{R} c_2, \quad \Delta_{30} = \frac{1}{R} c_3, \\ \Delta_{11} &= \frac{1}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{c_1^2}{\sum EJ}, \\ \Delta_{22} &= \frac{1}{E_3 F_3} + \frac{1}{E_2 F_2} + \frac{c_2^2}{\sum EJ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{33} &= \frac{1}{E_4 F_4} + \frac{1}{E_3 F_3} + \frac{c_3^2}{\sum EJ}, \\ \Delta_{12} = \Delta_{21} &= -\frac{1}{E_2 F_2} + \frac{c_1 c_2}{\sum EJ}, \\ \Delta_{23} = \Delta_{32} &= -\frac{1}{E_3 F_3} + \frac{c_2 c_3}{\sum EJ}, \\ \Delta_{13} = \Delta_{31} &= \frac{c_1 c_3}{\sum EJ}, \end{aligned}$$

где c_i – расстояние между центрами тяжести элементов составного стержня, соединенных i -м швом.

Учитывая, что $E_1 F_1 = E_4 F_4 = E_n F_n$, и жесткости на растяжение токопроводящих жил одинаковы и равны $E_t F_t$, для трехжильного и четырехжильного (учитывая, что $c_1 = c_3$) кабелей, получаем формулу для определения коэффициентов Δ_{ij} и расстояния c_i (табл. 1, 2).

Площади поперечного сечения элементов составного стержня:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\pi}{2} (r_n^2 - r_c^2); \\ F_t &= \pi r_t^2. \end{aligned}$$

Моменты инерции полуцилиндра внешней изоляции трехжильного кабеля:

$$\begin{aligned} J_n &= 0,11 \left(r_n^4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right) r_t^4 \right) - \\ &- 0,238 r_n^2 r_t^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right) \frac{r_n - r_t \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right)}{r_n + r_t \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Моменты инерции полуцилиндра внешней изоляции четырехжильного кабеля:

$$\begin{aligned} J_n &= 0,11 (r_n^4 - (\sqrt{2} + 1) r_t^4) - \\ &- 0,238 r_n^2 (\sqrt{2} + 1) r_t^2 \frac{r_n - (\sqrt{2} + 1) r_t}{r_n + (\sqrt{2} + 1) r_t}. \end{aligned}$$

Момент инерции токоведущей жилы:

$$J_t = \frac{\pi}{4} r_t^4.$$

Суммарная изгибная жесткость трехжильного кабеля:

$$\sum EJ = 2E_n J_n + 3E_t J_t.$$

Суммарная изгибная жесткость четырехжильного кабеля, соответственно,

$$\sum EJ = 2E_n J_n + 4E_t J_t.$$

Система уравнений равновесия (1) может быть приближенно сведена к одному уравнению, основываясь на принципе минимума потенциальной

энергии внутренних сил. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид:

$$T'' - \lambda_0^2 T = \Delta_0, \quad (2)$$

где T – некоторое усилие, не зависящее от номера шва, такое, что

$$T_i = \alpha_i T, \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$\lambda_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \alpha_i \alpha_j}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 / \xi_i}; \quad \Delta_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{i0} \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 / \xi_i},$$

здесь n – число швов составного стержня (в рассматриваемом случае $n=3$).

Таблица 1. Формулы для определения коэффициентов Δ_{ij}

| Коэффициенты | Для трехжильного кабеля | Для четырехжильного кабеля |
|-----------------------------|---|---|
| Δ_{10} | $\frac{M^0 c_1}{\sum EJ} = \frac{1}{R} c_1$ | $\frac{M^0 c_1}{\sum EJ} = \frac{1}{R} c_1$ |
| Δ_{20} | $\frac{1}{R} c_2$ | $\frac{1}{R} c_2$ |
| Δ_{30} | $\frac{1}{R} c_3$ | $\frac{M^0 c_1}{\sum EJ} = \frac{1}{R} c_1$ |
| Δ_{11} | $\frac{1}{E_t F_t} + \frac{1}{E_n F_n} + \frac{c_1^2}{\sum EJ}$ | $\frac{2}{E_t F_t} + \frac{1}{E_n F_n} + \frac{c_1^2}{\sum EJ}$ |
| Δ_{22} | $\frac{3}{E_t F_t} + \frac{c_2^2}{\sum EJ}$ | $\frac{4}{E_t F_t} + \frac{c_2^2}{\sum EJ}$ |
| Δ_{33} | $\frac{1}{E_n F_n} + \frac{2}{E_t F_t} + \frac{c_3^2}{\sum EJ}$ | $\frac{2}{E_t F_t} + \frac{1}{E_n F_n} + \frac{c_1^2}{\sum EJ}$ |
| $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ | $-\frac{1}{E_t F_t} + \frac{c_1 c_2}{\sum EJ}$ | $-\frac{1}{E_t F_t} + \frac{c_1 c_2}{\sum EJ}$ |
| $\Delta_{23} = \Delta_{32}$ | $-\frac{2}{E_t F_t} + \frac{c_1 c_3}{\sum EJ}$ | $-\frac{1}{E_t F_t} + \frac{c_1 c_2}{\sum EJ}$ |
| $\Delta_{13} = \Delta_{31}$ | $\frac{c_1 c_3}{\sum EJ}$ | $\frac{c_1^2}{\sum EJ}$ |

Таблица 2. Расстояния между центрами тяжести составного стержня

| Расстояние c_i | Для трехжильного кабеля | Для четырехжильного кабеля |
|------------------|--|--|
| c_1 | $\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_n^3 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) r_t^3}{R_n^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) r_t^2} - \frac{2r_t}{\sqrt{3}}$ | $\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_n^3 - (\sqrt{2} + 1) r_t^3}{R_n^2 - (\sqrt{2} + 1) r_t^2} - r$ |
| c_2 | $r_t \sqrt{3}$ | $2r_t$ |
| c_3 | $\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_n^3 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) r_t^3}{R_n^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) r_t^2} - \frac{r_t}{\sqrt{3}}$ | $\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_n^3 - (\sqrt{2} + 1) r_t^3}{R_n^2 - (\sqrt{2} + 1) r_t^2} - r$ |

Целесообразно положить $\alpha_i \approx c_i$, так как сдвиговая жесткость швов ξ_i , определяемая площадью контакта жил и внешней изоляции, невелика. Решение уравнения (2) есть

$$T = A \operatorname{sh} \lambda_0 x + B \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \Delta_0 \operatorname{sh} \lambda_0 (x-t) dt =$$

$$= A \operatorname{sh} \lambda_0 x + B \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \Delta_0 (\operatorname{ch} \lambda_0 x - 1),$$

тогда

$$T' = A \lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 x + B \lambda_0 \operatorname{sh} \lambda_0 x + \Delta_0 \operatorname{sh} \lambda_0 x.$$

Постоянные коэффициенты A, B определяются из граничных условий:

$$x = 0; \quad T' = 0; \Rightarrow \quad A = 0;$$

$$x = l; \quad T = 0; \Rightarrow \quad B = \frac{\Delta_0 (1 - \operatorname{ch} \lambda_0 l)}{\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 l}.$$

Окончательно

$$T = \frac{\Delta_0 (1 - \operatorname{ch} \lambda_0 l)}{\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 l} \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \Delta_0 (\operatorname{ch} \lambda_0 x - 1).$$

Окончательно усилия T_i определим как

$$T_1 = c_1 \left(\frac{\Delta_0 (1 - \operatorname{ch} \lambda_0 l)}{\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 l} \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \Delta_0 (\operatorname{ch} \lambda_0 x - 1) \right);$$

$$T_2 = c_2 \left(\frac{\Delta_0 (1 - \operatorname{ch} \lambda_0 l)}{\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 l} \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \Delta_0 (\operatorname{ch} \lambda_0 x - 1) \right);$$

$$T_3 = c_3 \left(\frac{\Delta_0 (1 - \operatorname{ch} \lambda_0 l)}{\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 l} \operatorname{ch} \lambda_0 x + \frac{1}{\lambda} \Delta_0 (\operatorname{ch} \lambda_0 x - 1) \right).$$

Определяемые сдвиговые усилия есть сила трения между элементами кабеля. Механизм циклического износа слоев изоляции может быть реализован, если рассмотренный выше механизм циклического поперечного изгиба кабеля протекает с малой интенсивностью, а ТПЖ испытывают свободные циклические сдвиги, взаимодействуя между собой по поверхностям контакта усилиями трения скольжения, то есть уровень относительных сдвигов жил превышает уровень упругих сдвигов. Так как закон распределения сдвигов по поверхностям контакта на длине зоны деформации имеет зону экстремальных сдвигов, то механизм циклического износа слоя изоляции локализуется именно в этой зоне [6].

Результатом циклического износа является отказ по типу межжильного замыкания вследствие полного износа двойного слоя изоляции соседних ТПЖ. Определяющими работоспособность параметрами цикла являются амплитуда сдвигов и касательных напряжений по поверхности контакта, в свою очередь зависящая от фрикционных свойств материалов слоев изоляции, и усилия нормального взаимодействия.

Предложенное решение является упрощенным. Поэтому результаты вычислений по данным формулам следует считать оценочными, подлежащими уточнению, например численными методами.

На основании полученных формул можно отметить, что сдвиговые усилия в кабелях зависят от материала элементов, геометрических параметров, радиуса изгиба и длины зоны деформации кабеля. Полученные данные расчетов позволяют оце-

нить сдвиговые усилия (касательные напряжения) по поверхности контакта элементов кабеля. Оценка надежности изоляции и механической прочности производится сравнением действительных значений напряжений для контактирующих элементов с допускаемыми значениями для материалов кабеля. Это является предпосылкой прогнозирования работоспособности и обеспечения механической прочности с учетом контактного взаимодействия элементов конструкции кабеля. Достоинством предложенных решений является простота, а также возможность их применения на более сложные виды конструкции кабеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исмаилов Г.М., Мусалимов В.М., Шиянов В.Д., Луговинов С.В. Оценка силового взаимодействия элементов конструкции кабеля при изгибе // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – № 2. – Т. 318. – С. 44–48.
2. Способ определения силы трения и коэффициента трения: пат. Рос. Федерации № 2408869, № 2009139603/28; заявл. 26.10.2009; опубл. 10.01.2011, Бюл. № 1. – 8 с.
3. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

Заключение

Получены выражения для оценки величины сдвигающих усилий в трехжильном и четырехжильном кабелях, возникающих при намотке, на основе представления многожильного кабеля как составного стержня с абсолютно жесткими поперечными связями. Приближенное решение получено путем замены системы дифференциальных уравнений для многослойного стержня одним уравнением минимума потенциальной энергии. Полученное решение не распространяется на области, близкие к концам кабеля, равным пяти диаметрам стержня.

4. Мусалимов В.М., Соханев Б.В., Мокряк С.Я. Элементы механики кабельных конструкций. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. – 120 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
6. Соханев Б.В., Исмаилов Г.М., Мусалимов В.М. Оценка сдвигов элементов конструкции гибкого кабеля // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2007. – № 6. – С. 26–29.

Поступила 11.07.2012 г.

УДК 530.1:519.2:681.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭНТРОПИЙНОЙ ОЦЕНКИ ЖИВУЧЕСТИ СИСТЕМ

В.С. Деева, С.А. Романишина*, С.М. Слободян

Томский политехнический университет

*Житомирский национальный агроэкологический университет, Украина

E-mail: sms_46@ngs.ru

Установлена связь оценки изменения надёжности отдельных элементов и самой системы или устройства с энтропией как мерой оценки неопределенности состояния систем, вызванного рядом случайных эксплуатационных нарушений их функционирования в процессе практического применения. В предположении справедливости показательного (экспоненциального) закона распределения вероятности времени безотказной работы системы найдено, что диапазон количественных значений энтропийной оценки для различных типов элементов, узлов, устройств лежит в определённом диапазоне интервала изменений уровня энтропийного показателя, подобного хаотическому показателю Херста.

Ключевые слова:

Энтропия, оценка, живучесть, хаос, показатель Херста, система.

Key words:

Entropy, estimation, vitality, chaos, Hurst coefficient, system.

Введение

В настоящее время в практике большинства отраслей экономик многих стран, физический эксперимент и производство не являются исключением, наблюдаются две сильные тенденции. Первая – постоянный рост цен на энергоносители. Вторая – постоянный рост энерговооружённости любого технического, в том числе и экспериментального, оборудования и т. п., усиление степени комплексирования элементов автоматизации, компьютериза-

ции и специализации по направлениям практического применения. Обе тенденции существуют на фоне возрастающих требований к повышению экономичности технологических процессов, применения энергосберегающих технологий и производств, усиления мер по снижению энергетических потерь.

Первая тенденция, обусловленная ростом расходов на энергоносители, приводит к необходимости исключения даже малозначимых сбоев и ава-

рийных ситуаций в работе техники, приводящих к загрязнению окружающей среды. Вторая тенденция усиливает внимание к функциональной надёжности оборудования, ставя задачу обеспечения надёжности по рейтингу проблем в группу первоочередных. Приоритет внимания к проблеме надёжности оборудования существует на всех этапах его жизненного пути (проектирования, изготовления и эксплуатации). Поэтому решение этих задач являет собой целый комплекс экономических, экологических и научно-технических проблем.

Как показывает анализ литературных источников, проблема энергосбережения решается на уровне отдельных задач, таких как экономия энергоресурсов, проведение диагностики энергетического и другого оборудования. Важной задачей также является сокращение трудоёмкости технического обслуживания любых технических средств, функционирующих часто, если пользоваться понятием термодинамики, как открытые системы, которые находятся в состоянии непрерывного взаимодействия и взаимного обмена (энергией, веществом, информацией) с окружающей средой, в том числе и социальной.

В таких случаях наилучшим подходом и, наверное, наиболее качественным для получения всеобщей меры оценки неопределённости, беспорядка, хаоса и неорганизованности подобного рода вероятностных систем и средств любой природы будет являться вероятностный [1–10], в том числе и энтропийный, подход, рассматриваемый в настоящей работе в приложении к оценке живучести устройств и систем.

Получение рационального результата связано с решением теоретических, методологических и практических задач обеспечения функциональной надёжности оборудования, учитывая тот факт, что как на стадии проектирования, так и на стадиях последующего применения любого оборудования на практике всегда присутствует элемент неопределённости в принятии конкретных решений, конкретных областей и условий эксплуатации. При этом основной упор в направлении решений подобных задач должен быть сделан на определение оптимального, экономически оправданного, достижимого уровня надёжности с учётом обеспечения безопасности эксплуатации рассматриваемых средств, а также на оказание большего внимания разработке вероятностных методов расчётов, основанных на использовании статистического и экспериментального материала, для нахождения оптимальных решений на стадиях проектирования, изготовления и технической эксплуатации этих средств.

Несмотря на значительное число работ по изучению надёжности, проведение исследований применительно к оборудованию физического эксперимента и техники с учётом её мобильности и подвижности по-прежнему является актуальным и имеет существенную и практическую значимость. Это объясняется весьма значительными мате-

риальными затратами при её отказах, приводящих к снижению экономической эффективности средств и физических установок в целом.

Основные положения оценки вероятностных свойств

Для оценки живучести любого оборудования как технического средства, согласно основам теории вероятности [2, 3], можно записать:

$$P_{\Sigma} = \prod_i P_i \begin{cases} \leq 1 \\ \geq 0 \end{cases},$$

где P_i – уровни запаса надёжности на соответствующих этапах жизни оборудования (проектной, технологической, эксплуатационной). В идеальном случае, уровень надёжности $P_{\Sigma} \approx 1$; в реальной практике $P_{пр} > P_{тех} > P_{экс}$ и в результате $P_{\Sigma} < 1$ (т. е. на всех последующих стадиях жизни техники уровень надёжности по сравнению с теоретически заложенной в проекте будет ниже). Это практически подтверждает факт неизбежного снижения ресурса запаса надёжности на всех последующих стадиях жизни.

Анализ многочисленных публикаций и статистических исследований [1–4] говорит о том, что снижение ресурса надёжности оборудования является следствием влияния естественных процессов изнашивания, эрозии, коррозионных и других процессов с электрохимическими и термическими явлениями, приводящих к постепенным и внезапным отказам элементов. Данные широко известных статистических исследований говорят о том, что для одиночных, мелких серий и крупносерийного оборудования все отказы делятся на две устойчивые группы классификации по причинам отказов: ~30 % отказов вызваны эксплуатационными причинами, ~70 % – конструкционными и производственными дефектами.

Для того чтобы связать оценку изменения надёжности отдельных элементов и самой системы или устройства с мерой неопределённости их состояния, вызванной рядом случайных нарушений их функционирования в процессе практической эксплуатации, кратко рассмотрим понятие энтропии как меры оценки неопределённости состояния систем, вызванной такими нарушениями.

В настоящее время наибольшее распространение [4–10] при исследовании любого типа систем как меры неопределённости их состояния получило понятие энтропии, впервые введённое в 1865 году немецким физиком (основателем термодинамики и молекулярно-кинетической теории теплоты) Клаузиусом Рудольфом Юлиусом Эмануэлем. Величина энтропии как меры является оценкой фундаментальных свойств любых систем, которым, в большей или меньшей мере, присуще неопределённое, неоднозначное, с точки зрения детерминированного описания, вероятностное, т. е. не всегда выполняющееся поведение наблюдаемой системы.

Так, например, в статистической физике понятие энтропии трактуется как измеримая мера веро-

ятности возможного пребывания наблюдаемой или исследуемой системы в данном состоянии. Взаимосвязь проста. Чем больше беспорядок, тем больше энтропия. Но, как в любой энергетически ограниченной системе, траектории состояния любой системы с течением времени приходят к своему наиболее вероятному положению, отражающему наиболее устойчивое состояние системы. Если в системе, находящейся в этом, кажущемся устойчивым, состоянии возрастает беспорядок, увеличивается хаотичность траектории смены состояний, и это означает – растёт энтропия.

Изменение устойчивого состояния системы не является чем-то особенным, более того, нормальным являются непрерывные вариации состояния систем. Это обусловлено тем, что в любых открытых системах в процессе их существования непрерывно идёт обмен (энергией, информацией, веществом и т. д.) с внешней, окружающей их, средой. При взаимодействии систем (внешняя среда тоже является открытой системой) по причине взаимного обмена значение энтропии систем может не только расти, но и уменьшаться.

Другими словами, значение энтропии любой открытой системы есть функция. Причём она является аддитивной функцией слагаемых порядка и беспорядка. Одно из слагаемых, увеличивающих порядок, представляет собой изменение энтропии, обуславливаемое необратимыми процессами, протекающими внутри самой системы. Второе слагаемое, увеличивающее порядок, – изменение энтропии, обуславливаемое обратимыми процессами обмена системы веществом, энергией и информацией во внешней, окружающей систему, среде.

Модель оценки вероятностных свойств

Распределение времени безотказной работы какого-либо элемента или устройства технической системы, чаще всего [1–4, 10], подчиняется показательному закону распределения вероятности, точнее экспоненциальному закону вероятности распределения событий. Основным параметром – характеристикой экспоненциального распределения – служит параметр λ , который называют плотностью, или интенсивностью, потока однородных событий с произвольным началом отсчёта момента текущего времени. Экспоненциальному распределению подчиняется, например, величина интервала времени между двумя смежными событиями простейшего потока. Вместе с λ для оценки распределения часто применяют параметр Δ_t – среднее время между моментами наступления двух смежных событий. Их взаимозависимость проста:

$$\Delta_t = \lambda^{-1}.$$

Математическое ожидание и дисперсия экспоненциального распределения:

$$\hat{t} = \Delta_t = \lambda^{-1};$$

$$D = \sigma^2 = \Delta_t^2 = \lambda^{-2}.$$

Его плотность распределения вероятности:

$$f(\Delta_t, \lambda) = \{0 \text{ при } t \leq 0; \lambda e^{-\lambda t} = \Delta_t e^{-t/\Delta_t}, \text{ при } t > 0\}$$

характеристики потока отказов. Поэтому её часто называют частотой отказов.

Функция распределения

$$F(\Delta_t, \lambda) =$$

$$= \{0 \text{ при } t \leq 0; 1 - \lambda e^{-\lambda t} = 1 - \Delta_t e^{-t/\Delta_t}, \text{ при } t > 0\}$$

отражает вероятность того, что очередное событие – сбой или отказ – наступит в интервале времени $[0, t]$.

Отсюда вероятность отсутствия событий сбоя или отказа (т. е. вероятность безотказной работы) в том же временном интервале $[0, t]$:

$$P = \lambda e^{-\lambda t} = \Delta_t e^{-t/\Delta_t}, \text{ или,}$$

$$\text{при } t = \Delta_t, P = e^{-t/\Delta_t} \Big|_{t=\Delta_t} = e^{-1} = 0,3679.$$

Другими словами, вероятность безотказной работы не зависит от того, сколько времени работало устройство до момента его использования в данный момент. Это свойство случайной величины, подчиняющейся экспоненциальному распределению (составной части законов распределения марковских случайных процессов), обусловлено отсутствием последствия в простейших потоках событий.

Аналогичным образом можно определить математическое ожидание и дисперсию числа x – применений элемента многократного действия. Вероятность его отказа при j -м использовании в предположении, что $(j-1)$ -й раз он применялся успешно, равна:

$$p_j = (j - \alpha) / j, \text{ где } 0 < \alpha \leq 1.$$

Вероятность того, что элемент будет применён ровно k раз, составит:

$$P[x = k] = \prod_{j=1}^k (1 - p_j) p_{k+1} = \alpha^k (k + 1 - \alpha) / (k + 1)k!.$$

Используя методику производящих функций [2, 3], можно найти основные характеристики случайного процесса, отражающего изменения закономерности значения надёжности – вероятностной меры живучести: математическое ожидание

$$M[x] = \dot{\gamma}(1) = e^\alpha - 1$$

и дисперсию

$$D[x] = e^\alpha (2\alpha + 1) - e^{2\alpha}.$$

Закономерность изменения надёжности на интервале текущей эксплуатации $[0; t]$ обычно представляют показательной функцией вида

$$P(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(t) dt \right],$$

где $P(t)$ – вероятность безотказной работы элемента; $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Тогда функция ресурса живучести на интервале Δ_t примет вид

$$R_s = \int_0^{\Delta_i} \lambda(t) dt.$$

Другими словами, с увеличением Δ_i – продолжительности жизни элемента – функция ресурса R_s растёт и ко времени завершения жизни элемента принимает некоторое значение $R_s \rightarrow \max \leq \alpha_{\max}$.

Если принять во внимание трактовки информационного и термодинамического понятий энтропии H , то функцию ресурса живучести R_s в отнесенительной мере измерения можно принять в качестве энтропийной R_H – меры отражения состояния ресурса оборудования, а также меры соответствия вероятности снижения ресурса или запаса живучести. Тогда можно записать соотношение физической тождественности этих понятий:

$$R_s \equiv R_H = \{ \leq 1; \geq 0 \}.$$

Это соотношение отражает реальную сущность состояния любого элемента или комплекса элементов любой техники: Максимум величины энтропийной меры ресурса живучести достигается к моменту времени его катастрофы (разрушения, деградации), т. е. времени выработки элементом своего ресурса жизни (эксплуатации, старения), значение которого устанавливается на стадии его проектирования, являющейся стадией начала жизни.

Другими словами, энтропийная мера ресурса живучести как любая обобщённая вероятностная мера какого-либо устройства будет являться результирующей мерой живучести симбиоза элементов и узлов, составляющих это устройство. В конечном счёте, можно утверждать и энтропийной меру живучести самого устройства и самой системы.

На начальном этапе эксплуатации элемент обладает наибольшим ресурсом живучести. Степень надёжности его высока, потому мера стохастичности – энтропия – минимальна или близка к нулевому уровню. Затем по мере его использования в работе (эксплуатации) ресурс надёжности как меры живучести понижается, при этом вполне естественно уровень энтропии повышается в обратной пропорции к понижению степени надёжности. В конечном итоге, к моменту завершения гарантированного эксплуатационного периода (срока службы) надёжность элемента снижается до минимального уровня, что обуславливает резкое снижение вероятности безотказной работы до предельно минимальных значений.

Таким образом, мера стохастичности состояния элемента – энтропия – при этом стремится к максимально возможному значению, отражающему завершение эксплуатационного цикла жизни элемента, т. е.

$$H_{s\min} \leq H \leq H_{s\max}.$$

Или, если принять за основу производную, то получим соотношение:

$$dH / dt = \alpha_H \lambda(t).$$

Если считать, что α_H – нормирующий безразмерный коэффициент, то тогда параметр – интенсивность потока изменения свойств наблюдаемого объекта – $\lambda(t)$ будет являться функциональной мерой изменения значения энтропии, отражающей скорость потери живучести элемента.

При этом $\lambda(t)$ – показатель надёжности функционирования элемента, предельное значение которого

$$\lambda(t) \leq \lambda_{\text{нр}} \quad (t \in [0; T])$$

есть не что иное, как предельно допустимая интенсивность отказов этого класса элементов, а ΔT – срок функционирования элемента (гарантированное время T_x его жизни).

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ при эксплуатации оборудования обычно определяется через параметры потока отказов, полученные на основе статистической информации фактической работы оборудования. Типичное распределение на временном интервале фактической эксплуатации оборудования (от разработки до завершения эксплуатации) плотности вероятности потока (интенсивности потока) отказов приведено на рисунке. Условно весь период «жизни» любого оборудования можно разделить на следующие временные интервалы: период разработки, приработки и доводки до серийного производства – $(t_0...t_2)$; период производства и складирования – $(t_2...t_3)$; период практической эксплуатации – $(t_3...t_7)$; период возрастания потока отказов – $(t_7...t_8)$ и период жизни, когда дальнейшая эксплуатация оборудования нецелесообразна, поскольку может приводить к «катастрофе» – полному отказу.

Для простейшего пуассоновского потока отказов интенсивность потока $\lambda(t) = \lambda_0(t)$ является параметром этого потока и интегральной мерой потока изменения свойств оборудования как объекта наблюдения на интервале его жизни

$$R_s = \int_0^{\Delta T} \lambda_0(t) dt.$$

Решение этого интеграла осуществляется привлечением методов численного интегрирования (например, по формуле трапеций или Симпсона) или упрощёнными методами – путём аппроксимации функции при сложном задании функционала или табличным заданием функции по имеющимся данным об эксплуатации оборудования.

Таким образом, результаты реальной эксплуатации, являющиеся ничем иным, как данными статистического эксперимента живучести оборудования, позволяют определить функцию под интегралом, служащую основой отображения параметра потока $\lambda_0(t)$ – зависимости изменения отказоустойчивого поведения оборудования.

Наиболее полным интегральным отражением закономерности поведения энтропийной (энергетической) характеристики живучести в принятой системе вероятностных координат может служить

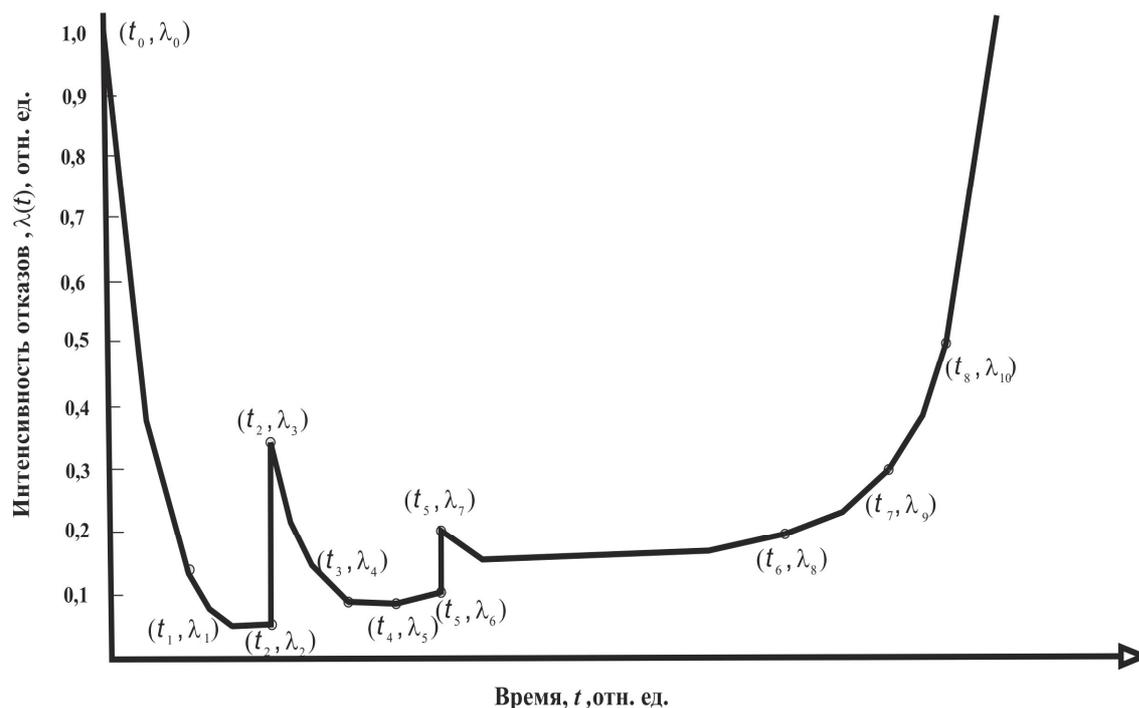


Рисунок. Типичное распределение плотности вероятности потока (интенсивности потока) отказов на интервале фактической эксплуатации оборудования (от разработки до завершения эксплуатации)

площадь, ограничиваемая кривой распределения вероятности безотказной работы, которую можно обозначить через $P_s(t)$.

В идеальной (безотказной) работе оборудования вероятность безотказной работы равна единице (как максимально возможному значению относительной живучести) на всём интервале времени жизни T_x оборудования. В условиях реальной эксплуатации закон распределения плотности вероятности безотказной работы в большей степени соответствует показательному закону распределения. Поведение вероятности безотказной работы является наглядной иллюстрацией того, как широко могут изменяться характеристики типового оборудования или отдельного элемента системы в любой момент времени из-за наличия технологических производственных погрешностей и в течение всего срока эксплуатации ввиду постепенного износа. Поведение кривой распределения $P(t)$ в начале жизни (эксплуатации) является ярким отражением влияния производственных погрешностей конструктивных особенностей системы, оборудования или его элементов. Тренд постепенного износа показывает постепенное ухудшение номинальных характеристик в течение времени жизни элемента.

На ряде примеров, в том числе и с привлечением известных результатов исследований других авторов [4–10], апробации подхода формирования энтропийной оценки потенциальных возможностей техники найден диапазон количественных значений энтропийной оценки. Величина кон-

кретного значения энтропийного показателя живучести, тождественного по смыслу хаотическому показателю Херста, является, хотя и в слабой взаимосвязи, функцией особенностей условий эксплуатации [11].

Конструктивные и технологические погрешности в каждый конкретный момент времени распределены с определённой плотностью вероятности относительно номинальных значений параметров и отражают особенности характера изменения их как статистических характеристик на интервале времени жизни элемента.

Заключение

Учитывая проведенный численный анализ и обобщение обширных теоретических и экспериментальных данных, опубликованных в работах разных авторов, по исследованию надёжности широкого спектра отдельных элементов и комплексов оборудования, можно сделать следующее заключение.

Путем практического применения (апробации) представленного подхода формирования энтропийной оценки потенциальных возможностей техники, найдено, что диапазон количественных значений энтропийной оценки для различных типов элементов, узлов, устройств лежит в диапазоне интервала изменений уровня энтропийного показателя, подобного хаотическому показателю Херста, примерно равного по величине значениям, лежащим в интервале изменений: $0,1 \leq k_s \leq 0,3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Академия, 2005. – 576 с.
3. Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копёнкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчётам. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.
4. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
5. Башуров Б.П. Пути совершенствования технической эксплуатации вспомогательного оборудования энергетических установок судовых транспортных средств. – Новороссийск: НГМА, 2002. – 269 с.
6. Слободян С.М. Телевизионная диагностика лазерных пучков. – Барнаул: Азбука, 2006. – 224 с.
7. Петров В.В., Соболев В.И. Энтропийный подход к оценке качества систем автоматического регулирования // Доклады РАН. – 1996. – Т. 387. – № 4. – С. 799–801.
8. Берже П., Помо М., Видаль К. Порядок в хаосе. – М.: Мир, 1991. – 160 с.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос / пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 242 с.
10. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: РХД, 2001. – 528 с.
11. Деева В.С., Романишина С.А. Устойчивость энтропийной живучести систем // Молодёжь и наука: Матер. VIII Всеросс. научно-техн. конф., посвящённой 155-летию со дня рождения К.Э. Циолковского. – Красноярск, 19–27 апреля 2012. – Красноярск: Сибирский федеральный университет (СФУ), 2012. – С. 120–123.

Поступила 27.03.2012 г.

УДК 621.313:534

ДЕСТРУКЦИЯ СКОЛЬЗЯЩЕГО ЛАМЕЛЬНОГО КОНТАКТА

В.С. Деева, С.М. Слободян

Томский политехнический университет
E-mail: veradee@mail.ru; sms_46@ngs.ru

Предложен вероятностный подход к описанию динамики разрушения контактной пары тел в процессе скольжения одного по бесконечной периодической поверхности другого тела. Проведен анализ возможности решения проблемы точной оценки живучести щёток электрических машин. Предложена марковская модель износа щёток при скольжении по ламели коллектора машин.

Ключевые слова:

Стохастическая динамика, скользящий контакт, ламель, деструкция.

Key words:

Stochastic dynamics, sliding contact, lamella collector, destruction.

Введение

Деструкция – разрушение тонкого слоя соприкасающихся поверхностей в процессе контактного взаимодействия разной или соизмеримой упругости твердых тел, называемая часто износом, обусловлена если не в основном, то в наибольшей степени физико-механическими факторами различной природы.

Как показано в [1–7], именно эмиссия фракций деструкции (процесса разрушения тонких поверхностных слоёв вступающих в контакт тел) является причинно-следственным отражением износа – изменения объёма подвижных тел в процессе непосредственного контакта, вызываемого в большей степени движением скольжения поверхности одного тела по соприкасающейся с ней поверхностью другого тела (трением скольжения) и в меньшей степени – процессом качения элементов одной поверхности по поверхности другого тела (трением качения).

Для процесса непосредственного контактного скольжения характерно то, что области структур поверхностных слоёв тел, находящихся в контакт-

ном взаимодействии, в течение всего процесса каждый раз испытывают контактное прямое соприкосновение со структурно разными областями взаимно видоизменяющегося ввиду силовой механической деструкции двумерного поля поверхностей обоих подвижных тел. Пространственные изменения двумерной структуры поверхностных слоёв тел вызваны в большей степени взаимным срезанием (ломкой выступов) неравномерностей поверхностей тел в контактном пространстве.

В отличие от скольжения как механического вида относительного движения тел, процессу качения поверхности одного подвижного тела по поверхности другого, в частном случае неподвижного, в большей степени присущи объёмные деформационные явления (упругая и пластическая деформации) и в меньшей степени – явления среза и выкрашивания агломератов в виде отдельных фракций. Данные фракции отличаются по своим размерам и приводят в динамике процесса своего перемещения в направлении вектора скольжения к взаимному дроблению неравномерностей многомерной структуры поверхностных слоёв обоих тел.

В общем случае в зависимости от структуры поверхностных слоёв контактно взаимодействующих тел в контактном пространстве на практике, в реальных условиях, при силовом контактном динамическом взаимодействии материальных тел присутствуют оба процесса с разной степенью приоритета и превалирования по рангу влияния и веса деформации. Ранее [5–7] были рассмотрены особенности контактного динамического взаимодействия элемента контактной пары скользящего по бесконечной протяжённости сплошной шероховатой поверхности второго элемента. На практике подобных вариантов скользящего контактного взаимодействия (контактных пар), особенно в электро- и энергомашиностроении, не говоря уже о машиностроении, весьма много: «электрическая щётка – контактное кольцо» в электрогенераторах и электродвигателях, «метаемое тело – направляющие шины – салазки» при электромагнитном метании тел, «токоведущий провод – направляющая скоба» в троллее и т. д.

Однако в той же области электро- и энергомашиностроения существуют и другие варианты подвижных устройств передачи энергии тока, в основе функционирования которых лежит принцип скользящего контактного взаимодействия двух токопроводящих пар элементов. Например, коллекторные электрические и электромеханические преобразователи, машины и аппараты, принцип функционирования которых основан на применении скользящего контактного взаимодействия двух токопроводящих элементов – контактной пары, один из элементов которой представляет собой профилированную периодической структуры, контактную в первом приближении, кольцевую бесконечной протяжённости поверхность. Такой род контактной поверхности в электрических машинах и аппаратах порождает ряд проблем, обусловленных наличием периодического прерывания передачи энергии тока (коммутации) в процессе скользящего перехода контактного элемента от одной элементарной ячейки поверхности (ламели) периодической структуры (коллектора) к другой, смежной с ней. Возникающий при этом ряд проблем называют проблемами коммутации, которые подробно рассмотрены в [2–4]. Наибольшее внимание исследователей привлекает проблема повышения ресурсных характеристик и коммутационной надёжности – основных и очень важных эксплуатационных характеристик коллекторных электрических и электромеханических аппаратов, в сильной степени определяемых состоянием износа щёточно-коллекторного узла токосъёма. Данная проблема актуальна до сих пор [2–7].

Краткий анализ коммутации энергии узлом токосъёма

Периодический процесс коммутации щётчным узлом скользящего токосъёма коллекторной цепи передачи тока обусловлен [1–4] принципом работы коллекторных электрических машин и ап-

паратов, например генераторов. Так же как и в любой динамической системе с временной многофакторной вариацией поля параметров, изменение одного или симбиоз нескольких наиболее чувствительных параметров может заметно повлиять на стабильность периодического процесса прерываемой передачи тока и привести при определённых условиях к росту коммутационной напряжённости и развитию детерминированной хаотической неустойчивости процесса транспортировки энергии – передачи тока от одного элемента к другому скользящим по поверхности коллектора щётчным контактом. Скользящий по периодической поверхности коллектора контактный элемент – щётка – это важный фактор существенного влияния на изменение тока не только в коммутируемой секции, но и в контуре коммутации. Требование высокой коммутационной устойчивости – один из аспектов, определяющих постоянное внимание к проблеме повышения надёжности и ресурса коллекторных электрических машин. Особенно важным для достижения высокой коммутационной устойчивости является обеспечение непрерывности щёточного контакта при передаче тока узлом скользящего токосъёма в условиях динамической неустойчивости профиля контактной поверхности коллектора и нестабильности параметров ряда других узлов. Устойчивость процесса коммутации – фактор «безыскаковой» работы коллекторных электрических машин и аппаратов.

Для краткого анализа явлений динамика процесса коммутации тока в электрических машинах этого типа в достаточно общем случае может быть представлена видом нелинейного дифференциального уравнения первого порядка [2, 3]:

$$L \frac{di}{dt} + \sum_{k=1} M_k \frac{di_k}{dt} = \delta u_{\text{щ}}(J) - i(t)R_s - e_k(t),$$

где $e_L = -L \frac{di}{dt}$ и $e_k = -\sum_{k=1} M_k \frac{di_k}{dt}$ – э.д.с. сам-

оиндукции; $\delta u_{\text{щ}}(J) = [\Delta u_{\text{н}}(J) - \Delta u_{\text{с}}(J)]$ – разность значений переходных падений напряжений на пространственном интервале размера щётки (между передним набегающим $\Delta u_{\text{н}}(J)$ и задним сбегающим $\Delta u_{\text{с}}(J)$ краями щётки); $i(t)$ – коммутируемый ток; R_s – сопротивление коммутируемой секции; $e_k(t)$ – коммутирующая э.д.с., наводимая в секции (при её взаимодействии с магнитным полем) в зоне коммутации. Эта система уравнений используется практически всеми исследователями [2–4] как основа изучения процесса коммутации.

Идеальной коммутации соответствует наилучшая коммутационная устойчивость машин, когда $di/dt=0$ и для предельно малого размера щётки (игольчатый электрод), когда $\Delta u_{\text{н}}(J) \equiv \Delta u_{\text{с}}(J)$. Тогда нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка процесса коммутации вырождается в тип уравнения закона Ома: $i(t)R_s = e_k(t)$.

Если первое условие – достижение высокой коммутационной устойчивости – считать целью,

то второе (минимизация $\delta u_{ш}(J)$ – разности переходных падений напряжений на щётке, а в идеале обеспечение соотношения $\Delta u_{ш}(J) = \Delta u_{с}(J)$) является фактором достижения этой цели.

В [2–4] показано, что наиболее сложным для учёта в уравнениях контура коммутации коллекторных электрических машин является случайный характер распределения электрической проводимости в контактном слое. Так же как и при контакте щётки, скользящей по непрерывной поверхности контактного кольца [5–7], в зависимости от особенностей структуры контактно сопрягаемых поверхностей скользящих относительно друг друга тел, в контактном пространстве щёточного узла токосъёма могут возникать разные виды контактного взаимодействия: прямой контакт неравномерностей поверхностей соприкасающихся элементов тел; контакт поверхностей через слой смеси фракций деструкции (разрушения) элементов поверхностей этих же тел; совместное действие первых двух факторов (симбиоз обоих приведённых случаев) – частичное наличие прямого непосредственного точечного контакта выступами поверхностей тел с присутствием частичного образования проводящих ток областей через слой фракций деструкции поверхности тел. Во всех перечисленных типах часть контактного пространства занимают области полного отсутствия контакта, занятые газом окружающей среды (воздух). Поэтому контактные пространства щётки, скользящей по составному (ламельному) и сплошному кольцу коллектора, существенно отличаются, но и то и другое с позиции динамического взаимодействия является вероятностной динамической системой. Характеристики такой динамической системы определены физико-механическими свойствами структур поверхностных слоёв и динамикой контакта тел, естественно с учётом электромагнитного влияния транспортируемой энергии.

Для повышения точности оценки состояния щётки, скользящей по ламельной периодической контактной поверхности коллектора, лучшего учёта влияния фактора контактной периодичности скольжения и более точного приближения оценки реальной нестабильности периодического процесса коммутации тока в ламельном коллекторном токосъёме ниже на основе марковской модели контактного динамического взаимодействия элементов скользящего токосъёма проведён анализ вероятностной динамики контактного пространства, образованного скользящей по ламелям коллектора контактной парой «щётка–коллектор», позволяющей оценивать в реальном времени состояние и живучесть щёточного узла периодического коллекторного токосъёма машин.

Сущность модели локального контактного пространства на ламели

В контактном процессе одного элемента, скользящего по периодической ламельной структуре, со вторым элементом узла токосъёма можно выде-

лить четыре последовательно сменяющих друг друга состояния механического и электрического контакта: разомкнутое, замыкание, замкнутое, размыкание. Практически на всех стадиях смены состояния происходит механический износ поверхностей обоих элементов контактной пары, что сказывается на живучести контакта, определяемой долговечностью существования объёма элементов контактной пары. Взаимодействие тел приводит к сложным физико-механическим процессам, заметно изменяющих идеализацию периодического контактного соединения пары элементов в области щёточного токосъёма. Скользящее взаимодействие элементов контакта влечет, как правило, изменение их свойств ввиду фрикционного износа. Это заметно влияет на физику и механику процесса контактного взаимодействия, в том числе на состояние поверхностей, надёжности работы и живучести элементов контакта. Живучесть элементов контактной пары – мера длительной и надёжной работы контакта в целом. С позиций живучести наиболее тяжелые условия существуют для щёточного узла как наиболее подверженного деструкции, хотя и неподвижного элемента электрического контакта, выполняющего размыкание и замыкание электрической цепи, в которой протекает сильный ток. При работе таких контактов на стадиях «замыкание–скольжение–размыкание» образуются электрические дуги с температурой, приводящей к изменению упругих свойств материала элементов контакта в сторону усиления пластичности материала, частичного плавления и изменения структуры контактирующих поверхностей. Контроль и диагностика живучести такой контактной пары актуальны для оценки состояния широкого класса коллекторных электрических машин и аппаратов.

Рассматриваемая ниже математическая модель аналитического описания динамики ламельно-щёточного, по временной последовательности – периодического контакта коллекторных электрических машин и аппаратов ориентирована на компьютерное и имитационное моделирование контактного пространства с дискретными фракциями. Сущность представляемой ниже математической модели контактного пространства – математический и имитационный алгоритм, каждая компьютерная реализация которого – адекватная имитация совокупности процессов эмиссии фракций износа в течение реального времени функционирования моделируемого контактного пространства. Содержание и связь событий в модели, их временная динамика соответствуют содержанию и последовательности протекания процессов в реальной контактной системе. При этом предполагается, что на каждое вероятностное событие – эмиссию фракций разрушения области поверхности любого из элементов контактной пары – модель реагирует мгновенно (скачком) в некоторый момент времени.

Контактные пространства отличает сложность и разнообразие способов взаимодействия поверхностей, структуры элементов контактной пары ал-

горитмов протекания процессов. Выбор параметров контактного пространства в процессе оптимизации щётчного узла скользящего токосъёма является трудной задачей из-за отсутствия математического аппарата для их анализа.

Модель контактного пространства на основе представлений системного подхода можно представить совокупностью формализованных описаний процессов, каждое из которых представляет собой совместное действие (симбиоз) взаимосвязанных алгоритмов, состоящий из операторов и описательной части. Пространственные и временные изменения структуры и свойств реального контактного пространства элементов контактной пары скользящего токосъёма представлены в модели совокупным поведением дискретных процессов, совмещённых в непрерывно меняющемся условном времени. Основой лаконичного описания функционирования контактного пространства служит аппарат процессов Маркова – эквивалент соответствующих реальных процессов.

Структура локального ламельного контактного пространства

Анализ физики и механики явлений в щётчном контакте электрических машин показывает, что для общности анализа динамики областей соприкосновения поверхностей элементов контактной пары «щётка – ламель коллектора», как и при скольжении на сплошном бесконечной протяжённости контактном кольце [5–7], можно принять деление на два логических множества областей контакта: проводящих и не проводящих ток. Случайный процесс, основанный [8] на показательном законе описания событий, может быть применен для исследования физико-механических явлений, протекающих в контактном пространстве любого вида процессов динамического взаимодействия сред и тел.

Одну из областей контактного слоя (область основного контакта), частично образованную прямым соприкосновением проводящих ток неравномерностей поверхности элементов контактной пары, будем считать полным контактным множеством. Другая часть этого множества обусловлена контактом поверхностей этих элементов через буферную проводящую ток прослойку, образованную фракциями разрушения разной дисперсности, но в большей части частицами износа обоих элементов пары, в том числе контактирующими с выступами неравномерностей поверхности любого из элементов контактной пары. Вторая область – пространство примыкающих друг к другу областей воздушного зазора (т. е. областей, в которых контакт поверхностей элементов пары отсутствует). Зона отсутствия контакта – пустое множество.

Контактное пространство пары «щётка–ламель» в течение времени перекрытия их контактных поверхностей может находиться в любом ij -м конечном (счётном) или бесконечном числе состояний. Примем, что m есть максимальное в сред-

нем число состояний, которое определяется минимальным дисперсным размером отторгаемых контактной парой дискретных фракций деструкции $V_{\text{дф}}$ и объёмом наименьшего элемента. Для элемента прямоугольной формы $V_3 = a_3 b_3 c_3$ (произведение размеров):

$$m = \sup \{ V_3 / V_{\text{дф}} \} = (a_3 b_3 c_3) / \langle V_3 \rangle. \quad (1)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ – усреднение по множеству размеров фракций разрушения элементов контактной пары. При неправильной геометрии фракций как агломерата деструкции средний размер фракции определится интегральной формулой вычисления объёма.

Обоснование марковского подхода

Эмиссия дискретных фракций деструкции (износа) – отрыв от объёма среды плотноупакованной структуры тела одного из элементов контактной пары скользящего токосъёма в результате скользящего взаимодействия слоёв их поверхностей, приводящий к переходу контактного множества из одного состояния в другое, – происходит не в фиксированные, а в произвольные моменты времени. Это и определяет стохастичность траектории изменения пространственно-временного состояния контактного пространства, условий передачи энергии в контактном слое «щётка–ламель коллектора» и вероятностный характер процесса коммутации тока узлом скользящего токосъёма.

Случайный процесс скачкообразного изменения состояния контактного пространства и множества на действительной оси непрерывного времени будет, следуя классическому понятию [8], марковским, если для любого момента времени контактного взаимодействия пары элементов токосъёма условные вероятности всех состояний контактного множества C в будущем (при $t > t_0$) зависят только от того, в каком состоянии c_j находится контактное множество C в настоящем (при $t = t_0$), и не зависят от того, через какие состояния c_j оно прошло на интервале $t < t_0$, когда и каким путём контактное множество C пришло в настоящее состояние. Кратко – будущее марковского контактного множества зависит от прошлого только через его настоящее.

Привлекательность аппарата теории марковских процессов в анализе «живучести» скользящего токосъёма основана на сравнительной простоте математического описания обобщённого поведения состояния контактного взаимодействия тел. Следует понимать, что описание динамики поведения контактного множества, как и обобщённое отождествление стохастичности контактного процесса в «чистом виде» с марковским, является в большей или меньшей степени некоторым, хорошо совпадающим с практикой, асимптотическим приближением к реальному. При марковском анализе удобно принять, что переходы – скачки изменения – контактного множества C обусловлены эмиссией фракций разрушения элементов тел в

контактное пространство. Это подтверждается экспериментальными данными [1–4].

Следуя теории марковских случайных процессов, для контактного пространства с дискретными состояниями и непрерывным временем изменения состояний примем, что поток фракций износа элементов контактной пары (входит в «политуру»), переводящий контактное множество из одного состояния в другое, является пуассоновским не всегда, а значит, не обязательно стационарным, установившимся. Плотность его распределения описывается в общем случае показательным законом, в простейшем случае [8] – законом Пуассона с характерным отсутствием последействия. Именно это обстоятельство и позволяет при оценке настоящего состояния контактного множества c_i в момент t не выяснять, как и когда оно оказалось в этом состоянии. Переход C из состояния c_i в c_j происходит под воздействием пуассоновского потока эмиссии фракций разрушения с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Первая же фракция разрушения контактной пары (щётки или коллектора), пополнившая контактное множество или, наоборот, покинувшая его пространство, скачком изменяет состояние c_i множества на c_j . Ветвь графа смены состояний контактного множества C имеет вид $C_i \xrightarrow{\lambda_{ij}(t)} C_j$, где стрелка с указанием интенсивности потока фракций показывает направление смены состояния.

Анализ одиночного ламельного контактного цикла

Рассмотрим физический процесс контактного разрушения плотно упакованной щётки, содержащей m фракций (определяется формулой (1)), при скольжении по периодически структурированной поверхности ламелям коллектора. Процесс контактного взаимодействия щётки с любой ламелью коллектора можно анализировать при следующих предположениях.

Интенсивность простейшего пуассоновского потока фракций деструкции в контактное пространство «щётка–коллектор» равна λ , где

$$\lambda = \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} - \text{const на всех интервалах времени}$$

ламельного контакта. Время контакта щётки с каждой ламелью коллектора на уровне среднего значения (математическое ожидание) определяется режимом работы ($n_{об}$ – числом оборотов в минуту) и конструктивными особенностями ($n_{лк}$ – числом ламелей коллектора; $p_{пп}$ – числом пар полюсов электрической машины):

$$\bar{T}_{лк} = 60 / (p_{пп} n_{об} n_{лк}).$$

Если принять $\bar{T}_{ж}$ – среднюю длительность «жизни» щётки (паспортное её значение устанавливается производителем), – то среднее число фракций, эмитируемых за время контакта щётки с каждой ламелью при средней интенсивности потока эмиссии фракций $\bar{\lambda} = m / \bar{T}_{ж}$, составит:

$$\bar{\lambda}_i = m \bar{T}_{лк} / \bar{T}_{ж} = \bar{\lambda} \bar{T}_{лк}.$$

Итак, из полного объёма фракций (1) с интенсивностью стационарного пуассоновского потока λ любая дискретная фракция может попадать в контактное пространство «щётка–ламель» и участвовать в изменении состояния полного контактного множества. Время пребывания фракции в полном контактном множестве для приближения Пуассона распределено по показательному закону с параметром γ , а время её аннигиляции (перехода в пустое множество, разрушения до малых размеров, удаления из контактного пространства, возврата за счёт адгезии в структуру щётки) или покидания – с параметром μ . Траекторию смены состояний контактного пространства в интервале единичного цикла взаимодействия щётки с ламелью коллектора можно представить в виде простейшего кольцевого графа.

Определим вероятности состояний контактного пространства (полного контактного множества), если в начальный момент оно уже существовало с вероятностью 1, то есть контакт щётки с коллектором был обеспечен. При этом примем: C_1 – начальное состояние контактного множества (контакт пары «щётка–коллектор» обеспечен); C_2 – произошла эмиссия (или принудительная подача) в контактное пространство дискретных фракций с интенсивностью λ , формирующих контактное множество; C_3 – раздробленные (до пренебрежения учёта их участия) фракции за счёт адгезии, принудительной подачи или заменившие их транзитные фракции с интенсивностью μ стремятся восстановить начальное состояние. В соответствии с логикой изменения фрактального множества, вероятности изменения дискретных состояний ламельного контактного множества на оси непрерывного времени отразит следующая система дифференциальных уравнений Колмогорова как однородного марковского процесса [8]:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \mu p_3(t) - \lambda p_1(t); \\ \dot{p}_2(t) = \lambda p_1(t) - \gamma p_2(t); \\ \dot{p}_3(t) = \gamma p_2(t) - \mu p_3(t) \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями: $p_1(0)=1; p_2(0)=p_3(0)=0$. Тогда, с учётом несовместности действия разных траекторий фракций, справедливо условие нормировки – равенства единице полной вероятности всех событий $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1$ или

$$\sum_{i=1}^3 p_i(t) = 1 \quad (0 \leq p_i(t) \leq 1; t \geq 0), \quad (3)$$

которым можно заменить любое из уравнений системы (2).

Система дифференциальных уравнений вероятности состояний контактного множества ламельно-щёточного пространства, отражающая принятую постановку задачи, отображаемой графом состояний этого пространства, согласно правилам описания динамики смены состояний, изло-

женных в [8], с соблюдением условия нормировки (3) и начальных условий $\{p_1(0)=1; p_2(0)=p_3(0)=0\}$ примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= \mu p_3(t) - \lambda p_1(t); \\ \dot{p}_2(t) &= \lambda p_1(t) - \gamma p_2(t); \\ \dot{p}_3(t) &= \gamma p_2(t) - \mu p_3(t) \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Используя свойства преобразования Лапласа при его применении для решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова путём замены изображения вероятности состояния $p_i(t)$ на функцию $\pi_i(x)$, с учётом которой изображение условия

(3) меняет вид $\sum_{i=1}^n \pi_i(x) = x^{-1}$, система дифференциальных (4) вырождается [8] в систему алгебраических уравнений оценки вероятности состояний:

$$\left\{ \begin{aligned} x\pi_2(x) &= \lambda\pi_1(x) - \gamma\pi_2(x); \\ x\pi_3(x) &= \gamma\pi_2(x) - \mu\pi_3(x); \quad \sum_{i=1}^3 \pi_i(x) = x^{-1} \end{aligned} \right\}$$

с решением

$$\begin{aligned} \pi_2(x) &= x^{-1}[\lambda(x + \mu)] / p(x); \\ \pi_3(x) &= \gamma\pi_2(x) / (x + \mu), \end{aligned}$$

где

$$p(x) = x^2 + Ax + B = (x - x_1)(x - x_2) \quad (5)$$

и $(A = \lambda + \mu + \gamma, B = \lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu)$ – квадратное уравнение с дискриминантом, при $p(x)=0$ равным $\Delta = B - A^2/4 = 0,25(4B - A^2)$. Для положительных значений параметров пуассоновского потока фракций ($\lambda > 0; \mu > 0; \gamma > 0$) поведение дискриминанта говорит о возможности принятия им любых значений на числовой оси $-\infty \dots +\infty$: $\Delta \geq 0, \Delta = 0, \Delta \leq 0$.

Следуя [8], для уравнения (5) с отрицательным дискриминантом $\Delta \leq 0$, приводящим к двум разным отрицательным корням $x_1, x_2 = B$ и $x_1 + x_2 = -A$, $x_{1,2} = (-A \pm \sqrt{A^2 - 4B})/2$, можно получить соотношения для оценки вероятностей состояния множества контактного пространства:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 1 - p_2(t) - p_3(t); \\ p_2(t) &= \lambda[(e^{x_1 t} - e^{x_2 t}) / (x_1 - x_2)] + \\ &+ \frac{\lambda\mu}{x_1 x_2} [1 + (x_2 e^{x_1 t} - x_1 e^{x_2 t}) / (x_1 - x_2)]; \\ p_3(t) &= \frac{\lambda\mu}{x_1 x_2} [1 + (x_2 e^{x_1 t} - x_1 e^{x_2 t}) / (x_1 - x_2)]. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ ламельное контактное пространство коллектора в своём подобии асимптотически приближается к свойствам контактного множества на сплошном контактном кольце. Для примера, при $\mu = \gamma = 1; \lambda = 3$ имеем: $p_2(t) = p_3(t) = 3/7, p_1(t) = 1/7$ или

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) &= p_1 = 1/7, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = p_2 = 3/7, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_3(t) &= p_3 = 3/7. \end{aligned}$$

Другие ситуации: $\lambda = 0$, когда $p_2(t) = p_3(t) = 0, p_1(t) = 1$, эмиссии и износа нет; щётка в исходном состоянии; $\mu = 0$ – фракции не возвращаются в полное множество: $p_3(t) = 0; p_1(t) = 1 - p_2(t); \gamma = 0$ – фракция без задержки вылетает из контактного множества.

Эргодичность ламельного контактного пространства

Контактное пространство на ламели коллектора представляет собой простейшее эргодическое контактное пространство. Все потоки фракций, переводящих пространство из одного состояния в другое, – пуассоновские (простейшие), а все случайные состояния являются транзитивными.

Следуя этому определению, для обобщённой форме записи системы однородных вероятностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$p_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} p_j \right) / \lambda_j; \quad \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

считая контактное множество на ламели простейшим, эргодическим, получим простую систему оценки предельных вероятностей финального состояния ламельного контактного пространства: $\{p_1 = \mu p_3 / \lambda; p_2 = \lambda p_1 / \gamma; p_3 = \gamma p_1 / \mu\}$, или, с условием нормировки,

$$\{p_1 = \mu p_3 / \lambda; p_2 = \lambda p_1 / \gamma; p_1 + p_2 + p_3 = 1\}. \quad (6)$$

Из (6) следует $p_3 = \lambda p_1 / \mu$ и условие нормировки получает вид: $p_1 + (\lambda/\gamma)p_1 + (\lambda/\mu)p_1 = 1$ или $p_1[(\gamma\mu + \lambda\mu + \lambda\gamma)/\gamma\mu] = 1$. Для $\mu = \gamma = 1; \lambda = 1$ имеем $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3; \lambda = 3; p_1 = 1/7, p_2 = p_3 = 3/7; \lambda = 5; p_1 = 1/11; p_2 = p_3 = 5/11$ и т. д. Равенство значений траектории процессов, отражаемых вероятностями p_2 и p_3 , при изменении интенсивности эмиссии λ означает их весьма близкий характер поведения. Иначе говоря, пределы вероятностей состояния контактного ламельного пространства при $t \rightarrow \infty$ и получаемые предельные вероятности финального состояния контактного пространства аутентичны.

Смысл понятия предельной вероятности ламельного пространства

Предельная вероятность состояния p_i при марковском формировании ламельного контактного пространства с дискретными состояниями и непрерывным временем имеет смысл, аналогичный предельным вероятностям для однородной цепи Маркова:

$$p_i = \bar{t}_i / \bar{t}_i, \quad (7)$$

где \bar{t}_i – среднее (математическое ожидание) время однократного пребывания контактного пространства S в состоянии c_i ; \bar{t}_i – среднее время цикла траектории блуждания контактного множества S относительно состояния c_i . Если учесть время пребывания S вне c_i , то выражение (7) приобретёт вид: $p_i = \bar{t}_i / (\bar{t}_i + \bar{t}_{\neq c_i})$, где $\bar{t}_{\neq c_i}$ – среднее время однократного пребывания контактного множества S вне состояния c_i . Другими словами, предельная вероятность p_i

есть отношение времени пребывания простейшего эргодического контактного множества C в состоянии c_i к сумме математических ожиданий времён \bar{t}_i и $\bar{\tau}_{\neq c_i}$. Устанавливает их взаимосвязь следующая система:

$$\{\bar{t}_i = \bar{\tau}_{\neq c_i} p_i / (1 - p_i); \bar{\tau}_{\neq c_i} = \bar{t}_i (1 - p_i) / p_i\}.$$

Иначе, пуассоновский однородный поток фракций, переводящий контактное множество C не из конечного состояния c_i , является простейшим с интенсивностью λ_i . При этом интервал времени \bar{t}_i от любой точки на оси времени до ближайшего акта смены состояния пространства под действием простейшего потока фракций распределён по показательному закону с параметром, равным интенсивности этого потока: $\bar{t}_i = \lambda_i^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мышкин Н.К., Кончиц В.В., Браунович М. Электрические контакты. – М.: Издательская группа URSS, 2008. – 560 с.
2. Лившиц П.С. Скользящий контакт электрических машин. – М.: Энергия, 1974. – 272 с.
3. Копылов И.П. Электрические машины. – М.: Логос, 2000. – 607 с.
4. Плохов И.В. Комплексная диагностика и прогнозирование технического состояния узлов скользящего токосъёма турбогенераторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – СПб., 2001. – 36 с.
5. Слободян М.С., Слободян С.М. Модель динамики электрического контакта // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. – 2010. – № 2. – С. 42–47.

Выводы

Определена статистическая марковская аналогия подобия динамического процесса разрушения щёточного элемента, скользящего по периодической ламельной структуре, процессу скольжения щётки на сплошной, бесконечной протяжённости, поверхности контактного кольца. Разработана аналитическая модель динамических случайных процессов в скользящем по поверхности периодической структуры – ламелям коллектора – щёточном контакте, учитывающая совокупное влияние случайных факторов в параметрах дискретного потока эмиссии фракций деструкции и позволяющая исследовать основные характеристики и оценивать состояние контактного узла токосъёма вероятностными методами и моделированием.

6. Слободян М.С., Слободян С.М. Деструкция тел скользящего контакта // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 20–25.
7. Деева В.С., Слободян С.М. Физическая модель разрушения скользящего токосъёма // Инженерная физика. – 2011. – № 6. – С. 32–37.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Академия, 2009. – 384 с.

Поступила 18.01.2013 г.

УДК 535.36

ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОИСТОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ С ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б.В. Горячев, С.Б. Могильницкий

Томский политехнический университет
E-mail: msb@tpu.ru

Рассмотрен перенос излучения в двухслойной дисперсной среде с отражающей поверхностью. Получены аналитические выражения для определения характеристик радиационного баланса. Показано, что приземный слой атмосферы даже при малой величине оптической плотности и ее слабом изменении оказывает существенное влияние на отражательную способность системы «двухслойная среда – отражающая поверхность» при всех значениях коэффициента отражения подстилающей поверхности. Установлено, что увеличение оптической плотности приземного слоя атмосферы с поглощением приводит к почти полной независимости поглощательной способности системы «двухслойная среда – отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности.

Ключевые слова:

Радиация, баланс, дисперсная среда, слой, отражающая поверхность.

Key words:

Radiation, balance, dispersion media, layer, reflective surface.

Изучение радиационного баланса планетных атмосфер проводится на основе методов теории переноса излучения и численных методов [1, 2]. При проведении исследований используются различные модели атмосферы с подстилающей по-

верхностью [3–5]. Точность получаемых результатов зависит от точности используемых приближений и учета всех эффектов, существенно влияющих на результат, например эффекта пространственной ограниченности дисперсной среды [6, 7].

Целью данной работы является решение задачи переноса излучения в аналитическом виде и определение некоторых закономерностей переноса в системе «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность». Решение получено с использованием метода многократных отражений [6, 8]. Дисперсная среда представляется в виде прямоугольного параллелепипеда, разделенного на два слоя, где отражающей является поверхность на задней грани (по направлению распространения излучения), при нормальном падении потока излучения на поверхность дисперсной среды. Получены аналитические выражения для определения характеристик радиационного баланса: коэффициента пропускания $A_{12}(\tau, a, \Lambda)$, отражательной $B_{12}(\tau, a, \Lambda)$ и поглощательной способности $C_{12}(\tau, a, \Lambda)$.

Введем обозначения: оптические размеры первого слоя параллелепипеда $\tau_{1x_0} \times \tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0}$ (излучение распространяется по оси x , поперечные оптические размеры одинаковы для обоих слоев и равны $\tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0}$), второго слоя $\tau_{2x_0} \times \tau_{2y_0} \times \tau_{2z_0}$; индикатриса рассеяния излучения, характеризующая степень вытянутости $a = (\eta + 2\mu) / (\beta + 2\mu)$, η , μ , β – интегральные параметры индикатрисы рассеяния [6, 7]; вероятность выживания кванта в первом слое Λ_1 , во втором – Λ_2 ; коэффициент отражения поверхности r , пропускания t . В данной модели первый слой представляется в виде слоя облачности с индикатрисой рассеяния излучения C_1 [9], второй слой – приземный аэрозоль, индикатрисы рассеяния которого весьма разнообразны. Коэффициент отражения подстилающей поверхности изменяется от 0 до 1. На основе метода многократных отражений получены формулы:

$$A_{12} = \frac{tA_1A_2}{F_1F_2 - rA_2^2B_1};$$

$$B_{12} = \frac{F_1(B_1 + B_2F_3) + rA_2^2F_3}{F_1F_2 - rA_2^2B_1};$$

$$C_{12} = \frac{F_1(C_1F_2 + A_1F_4) + rA_2(A_1F_5 - A_2B_1C_1)}{F_1F_2 - rA_2^2B_1}.$$

Обозначения:

$$F_1 = 1 - \frac{rR_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \{1 - \exp[-2k_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{2x_0}]\}}{1 - R_2^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{2x_0}]};$$

$$F_2 = 1 - B_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_3 = \frac{\exp[-2k_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{2x_0}] - R_1^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)}{1 - R_1^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{2x_0}]};$$

$$F_4 = C_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) + C_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_5 = C_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) + C_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)A_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda).$$

Радиационные характеристики каждого из слоев $A_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$, $B_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$, $C_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$, где $i=1, 2$, определяются следующим образом [6]:

$$A_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{[1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)] \exp[-k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]}{1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]};$$

$$B_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \{1 - \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]\}}{1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]};$$

$$C_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{[1 - R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)] \{1 - \exp[-k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]\}}{1 + R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]}$$

Переменные коэффициенты $k(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$ и $R(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$, зависящие от поперечных оптических размеров дисперсной среды, индикатрисы рассеяния излучения и вероятности выживания кванта, разные для каждого слоя и имеют вид:

$$k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \sqrt{P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)[1 - \Lambda_i(\eta_i - \beta_i)]};$$

$$R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) - P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)}{k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) + P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)}.$$

Функция $P(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$ определяет рассеяние и поглощение излучения по оси x и в частном случае сферической индикатрисы рассеяния и полубесконечной среды:

$$P(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{(1 - \Lambda)(27 - 11\Lambda + \Lambda^2)}{3(9 - 7\Lambda + \Lambda^2)}.$$

Рассмотрим некоторые результаты расчетов потоков монохроматического излучения по данным формулам. Поперечные оптические размеры дисперсной среды равны $\tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0} = 10^4$.

Представленные на рис. 1 данные показывают, что величина уходящей радиации сильно зависит от коэффициента отражения подстилающей поверхности при небольшой величине оптической плотности приземного слоя атмосферы и практически не зависит при $\tau_{2x_0} > 5$. Такая закономерность наблюдается при наличии верхнего (облачного) слоя атмосферы, причем этот эффект усиливается с возрастанием оптической плотности верхнего слоя так же, как в однородной среде [8].

На рис. 2 представлены результаты расчетов поглощательной способности C_{12} системы «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» при всех возможных значениях коэффициента отражения подстилающей поверхности. Наличие загрязнения в приземном слое атмосферы существенно влияет на поглощательную способность атмосферы в целом, но значительно сильнее сказывается оптическая плотность приземного слоя атмосферы. Следует отметить слабую зависимость поглощательной способности атмосферы от вида подстилающей поверхности в данных условиях, что объясняется наличием достаточно плотного верхнего слоя.

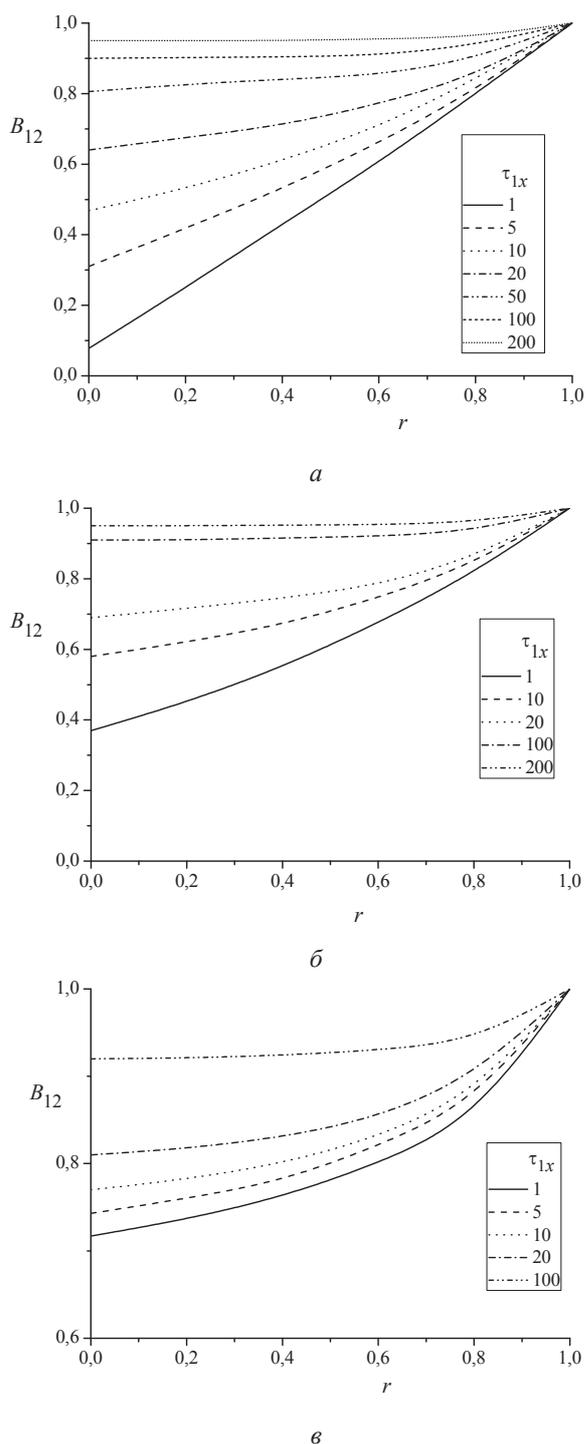


Рис. 1. Зависимость отражающей способности B_{12} системы «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности r , вероятность выживания кванта $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения $a_1 = 10$; $a_2 = 1$: а) оптическая плотность приземного слоя $\tau_{2x0} = 0,1$; б) $\tau_{2x0} = 1,0$; в) $\tau_{2x0} = 5,0$

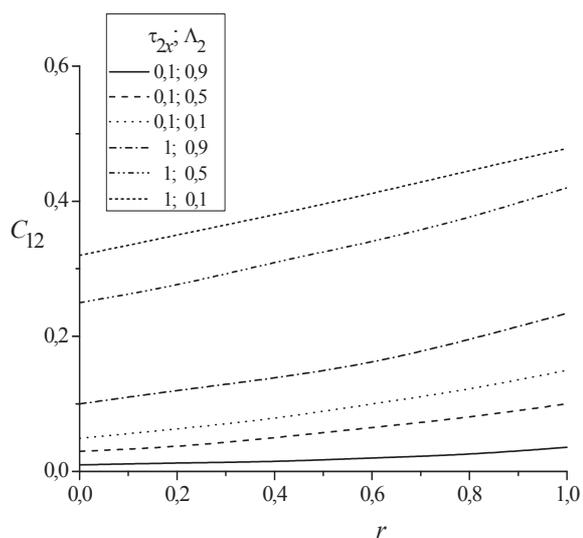


Рис. 2. Зависимость поглощательной способности C_{12} системы «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности r . Степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения $a_1 = 10$; $a_2 = 1$; оптическая плотность верхнего слоя $\tau_{1x0} = 10$

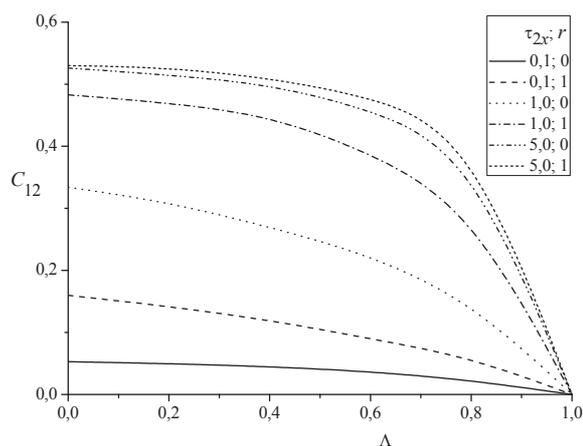


Рис. 3. Зависимость поглощательной способности C_{12} системы «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» от вероятности выживания кванта Λ . Степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения $a_1 = 10$; $a_2 = 1$; оптическая плотность верхнего слоя $\tau_{1x0} = 10$

На рис. 3 представлены результаты вычислений поглощательной способности C_{12} системы «двухслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» в зависимости от степени загрязнения приземного слоя атмосферы. Все возможные значения поглощательной способности C_{12} атмосферы лежат между кривыми 1 и 2 при $\tau_{2x0} = 0,1$; 3 и 4 при $\tau_{2x0} = 1$; 5 и 6 при $\tau_{2x0} = 5$, причем с увеличением оптической плотности приземного слоя разрыв между кривыми практически исчезает.

Выводы

1. Получены аналитические выражения для описания радиационного баланса слоистой дисперсной среды с отражающей поверхностью: коэффициента пропускания, отражательной и поглощательной способности.
2. Показано, что приземный слой атмосферы даже при малой величине оптической плотности и/или ее малом изменении оказывает существенное влияние на отражательную способность системы «двухслойная дисперсная сре-

да – отражающая поверхность» независимо от коэффициента отражения подстилающей поверхности.

3. Изменение оптической плотности приземного слоя в большей степени влияет на отражательную способность системы, чем такое же изменение оптической плотности верхнего слоя при всех значениях коэффициента отражения подстилающей поверхности, а при оптической плотности свыше 5 практически не оказывает влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. – Л.: Гидрометеоздат, 1990. – 264 с.
2. Зуев В.Е., Титов Г.А. Оптика атмосферы и климат. – Л.: Гидрометеоздат, 1996. – 256 с.
3. Jin Z., Charlock T.P., Rutledge K., Stamnes K., Wang Y. Analytical solution of radiative transfer in the coupled atmosphere ocean system with a rough surface // Appl. Opt. – 2006. – V. 45 (28). – P. 7443–7455.
4. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., et al. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2010. – V. 111. – P. 1931–1946.
5. Zhai P.W., Hu Y., Chowdhary J., Trepte C.R., Lucker P.L., Josset D.B. A vector radiative transfer model for coupled atmosphere and ocean systems with a rough interface // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. – 2010. – V. 111. – P. 1025–1040.
6. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Некоторые особенности переноса излучения в пространственно ограниченных дисперсных средах // Известия Томского политехнического университета. – 2000. – Т. 303. – № 3. – С. 91–104.
7. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Исследование влияния размеров и формы рассеивающего объема на радиационные характеристики переноса излучения // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 5. – С. 12–15.
8. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Влияние отражающей поверхности на радиационный баланс дисперсной среды // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 39–42.
9. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. – М.: Мир, 1971. – 168 с.

Поступила 21.09.2012 г.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.А. Бочкарева*, Ю.А. Реутов

Томский политехнический университет

*Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск

E-mail: reutov@tpu.ru

Обозначена актуальность задачи оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) трубопроводов из полимерных материалов численными методами. С использованием деформационно-прочностных свойств слоев произведен расчет трехслойной армированной полимерной трубы методом конечных элементов (МКЭ), получены графики распределения эквивалентных напряжений и перемещений. Приведено описание разработанного алгоритма численной реализации задачи и сравнение результатов работы программы с имеющимися аналитическими решениями. В качестве проверки достоверности результатов расчет повторен в программном комплексе ANSYS. Сделаны выводы о перспективности применения метода.

Ключевые слова:

Полимерные материалы, многослойные трубы, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, ANSYS.

Key words:

Polymer materials, multilayer pipes, stress-strain state, finite element method, ANSYS.

Основным средством транспорта углеводородов в наши дни являются трубопроводы, на долю которых приходится более 90 % перекачиваемых нефти и газа. Проверенным и общепризнанным материалом для изготовления трубопроводов служит сталь. Это обусловлено рядом важных качеств

материала: прочность, устойчивость к разрывному давлению, низкий коэффициент теплового расширения, практически абсолютная герметичность. Однако использование стальных труб сопровождается существенными недостатками, основными из которых являются: подверженность коррозии,

большой вес, высокая теплопроводность. Они снижают срок службы, ухудшают гидравлические характеристики трубопровода, затрудняют процесс строительства. Производители и эксплуатирующие организации постоянно разрабатывают и совершенствуют методы борьбы с этими отрицательными факторами, но полностью избежать их невозможно. Поэтому параллельным направлением является создание труб из альтернативных материалов, самые перспективные из которых – полимерные материалы. Основными преимуществами труб из полимерных материалов являются: устойчивость к коррозии, легкость, гибкость и прочность, разнообразие методов соединения, превосходная гидравлика (расход на 50 % превышает расход в металлических трубопроводах того же диаметра), долговечность (срок службы составляет 20 лет при наземной прокладке и 50 лет при подземной прокладке) [1].

С целью улучшения прочностных характеристик труб в их конструкции применяют несколько слоев из разных материалов, в совокупности обеспечивающих высокую герметичность и прочностные свойства. Многослойные трубы имеют два или три слоя: бипластмассовые (полиэтиленовые трубы, упрочненные наружной стеклопластиковой оболочкой), трехслойные трубы (полиэтиленовые трубы, со средним армирующим слоем, представленным синтетической лентой или металлическими нитями) и т. д.

Одной из самых современных разработок среди многослойных полимерных труб является труба Soluforce RTP (от англ. reinforced thermoplastic pipe – усиленная термопластиковая труба). Труба Soluforce имеет три слоя. Внутренний сделан из полиэтилена (ПЭ 100), средним слоем является армирующая лента, а в качестве внешнего покрытия служит белый полиэтилен (ПЭ 100), стойкий к ультрафиолетовому излучению (рис. 1).



Рис. 1. Строение трубы Soluforce RTP

Применение труб Soluforce возможно при строительстве выкидных линий, систем нагнетания воды в пласт и в транспорте газа. Данные трубы могут применяться и в других областях, например в канализационных сетях и системах орошения. По прочностным характеристикам трубы Soluforce де-

лятся на три типа: легкий (Light), классический (Classic) с армирующим слоем из арамидной ленты и тяжелый (Heavy), вместо арамидной ленты упрочненный сеткой из стальных волокон. Каждый тип производится с внутренним диаметром 100 или 150 мм [2].

Однако существует ряд причин, по которым полимерные трубы не получают широкого распространения. Во-первых, отсутствуют научно обоснованные подходы к выбору критериев оценки работоспособности труб, недостаточен опыт их применения в различных условиях; во-вторых, исследование состояния трубопровода невозможно существующим оборудованием диагностики, применяемого для стальных трубопроводов. Для разработки обоснованных критериев работоспособности необходим анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) трубопроводов из полимерных материалов, поэтому выбор методов получения параметров НДС является актуальной проблемой.

Известным аналитическим методом определения параметров НДС трубы, находящейся под действием внутреннего давления, является решение задачи Ламе. Однако он не может применяться при расчете многослойной трубы. В этом случае используются численные методы, одним из которых является метод конечных элементов.

Задача определения деформационно-прочностных свойств полимерной многослойной трубы сводится к вычислению параметров напряженно-деформированного состояния, которое определяется уравнениями механики деформируемого твердого тела [3]. Численная реализация задачи определения параметров НДС конструкции проводилась методом конечных элементов [4] с использованием разбиения расчетной области на конечные элементы треугольной формы. Метод основан на принципе минимизации потенциальной энергии. Алгоритм расчета был реализован на языке программирования Fortran.

В силу осевой симметрии задачи рассматривается расчетная область, представляющая собой часть осевого сечения трубы, и решается осесимметричная задача теории упругости (рис. 2).

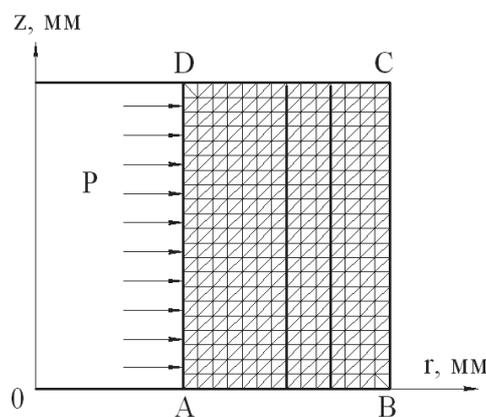


Рис. 2. Расчетная схема

Для разбиения расчетной области используются треугольные конечные элементы с шестью компонентами узловых перемещений. Для многослойной трубы разбиение расчетной области делается таким образом, чтобы узлы конечно-элементной сетки приходились на границы слоев. В этом случае внутри каждого из конечных элементов механические характеристики определяются свойствами слоя, попавшего в этот элемент, и не претерпевают разрывов. Предполагается, что на границах раздела слоев адгезия идеальна.

Граничные условия:

На границах АВ и DC ставятся так называемые условия скольжения: $v=0$, $\sigma_r=0$, где v – осевое смещение; σ_r – касательные напряжения.

На границе ВС: $\sigma_n=\sigma_r=0$, где σ_n – нормальные напряжения.

На границе AD: $\sigma_n=P$, $\sigma_r=0$, где P – внутреннее давление.

Проверка программы осуществлялась сравнением результатов, полученных при расчете НДС однослойной полиэтиленовой трубы методом конечных элементов, с известными аналитическими решениями задачи Ламе. Результаты численного и аналитического решения показали достаточно хорошее совпадение значений эквивалентного напряжения и перемещений по толщине стенки трубы в пределах 3...5 %.

В качестве объекта исследования была выбрана труба Soluforce Classic. Характеристики трубы приведены в таблице [2, 5].

В результате расчета для трубы Soluforce была получена поверхность распределения эквивалентных напряжений (рис. 3). В осевом направлении значения напряжения в каждом слое трубы не меняются в связи с тем, что на трубу действует только внутреннее давление.

Таблица. Характеристики трубы Soluforce Classic

| Наименование трубы | Soluforce M480 HPG | | |
|--|--------------------|-----------------|----------|
| Давление в трубе (максимально допустимое), МПа | 6,5 | | |
| Внутренний диаметр, мм | 100 | | |
| Наружный диаметр, мм | 128 | | |
| Слой | внутренний | средний | наружный |
| Толщина слоя, мм | 7,0 | 3,5 | 3,5 |
| Материал слоя | ПЭ 100 | Арамидная лента | ПЭ 100 |
| Модуль упругости, МПа | 1300 | 10 000 | 1300 |
| Коэффициент Пуассона | 0,43 | 0,30 | 0,43 |

Также для сравнения расчет НДС трехслойной трубы был произведен в программном комплексе ANSYS. Распределения эквивалентных напряжений ($\sigma_{экв}$) и перемещений (v) по толщине стенки трубы (δ), рассчитанные на основе разработанного алгоритма, а так же в ANSYS [6], показаны на рис. 4 и 5. Видно, что результаты двух расчетов различаются в пределах 5 %.

На рис. 4 наблюдается скачок эквивалентных напряжений среднего слоя из армирующей ленты, т. к. его модуль упругости много больше модуля упругости полиэтилена. Таким образом, максимальная нагрузка приходится на средний армирующий слой. Из рис. 5 видно, что градиент деформации в среднем слое меньше, чем в полиэтиленовом.

Выводы

Распределение эквивалентных напряжений по толщине стенки многослойной армированной

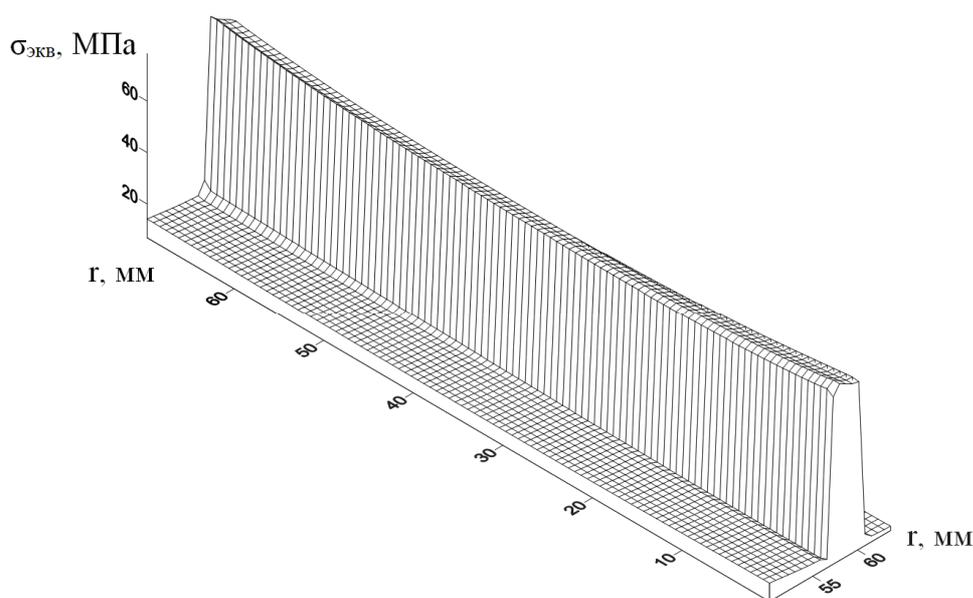


Рис. 3. Поверхность эквивалентных напряжений по толщине стенки трубы

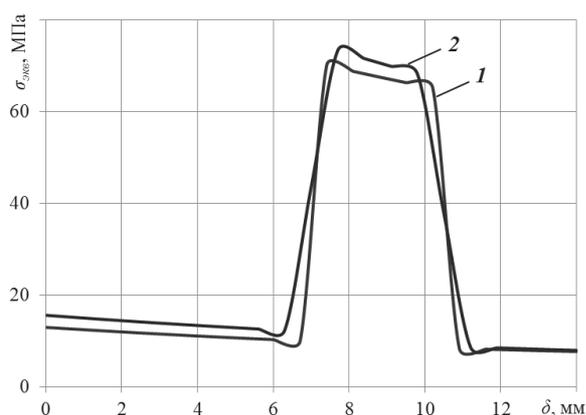


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений по толщине стенки трубы, полученные на основе разработанного алгоритма (кривая 1) и в программном комплексе ANSYS (кривая 2)

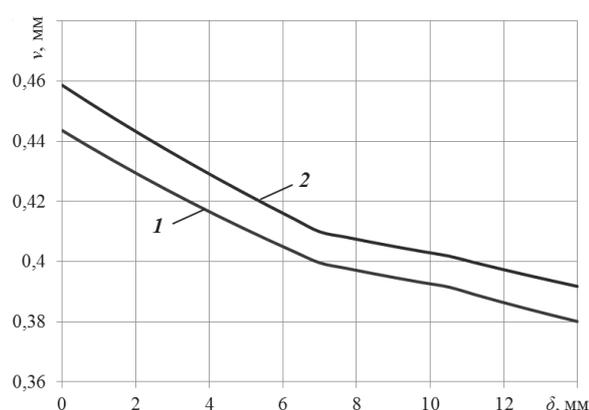


Рис. 5. Распределение перемещений по толщине стенки трубы, полученные на основе разработанного алгоритма (кривая 1) и в программном комплексе ANSYS (кривая 2)

полимерной трубы показывает, что наибольшие значения напряжений имеет средний слой из армирующей ленты. Он воспринимает большую часть нагрузки и таким образом полностью выполняет задачу упрочнения трубы. Максимальные напряжения в полиэтиленовом слое составили 13 МПа, что значительно меньше предела текучести материала (20...25 МПа). Перемещения также незначительны, относительная деформация не превышает 1 %.

Предложенный метод оценки деформационно-прочностных свойств многослойных полимерных

труб может использоваться: при доработке нормативной документации по проектированию трубопроводных систем из полимерных материалов, при составлении таблиц и номограмм, с учетом современных требований, проверки прочности и устойчивости трубопроводов для различных материалов, давлений, осевых и изгибных нагрузок и других эксплуатационных факторов.

Кроме того, использование статистических данных о предельных прочностных характеристиках материала и о параметрах НДС позволит проводить оценку надежности трубопроводных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиллоуби Д.А., Вудсон Д., Суверлэнд Р. Полимерные трубы и трубопроводы / пер. с англ. – СПб.: Профессия, 2010. – 486 с.
2. Pipelife Nederland B.V. // Soluforce® RTP. URL: www.soluforce.net (дата обращения: 17.10.2012).
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Стручков А.С. Хладостойкость и особенности сопротивления разрушению нефтегазовых пластмассовых труб: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Якутск, 2005. – 35 с.
6. Бурков П.В., Ключ О.В., Буркова С.П. Исследование напряженно-деформированного состояния подземных трубопроводов, проложенных в условиях вечной мерзлоты // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 0В2. – С. 184–190.

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АМПЛИТУДНОГО ТРАНСПАРАНТА

Н.А. Макенова^{1,2}, Р. Ф. Джураев²¹Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск²Томский политехнический университет

E-mail: mna.05@mail.ru

Рассмотрено обращение волнового фронта с использованием амплитудного транспаранта (модулятора). В результате численных исследований показано, что, несмотря на значительное поглощение модулятором энергии, достигается практически полная компенсация турбулентных искажений.

Ключевые слова:

Алгоритм ОВФ, адаптивная система, амплитудный модулятор, турбулентные искажения.

Key words:

Algorithm of wavefront, adaptive system, amplitude modulator, turbulent distortions.

Существует несколько методов задания амплитудно-фазового распределения пучка: так, в работе Вохник О.М. [1] экспериментально исследована эффективность адаптивной системы с ОВФ-зеркалом на основе вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ). Показано, что в такой системе возможно выполнить коррекцию внутрирезонаторных искажений. Эффективность конвертации гауссовского пучка ВРМБ-зеркалом составила приблизительно 60 %, т. е. в системе наблюдались достаточно большие потери мощности. Еще одна возможность управления амплитудой и фазой излучения — это использование амплитудного модулятора совместно с упругим зеркалом. Модулятор [2] (пластина с регулируемой прозрачностью) задает требуемое распределение амплитуды, тогда как зеркалом выполняется фазовое сопряжение. Недостатки такой системы очевидны: при поглощении мощности пластинкой снижается эффективность передачи энергии системой [3]. В настоящее время методы амплитудно-фазового управления интенсивно развиваются в России и за рубежом [3–7]. Наибольшее количество публикаций по данной теме сделано Джеффри Барчерсом [4]. Им рассматривалась возможность увеличения быстродействия итерационного алгоритма [5]. Был предложен алгоритм, позволяющий сформировать распределение амплитуды и фазы за одну итерацию [6]. Несмотря на большое количество публикаций по данной проблеме, невозможно сказать, что в настоящее время разработан эффективный универсальный быстродействующий алгоритм амплитудно-фазовой коррекции. Поэтому попытка построения такого алгоритма обсуждается в настоящей статье.

Для выполнения обращения волнового фронта необходимо задать требуемое распределение амплитуды и фазы излучения на основе информации о параметрах опорного сигнала. Одна из возможностей задания требуемого распределения амплитуды — это модулятор, т. е. пластинка с регулируемой прозрачностью. Для проведения анализа решалась модельная задача. Турбулентность задавалась одним экраном, который был расположен в середине трассы. Интенсивность искажений изменялась. Фаза излучения формировалась идеальной системой, ампли-

туда — с использованием модулятора. При решении задачи варьировался начальный радиус пучка.

Компенсация искажений в рассматриваемой системе иллюстрируется данными, помещенными в табл. 1. Результаты приведены для двух начальных радиусов: $a_0=1$ и $a_0=5$.

Интенсивность турбулентных искажений достаточно велика: $r_0=0,005$. Так как экран расположен в середине трассы, задача является симметричной относительно плоскости его размещения. Поэтому представить искажения «прямого» пучка возможно по распределению амплитуды опорного сигнала. Это распределение помещено во втором столбце табл. 1. В третьем столбце показан пучок, падающий на модулятор, и в столбце № 4 — результат формирования амплитуды модулятором. Можем видеть, что пластинка с регулируемой прозрачностью поглощает достаточно большое количество энергии излучения. Для пучка с малым радиусом ($a_0=1$) поглощение составляет около 90 %, при увеличении радиуса ($a_0=5$) эта величина возрастает до 97 %. В первом случае в плоскости наблюдения амплитуда, сформированная в результате ОВФ, остается искаженной (табл. 1, ст. 5), во втором случае достигается практически полная компенсация турбулентных возмущений. Таким образом, качество ОВФ зависит от размеров области, на которой оно выполняется. Этот результат отмечался также в работе Лукина В.П. [8].

Для характеристики светового поля в плоскости наблюдения в адаптивной системе использовались следующие критерии:

- критерий фокусировки:

$$J(t) = \frac{1}{P} \iint \rho(x, y) I(x, y, t) dx dy,$$

где $J(t)$ пропорционален мощности излучения, падающей в пределы апертуры с диаметром, равным диаметру элементарного пучка. Так как критерий нормирован на полную мощность P , генерируемую лазерным источником, он является безразмерной величиной. В формуле также имеется

$$\rho(x, y) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{S^2}\right] - \text{функция пропуска}$$

Таблица 1. Иллюстрация работы модулятора ($z=0,5, r_0=0,005$, экран расположен в середине трассы)

| Начальный радиус пучка | Распределение амплитуды опорного пучка, $z = 0$ | Распределение амплитуды пучка до модулятора, $z = 0$ | Распределение амплитуды пучка, прошедшего модулятор, $z = 0$ | Распределение амплитуды пучка в плоскости наблюдения, $z = 0,5$ |
|------------------------|---|--|--|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | | Полная энергия 100 % | Полная энергия 10 % | $J = 0,021, \varepsilon = 0,640$ |
| 5 | | Полная энергия 100 % | Полная энергия 3 % | $J=0,015, \varepsilon=0,038$ |

ния апертуры приемника и распределение интенсивности излучения в плоскости регистрации $I(x,y,t)$; x и y – текущие координаты; S – площадь апертуры приемника;

- *квадратичная ошибка:*

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\iint (A(x,y) - A_G(x,y))^2 dx dy}{\iint (A_G(x,y))^2 dx dy} \right\},$$

где $A_G(x,y)$ – гауссовский профиль; $A(x,y)$ – распределение амплитуды пучка.

Количественные данные, характеризующие использование модулятора в адаптивной системе, помещены на рис. 1 и 2. На рис. 1 представлены результирующие значения критерия фокусировки J , на рис. 2 – отклонение формы пучка, полученного в результате коррекции, от гауссовского профиля.

Графики показывают, что из-за поглощения энергии модулятор обеспечивает результирующие значения критерия фокусировки существенно более низкие по сравнению с идеальной системой (сравнение кривых 1 и 2 с кривой 3, рис. 1). При увеличении начального радиуса пучка потери возрастают, критерий фокусировки уменьшается (из сравнения кривых 1 и 2).

В то же время в рассматриваемой системе с высокой точностью можно сформировать в плоскости наблюдения пучок с гауссовским распределением амплитуды. Этот вывод основан на данных, помещенных на рис. 2, где показана зависимость квадратичной ошибки ε . Можем видеть, что квадратичная ошибка ε уменьшается с увеличением радиуса пучка, но одновременно возрастает поглощаемая модулятором энергия.

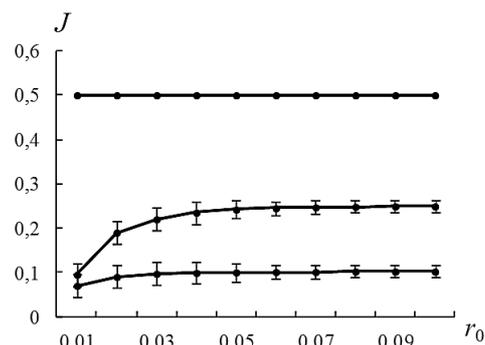


Рис. 1. Эффективность коррекции турбулентных искажений с использованием модулятора. Длина трассы $z = 0,5$, экран расположен в середине трассы. Кривая 1 – ОВФ с использованием модулятора, выполняемое на одном радиусе пучка; 2 – ОВФ на двух радиусах пучка; 3 – ОВФ в идеальной системе

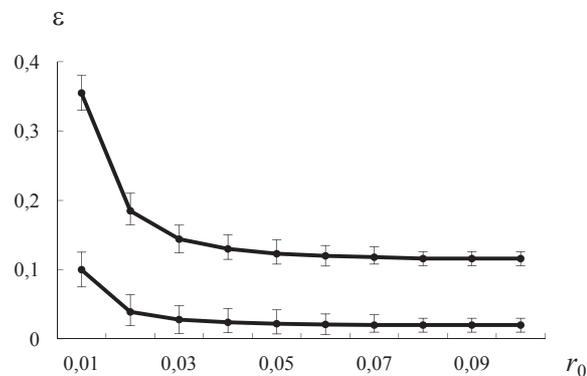


Рис. 2. Относительное отклонение амплитуды пучка, сформированного при адаптивном управлении от гауссовского профиля. Кривая 1 – ОВФ с использованием модулятора, выполняемое на одном радиусе пучка; 2 – ОВФ на двух радиусах пучка

Выводы

В целом по приведенным результатам заключаем, что амплитудный модулятор целесообразно использовать при формировании пучка с заданным

распределением интенсивности, в то же время его применение не обеспечивает эффективной передачи энергии лазерного излучения в турбулентной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вохник О.М., Снажакин В.А., Терентьева И.В. Экспериментальное исследование энергетических характеристик твердотельного лазера с ВРМБ-зеркалом // Оптика атмосферы и океана. – 1995. – Т. 8. – № 3. – С. 393–396.
2. Love G.D., Fender J.S., Restaino. Adaptive wave front shaping with liquid crystals // Opt. Photon. News. – 1995. – V. 6. – P. 16–21.
3. Roggemann M.C., Lee D.J. A two deformable mirror concept for correcting scintillation effects in laser beam projection through the turbulent atmosphere // Applied Optics. – 1998. – V. 37. – № 21. – P. 4577–4585.
4. Barchers J.D. Evaluation of the impact of finite-resolution effects on scintillation compensation using two deformable mirrors // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – V. 18. – № 12. – P. 3098–3109.
5. Barchers J.D. Application of the parallel generalized projection algorithm to the control of two finite-resolution deformable mirrors

- for scintillation compensation // J. Opt. Soc. Am. A. – 2002. – V. 19. – № 1. – P. 54–63.
6. Barchers J.D. Closed-loop stable control of two deformable mirrors for compensation of amplitude and phase fluctuations // J. Opt. Soc. Am. A. – 2002. – V. 19. – № 5. – P. 926–945.
7. Barchers J.D., Ellerbroek B.L. Improved compensation of turbulence-induced amplitude and phase distortions by means of multiple near-field phase adjustments // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – V. 18. – № 2. – P. 399–411.
8. Лукин В.П. Сравнительные характеристики некоторых алгоритмов коррекции // Квантовая электроника. – 1981. – Т. 8. – № 10. – С. 2145–2153.

Поступила 05.07.2012 г.

УДК 534.2

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФРАЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ ОТ НАЗЕМНЫХ ВЗРЫВОВ

Д.С. Провоторов, А.В. Соловьев, Ю.А. Виноградов

Томский государственный университет
E-mail: provotorov@sibmail.com

Определены амплитудно-частотные характеристики инфразвуковых сигналов, генерируемых наземными взрывами. С помощью метода триангуляции определены направления прихода акустических сигналов, которые указывают на источник, где проводились взрывные работы. Использование вейвлет-преобразования с базовой функцией Морле позволило однозначно идентифицировать низкочастотные акустические сигналы от наземных взрывов.

Ключевые слова:

Инфразвук, источники инфразвуковых сигналов, наземные взрывы.

Key words:

Infrasound, sources of infrasonic signals, land explosions.

В настоящее время исследованию низкочастотных акустических сигналов уделяется большее внимание. Их изучение актуально в связи с необходимостью обоснования надежных сигнальных признаков техногенных воздействий (запуски ракет, несанкционированные взрывы и ядерные испытания). Кроме того, результаты этих работ могут быть использованы для идентификации отливков от цунами и предвестников землетрясений.

На сегодняшний день Организация по Договору о всеобъемлющем запрещении ядерных испытаний ведет мониторинг сейсмических и инфразвуковых сигналов от ядерных взрывов, но наряду с этим во многих районах земного шара выполняется большой объем горных, дорожных работ, сопровождающихся подземными и наземными

взрывами, а также взрывы от деятельности военных, которые не отслеживаются всемирной сетью. Очень важно иметь представление об инфразвуковых сигналах, порождающихся наземными взрывами, с целью обнаружения источников этих сигналов.

Целью данной работы является исследование сигналов от наземных взрывов для выявления сигнальных признаков низкочастотных акустических сигналов, разработка методики выделения и определения пеленга на источник.

Исследованию инфразвуковых сигналов от наземных взрывов посвящено большое количество работ. В работе [1] представлены результаты анализа исследования распространения инфразвуковых волн от взрывов. В работе [2] на примере повто-

ряющихся взрывов, происходивших на полигоне в северной Финляндии, проведен анализ вариаций оценок азимутов и кажущихся скоростей приходов звуковых волн на датчики сейсмоакустического комплекса «Апатиты». Получены оценки точности локации этих взрывов. Показано, что связь между погодными условиями и фактом наличия или отсутствия первого прихода инфразвуковой волны действительно существует. В работе [3] исследованы вариации амплитуды импульсов давления от маломощных наземных взрывов при различных параметрах окружающей среды.

С марта 2010 г. в Новосибирской и Кемеровской областях проходит программа уничтожения боеприпасов. В Томском государственном университете в режиме непрерывного мониторинга ведется регистрация низкочастотных акустических сигналов инфразвукометрическим комплексом. Комплекс включает три пространственно разнесенных микробарометра марки ISGM03, позволяющие регистрировать акустические сигналы в частотном диапазоне от 0,02 до 4,00 Гц, максимальное отклонение чувствительности от среднего значения в рабочем диапазоне частот – 2,5 %. Размещение измерительных пунктов представляет собой форму треугольника. Расстояние между первым и вторым пунктами регистрации 98 м, расстояние между вторым и третьим – 276 м (рис. 1).

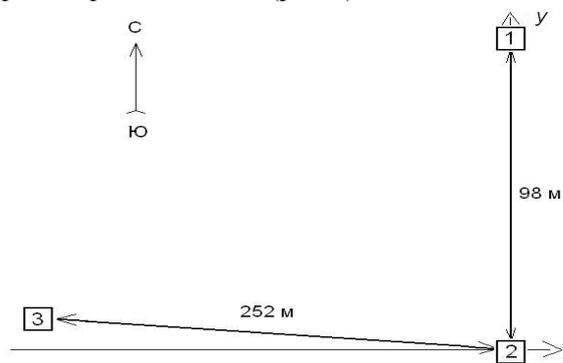
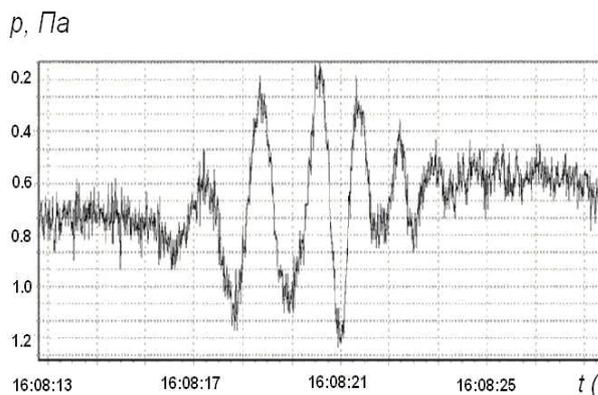


Рис. 1. Схема расположения измерительных пунктов (цифрами обозначены измерительные пункты)



а

Сигналы от наземных взрывов, проводимых в Новосибирской и Кемеровской областях, уверенно фиксировались инфразвукометрическим комплексом. Сигналы были зарегистрированы на всех акустических датчиках. Регистрировались акустические сигналы пакетами, состоящими из 5–10 импульсных сигналов. Длительность одного пакета составляет порядка 10 мин. Время появления сигналов совпадает со временем проведения взрывных работ. В качестве примера на рис. 2 показаны время появления и амплитуды от пика до пика инфразвуковых сигналов 25 января 2011 г.

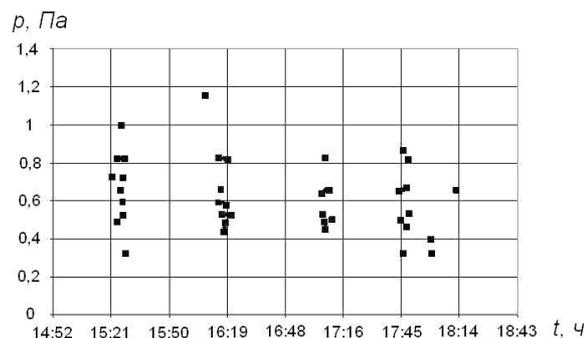
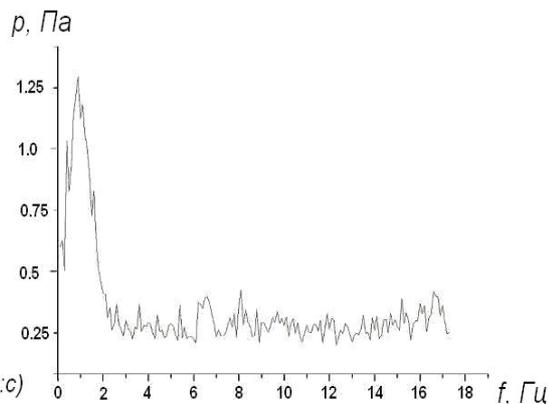


Рис. 2. Время появления инфразвуковых сигналов 25 января 2011 г.

Временная форма для всех регистрируемых сигналов имеет схожий вид. Сигнал представляет собой форму цуга, состоящего из нескольких периодов с постепенно нарастающей и потом убывающей амплитудой и с монотонно уменьшающимся периодом (рис. 3, а). Спектральный анализ показал, что усредненный спектр данных сигналов имеет максимум на частоте 1 Гц (рис. 3, б).

Для выделения регистрируемых сигналов от взрывов из шумов, а также для анализа внутренней частотной структуры было использовано вейвлет-преобразование. В качестве базовой функции вейвлет-преобразования использовалась функция Морле [4], вид которой наиболее приближен к форме исследуемых сигналов (рис. 4, а).



б

Рис. 3. Временная форма инфразвукового сигнала от наземного взрыва, зарегистрированного микробарометром № 2 (а); усредненный спектр инфразвуковых сигналов (б)

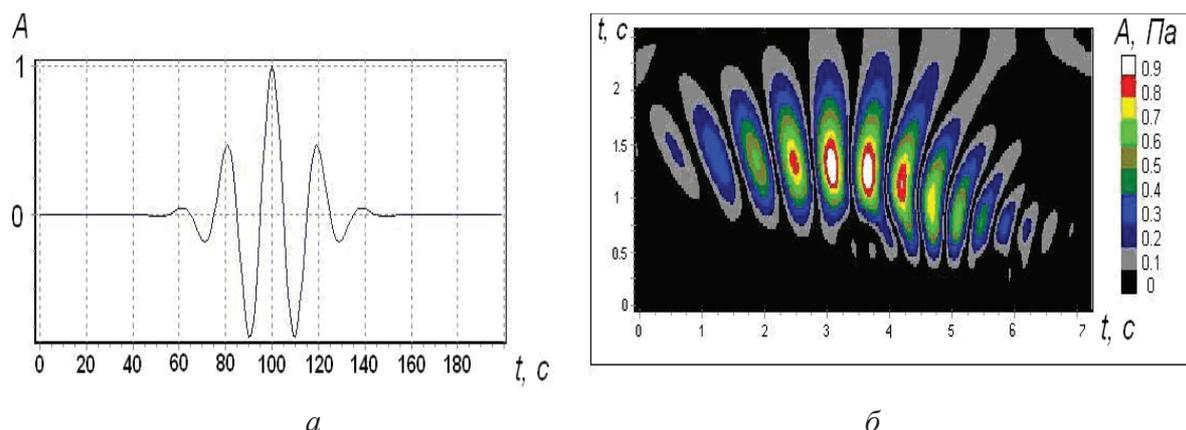


Рис. 4. Временное представление базовой вейвлет-функции (Морлет) (а) и результат вейвлет-преобразования сигнала (б)

Использование вейвлет-преобразования с данной базовой функцией позволило однозначно идентифицировать низкочастотные акустические сигналы от наземных взрывов. Типичный вид вейвлет-преобразования импульсных сигналов от взрывов представлен на рис. 4, б. Цветом представлено изменение амплитуды сигналов. Характерной особенностью сигналов от наземных взрывов является монотонное изменение периодов от 1,50 до 0,75 с. Вместе с тем в момент максимальной амплитуды акустических сигналов от наземных взрывов проявляются высокочастотные составляющие порядка 0,5 с (рис. 4, б).

Анализ амплитуд сигналов от пика до пика показал, что наибольшее количество сигналов наблюдалось с амплитудой от 0,5 до 0,7 Па с разбросом максимальной амплитуды от пика до пика в пределах от 0,4 до 1,2 Па. Длительность сигналов составляла от 2 до 8 с, средняя длительность сигнала 5 с (рис. 5).

Для определения направления прихода инфразвуковых волн от взрывов использовался известный метод триангуляции [5], основанный на измерении задержек прихода инфразвукового сигнала на пространственно разнесенные измерительные пункты.

Расчет азимутального прихода акустических сигналов проводился по формуле [6]:

$$\theta = \arctg \frac{\tau_{21}(x_1 - x_2) - \tau_{21}(x_1 - x_3)}{\tau_{23}(y_1 - y_2) - \tau_{23}(y_1 - y_3)},$$

где τ_{21} и τ_{23} – временные задержки прихода инфразвукового сигнала на 1-й и 3-й измерительные пункты относительно 2-го соответственно (рис. 1); (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) – координаты измерительных пунктов декартовой системы координат с центром во 2-м измерительном пункте. Координатные оси абсцисс и ординат совпадают с географическими направлениями восток–запад и север–юг соответственно (рис. 1).

За весь период наблюдений инфразвуковые сигналы поступали с двух угловых секторов (рис. 6). Наибольшее количество сигналов приходило с углового сектора, совпадающим с направлением на полигон с. Шилово Новосибирской области (обозначенный на рисунке светло-серым цветом). Второй угловой сектор (обозначенный темно-серым цветом) совпадает с направлением на полигон вблизи г. Юрга Кемеровской области. Следует отметить, что угловой разброс направления прихода инфразвуковых сигналов связан с влиянием метео-

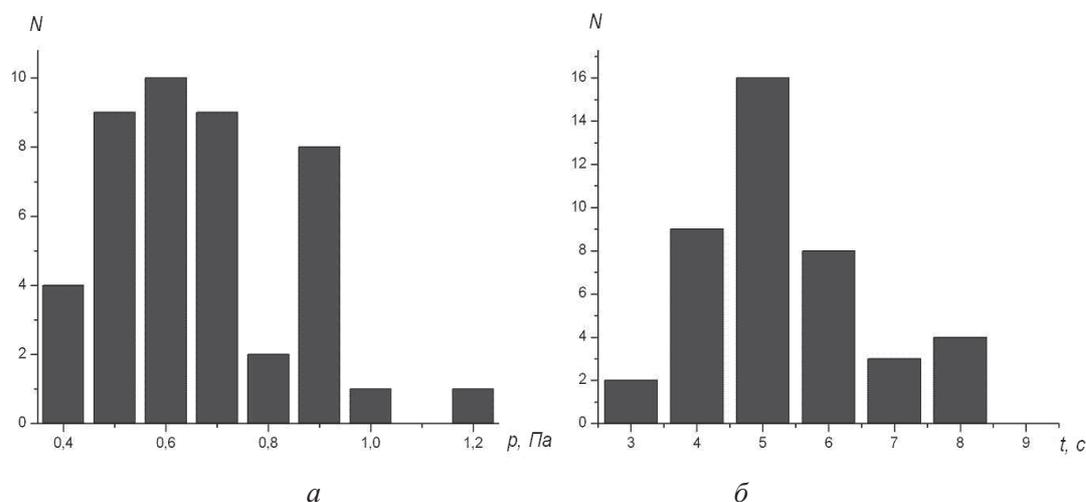


Рис. 5. Распределения амплитуд (а) инфразвуковых сигналов от пика до пика и длительности сигналов (б)

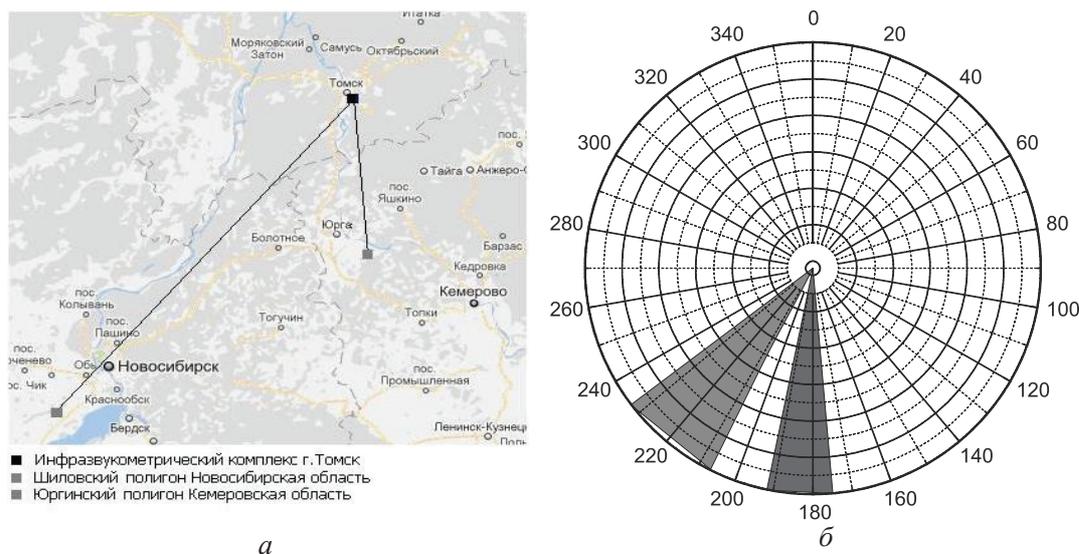


Рис. 6. Направление полигонов, от которых были зарегистрированы инфразвуковые сигналы (а) и угловые сектора прихода сигналов (б): светло-серый цвет – сектор угла от 207 до 231°, темно-серый цвет – сектор угла от 175 до 190° относительно меридиана Земли

рологических условий на распространение акустической волны [2, 7, 8]. Расстояние от Шиловского полигона до места расположения инфразвукометрического комплекса в г. Томске составляет 254 км, от Юргинского – 96 км. Направления на военные полигоны попадают именно в те угловые сектора, откуда по нашему анализу приходили инфразвуковые сигналы. На карте угол между направлением полигона с. Шилово и меридианом Земли относительно точки расположения инфразвукометрического комплекса г. Томска равен 220°, угол между направлением полигона г. Юрги и меридианом – 176° (рис. 6, а).

Выводы

Использование вейвлет-преобразования с базовой функцией Морле позволило однозначно идентифицировать низкочастотные акустические сигналы от наземных взрывов. Характерной особенностью сигналов от наземных взрывов является монотонное изменение периодов от 1,50 до 0,75 с. Типичный вид инфразвуковых сигналов от назем-

ных взрывов представляет собой форму цуга, состоящего из 5–10 периодов с постепенно нарастающей и потом убывающей амплитудой и монотонно уменьшающимся периодом. Среднее значение частотной составляющей имеет максимум на частоте 1 Гц. С помощью метода триангуляции определены направления прихода акустических сигналов, которые указывают на источник, где проводились взрывные работы. Идентификация низкочастотных акустических сигналов от наземных взрывов может быть использована для разработки методов локации и обнаружения наземных взрывов, а также для построения модели распространения акустических сигналов в реальной атмосфере.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (Соглашение № 14.В37.21.1893), ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007–2012 гг.», гранта РФФИ № 12-05-90804-мол_рф_нр. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ ГК № 16.518.11.7048.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Куличков С.Н. Дальнее распространение звука в атмосфере (обзор) // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 1992. – Т. 28. – № 4. – С. 339–360.
- Асминг В.Э., Евтюгина З.А., Виноградов Ю.А., Федоров А.В. Анализ инфразвуковых сигналов, генерируемых техногенными источниками // Вестник МГТУ. – 2009. – Т. 12. – № 2. – С. 300–307.
- Рыбнов Ю.С., Кудрявцев В.И., Евменов В.Ф. Экспериментальные исследования влияния приземного слоя атмосферы и подстилающей поверхности на амплитуду слабых воздушных ударных волн от наземных химических взрывов // Физика горения и взрыва. – 2004. – Т. 40. – № 6. – С. 98–100.
- Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166. – № 11. – С. 123.
- Waldemark K. High Resolution for Infrasound Recording at the Swedish Institute of Space Physics // Swedish Institute of Space Physics, IRF Scientific Report 242. – 1997. – P. 124–126.
- Donn W.L. Atmospheric infrasound radiated by bridges // J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – V. 56. – № 5. – P. 1367–1370.
- Провоторов Д.С., Соловьев А.В., Сорокин А.Г. Связь сезонносуточных вариаций спектральной плотности инфразвукового фона с метеорологическими величинами // Известия вузов. Сер. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 9/3. – С. 227–228.
- Бочаров А.А., Колесник А.Г., Соловьев А.В. Акустические шумы урбанизированных территорий на примере г. Томска // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 1. – С. 191–196.

Поступила 05.04.2012 г.

УДК 621.384.6

ВЫХОДНОЕ ОКНО СИЛЬНОТОЧНОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ «АСТРА»

И.С. Егоров, М.И. Кайканов, Г.Е. Ремнев

Томский политехнический университет

E-mail: egoris@tpu.ru

Представлены результаты исследований инжекции в атмосферу сильноточного импульсного электронного пучка при частоте следования до 50 имп/с с энергией электронов 300...350 кэВ, током до 0,6 кА, длительностью импульса тока пучка 120 нс. Определена энергия инжектируемого электронного пучка для конструкций выходного окна с поддерживающей решеткой и без неё. Приведен анализ тепловых режимов работы для указанных конструкций выходных окон.

Ключевые слова:

Импульсный ускоритель электронов, выходное окно ускорителя, разделительная фольга, поддерживающая решетка.

Key words:

Pulsed electron accelerator, accelerator exit window, separating foil, supporting grid.

Введение

Сравнивая существующие подходы к построению импульсных ускорителей электронов [1, 2], можно проследить тенденцию к упрощению и удешевлению их конструкций и применению стандартизованных комплектующих и материалов, что особенно важно для узлов с ограниченным ресурсом — высоковольтных коммутаторов и выходных окон. Так, например, в [1] для вывода пучка электронов кинетической энергией до 486 кэВ использовалась алюминиевая поддерживающая решетка, на которую укладывалась в два слоя алюминиевая фольга толщиной 15 мкм. В [2] авторы применяют 50 мкм титановую фольгу стандартного проката для вывода сканирующего электронного пучка с энергией электронов 0,7...1,0 МэВ. Аналогичная титановая фольга марки ВТ1–0 использовалась в конструкциях выводных окон сильноточного ускорителя электронов АСТРА [3]. Технологический режим работы указанного ускорителя предполагал генерацию и вывод в атмосферу сильноточного электронного пучка с частотой до 50 имп/с. Время непрерывной работы ускорителя составляло не менее 30 минут при неизменном значении частоты следования импульсов. Конструктивным особенностям выходных окон ускорителя АСТРА, а также определению их тепловых режимов работы посвящена данная статья.

Описание экспериментальной установки

Ускоритель АСТРА содержит высоковольтный импульсный генератор без формирующей линии, описанный в работе [4], который нагружен непосредственно на вакуумный электронный диод. Схематически устройство диода показано на рис. 1. В диоде используется взрывоэмиссионный планарный катод, закрепленный на полом катододержателя. Через полость катододержателя прокачивается трансформаторное масло, обеспечивая отвод тепла от катода. Применяемая конструкция катододержателя позволяет закреплять катоды из различных материалов диаметром 40 мм и изменять длину ускоряющего промежутка d в диапазоне от 10 до 45 мм.

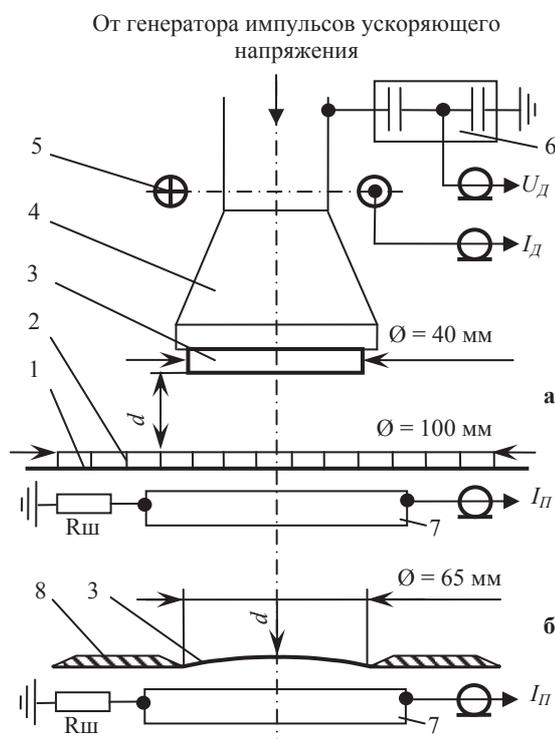


Рис. 1. Диодный узел ускорителя с поддерживающей решеткой (а) и без неё (б): 1) разделительная фольга Тi 50 мкм; 2) поддерживающая решетка (анод); 3) катод; 4) катододержатель; 5) пояс Роговского; 6) емкостный делитель напряжения; 7) коллектор цилиндра Фарадея; 8) опорный фланец

Выходное окно ускорителя выполнено в двух конструктивных вариантах. Оба варианта используют разделительную титановую фольгу марки ВТ1–0 толщиной 50 мкм для герметизации вакуумного объема диода. На рис. 1, а показана конструкция с поддерживающей решёткой. Решетка 2 изготовлена из нержавеющей стали, имеет шестигранную ячейку с толщиной ребра 0,4 мм, что обеспечивает оптическую прозрачность 92 % при диаметре сечения инжектирования пучка 100 мм (рис. 1, а). Конструкция выходного окна, представленная на рис. 1, б, не содержит поддерживающей

решетки [5] – разделительная фольга 3 закреплена по периметру опорного фланца 8 внутренним диаметром 65 мм (рис. 1, б). Под действием атмосферного давления разделительная фольга упруго прогибается в сторону катода на 2,2 мм по оси выходного окна.

Для определения энергии выведенного пучка калориметрическим способом, коллектор цилиндра Фарадея 7 заменяется коллектором калориметра (рис. 1), располагающимся на расстоянии <5 мм от плоскости разделительной фольги.

Результаты экспериментальных исследований и их анализ

Анализ осциллограмм ускоряющего напряжения и токов вакуумного диода (рис. 2) позволил предположить, что практически все электроны пучка с энергией < 100 кэВ поглощаются в фольге. Оценка по кривым мощности (рис. 3) показала, что ~ 50 % энергии, переносимой пучком, теряется в разделительной фольге. В данной оценке не учтено снижение энергии электронов пучка при прохождении фольги и воздушного промежутка между фольгой и коллектором цилиндра Фарадея.

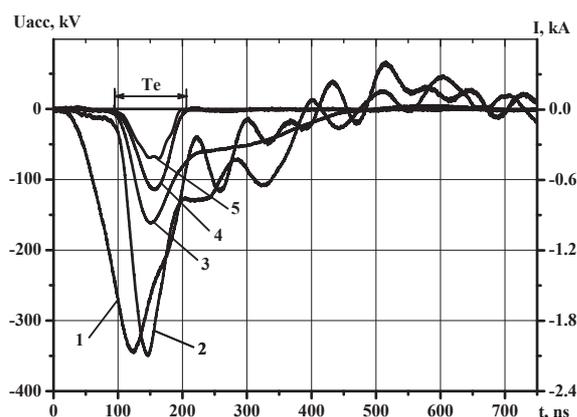


Рис. 2. Характерные осциллограммы напряжения (1), тока (2) генератора и тока пучка за поддерживающей решеткой (3), с фольгой Ti 50 мкм (4). Осциллограмма тока пучка, выведенного через выходное окно без поддерживающей решетки (5). Длина ускоряющего промежутка $d = 20$ мм

Калориметрические измерения энергии для окна с поддерживающей решеткой показали, что за анод без фольги, когда установлена только решетка, пучком переносится 19,2 Дж энергии и 9,5 Дж с фольгой.

Характерная осциллограмма тока пучка, выведенного через окно без поддерживающей решетки, приведена на рис. 2–6. Изменение конструкции выходного окна не привело к значимому изменению длительности тока инжектированного электронного пучка T_e (рис. 2). Энергия, переданная электронным пучком за разделительную фольгу, по результатам калориметрии составила 5,7 Дж.

Отпечатки выведенного пучка, полученные для выходных окон двух конструкций на дозиметрической плёнке ПОР при одинаковом количестве им-

пульсов (рис. 4), позволяют качественно оценить плотность распределения энергии по сечению пучка. Характерно, что плотность энергии центральной части пучка диаметром 2 см меньше плотности энергии на периферии. Отсутствие областей, затененных поддерживающей решеткой (рис. 4, б), является предпочтительной характеристикой для некоторых практических применений электронных пучков, например стерилизации [6]. Анализируя соотношение площадей сечения выходных окон и энергию, передаваемую пучком в атмосферу, можно сделать вывод, что средняя плотность энергии электронного пучка, инжектированного выходным окном без поддерживающей решетки, в 1,4 раза выше, чем для конструкции с поддерживающей решеткой, что в абсолютных значениях составляет 170 и 120 мДж/см² соответственно.

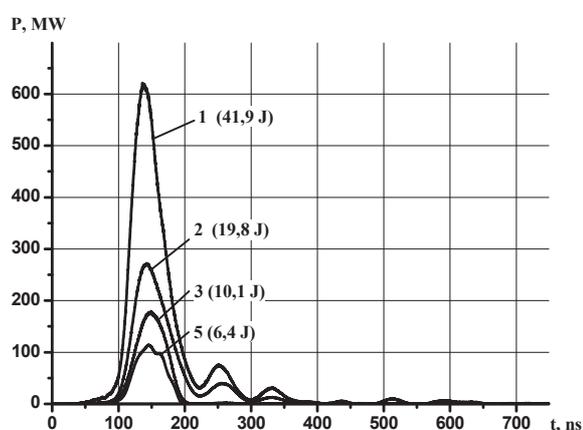


Рис. 3. Характерные кривые скорости передачи энергии генератором в диод (1), электронным пучком выходному окну с поддерживающей решеткой (2). Энергия, перенесенная электронным пучком в атмосферу через выходное окно с поддерживающей решеткой (3), без поддерживающей решетки (б). Все кривые приведены для $d = 20$ мм

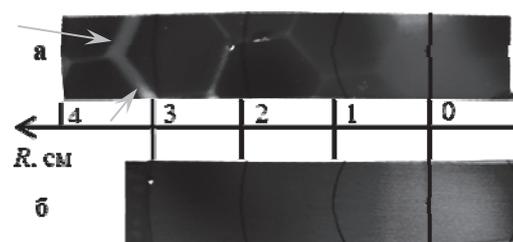


Рис. 4. Отпечаток электронного пучка на дозиметрической плёнке ПОР для выводного окна с поддерживающей решеткой (а), для выходного окна без поддерживающей решетки (б). Стрелками указаны области плёнки, затенённые ребрами поддерживающей решетки окна

Охлаждение разделительной фольги выходного окна в частотном режиме работы ускорителя осуществлялось протоком водовоздушной смеси (рис. 5). Водовоздушная смесь генерировалась эжектором с форсункой, обеспечивающей расход воды 5 л/мин при коэффициенте эжекции воздуха, близком 10.

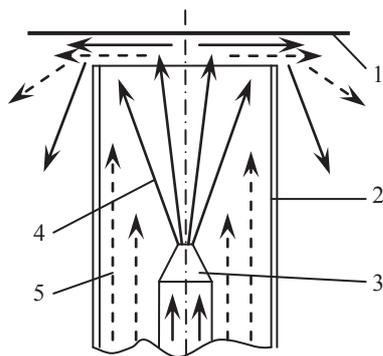


Рис. 5. Схема охлаждения разделительной фольги выходного окна электронного ускорителя АСТРА: 1) разделительная фольга Ti 50 мкм; 2) камера смешения; 3) форсунка, 4) потоки воды, 5) потоки воздуха

Максимальная частота следования импульсов ограничивалась остаточным давлением в камере диода, так как увеличение давления выше $1 \cdot 10^{-3}$ торр приводило к электрическому пробое высоковольтного изолятора электронной пушки. Производительность откачной системы, основанной на паромасляном диффузионном насосе НВМД-250, составляла 2350 л/с. Частота следования импульсов повышалась ступенями, с шагом 10 имп/с, при непрерывном контроле давления в вакуумной камере диода с помощью вакуумметра ВИТ-2. При работе ускорителя контроль остаточного давления осуществлялся по показаниям термомпарной лампы ПМТ-2.

Инжекция электронного пучка в атмосферу с частотой 30 имп/с привела к разрушению поддерживающей решетки выходного окна. Расход воды для охлаждения разделительной фольги при этом составлял 300 л/ч. Механизм разрушения поддерживающей решетки основан на её перегреве за счет процессов, происходящих в диоде. Деформация решетки под действием силы давления атмосферы на фольгу приводила к локальному сокращению длины ускоряющего промежутка и искажению электрического поля в нем. Далее возможны два варианта развития процесса разрушения выходного окна.

Согласно первому варианту в области локального перенапряжения электрического поля развивался дуговой разряд в вакууме, что приводило к оплавлению поддерживающей решетки и прогоранию фольги. Согласно второму – локально перегревалась и оплавлялась разделительная фольга, герметичность выходного окна нарушалась. Снижение электрической прочности ускоряющего промежутка при прорыве атмосферы приводило к возникновению дугового разряда.

Отказ от использования поддерживающей решетки обеспечил инжекцию пучка электронов без разрушения выходного окна на протяжении $1 \cdot 10^5$ импульсов тока пучка с частотой вплоть до 50 имп/с при аналогичных условиях охлаждения разделительной фольги. Оценка свойств разделительной фольги после проведения эксперимента

показала отсутствие следов её перегрева и деградации. На поверхности разделительной фольги со стороны катода обнаружена плёнка серого цвета. Результаты элементного анализа плёнки показали (рис. 6, а), что средняя толщина плёнки составляет порядка 0,5 мкм, в её составе преобладает углерод. Предполагаемый источник углерода – пары масла откачной вакуумной системы.

Элементный анализ выявил наличие материалов катода (рис 6, б) на поверхности разделительной фольги. Эрозия катода привела к изменению его эмиссионных свойств. По результатам калориметрии, образование пленки на поверхности анода и деградация катода привели к снижению энергии, переносимой пучком за анод с 5,7 до 4,5 Дж/имп за $1 \cdot 10^5$ импульсов тока пучка.

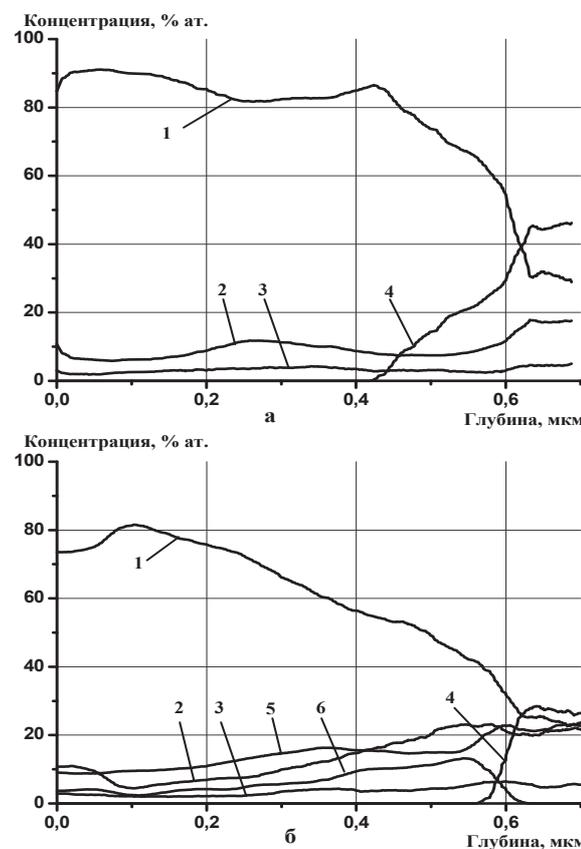


Рис. 6. Элементный анализ пленки (а) и включений (б) на поверхности разделительной фольги выходного окна электронного ускорителя АСТРА: 1) C; 2) O; 3) N; 4) Ti; 5) Cu; 6) Al

При частоте следования 60 имп/с остаточное давление в камере диода за $1,3 \cdot 10^3$ импульсов тока пучка превысило значения $1 \cdot 10^{-3}$ торр.

Для конструкции выходного окна без поддерживающей решетки была установлена возможность инжекции электронного пучка с частотой 20 имп/с при охлаждении разделительной фольги потоком атмосферного воздуха (рис. 7). Высоконапорный вентилятор 0,8ЭВ-2 обеспечивал скорость потока воздуха более 2 м/с вдоль поверхности фольги. Продолжительность эксперимента соста-

вила $4 \cdot 10^4$ импульсов тока пучка без разрушения выходного окна. Диагностика состояния выходного окна показала увеличение глубины прогиба разделительной фольги по оси окна с 2,2 до 3,0 мм. После напуска атмосферы глубина прогиба сохранилась. Равномерная пластическая деформация фольги по всему сечению выходного окна свидетельствует о постепенном разогреве разделительной фольги при недостаточной скорости отвода тепла. Результаты элементного анализа поверхности разделительной фольги со стороны катода также показали наличие плёнки с преобладанием углерода. Средняя толщина плёнки составила 0,35 мкм. Фрагменты катода также обнаружены на аноде.

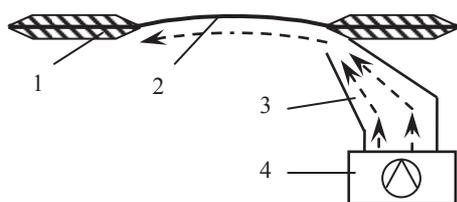


Рис. 7. Схема охлаждения разделительной фольги выходного окна без поддерживающей решетки потоком воздуха: 1) опорный фланец; 2) разделительная фольга Ti 50 мкм; 3) воздухопровод с раструбом; 4) нагнетатель 0,8ЭВ-2. Стрелками и пунктирными линиями показаны направления движения воздушных потоков

Содержание таблицы позволяет произвести сравнение потоков энергии инжектированного пучка для разных условий охлаждения выходных окон с поддерживающей решеткой и без неё.

Заключение

Приведенные результаты экспериментальных исследований показывают возможность инъекции пучка электронов с энергией 300...350 кэВ в атмосферу с частотой повторения до 50 имп/с. Продолжительное время непрерывной работы получено (более $1 \cdot 10^5$ импульсов тока пучка) при 50 имп/с

Таблица. Плотность энергии пучка для разных конструкций выходного окна при продолжительной работе ускорителя

| Конструкция выходного окна и системы охлаждения | Поток энергии пучка W, Вт/см ² | Максимальная частота, имп/с |
|---|---|-----------------------------|
| Без разделительной фольги, с поддерживающей решеткой в качестве анода | 14,70 | 60* |
| Разделительная фольга с поддерживающей решеткой при охлаждении потоком водовоздушной смеси | 3,70 | 30** |
| Разделительная фольга без поддерживающей решетки при охлаждении потоком водовоздушной смеси | 8,60 | 50 |
| Разделительная фольга без поддерживающей решетки при охлаждении потоком воздуха | 3,44 | 20 |

* в течение $1,3 \cdot 10^3$ импульсов тока пучка;

** в течение $1 \cdot 10^4$ импульсов тока пучка.

для конструкции выходного окна без поддерживающей решетки с охлаждением разделительной фольги водовоздушной смесью. Характеристики выходного окна остались неизменными при средней мощности 250 Вт выведенного пучка диаметром 65 мм. Таким образом, показана возможность практической реализации технологического режима обработки водного раствора импульсным электронным пучком в аэрозольном потоке, который одновременно является охлаждающей средой для разделительной фольги выходного окна электронного ускорителя.

При охлаждении разделительной фольги потоком воздуха достигнуто инжектирование пучка средней мощностью 100 Вт в течение $4 \cdot 10^4$ импульсов. Данный режим работы выходного окна может найти практическое применение при обработке электронным пучком поверхности твердых объектов и жидкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Котов Ю.А., Соковнин С.Ю., Базезин М.Е. Частотный наносекундный ускоритель электронов УРТ-0,5 // ПТЭ. – 2000. – № 1. – С. 112–115.
- Ауслендер В.Л., Безуглов В.В., Брызгин А.А., Воронин Л.А., Горбунов В.А., Панфилов А.Д., Подобаев В.С., Радченко В.М., Ткаченко В.О., Факторович Б.Л., Ческидов В.Г., Штарклев Е.А. Импульсный высокочастотный линейный ускоритель электронов ИЛУ-8 // ПТЭ. – 2009. – № 3. – С. 98–103.
- Ремнев Г.Е., Егоров И.С., Кайканов М.И., Канаев Г.Г., Луконин Е.И., Нашилеский А.В., Степанов А.В. Частотный импульсный электронный ускоритель для радиационных технологий // Ядерная и радиационная физика: Матер. VIII Междунар. конф. – Алматы: ИЯФ НЯЦ РК, 2011. – С. 549–555.
- Канаев Г.Г., Кухта В.Р., Лопатин В.В., Нашилеский А.В., Ремнев Г.Е., Умура К., Фурман Э.Г. Высоковольтный импульсный генератор для электроразрядных технологий // ПТЭ. – 2010. – № 1. – С. 105–109.
- Выводное окно ускорителей электронов: пат. 1688775 Рос. Федерация. № Н05Н5/02; заявл. 09.11.88; опубл. 30.04.94.
- Ремнев Г.Е., Егоров И.С., Войно Д.А., Кайканов М.И., Маслов А.С., Меринова Л.Р., Попов А.В., Степанов А.В., Сярг Б.А., Шиян Л.Н. Очистка и стерилизация промышленно-бытовых стоков импульсным электронным пучком наносекундной длительности // Ядерная и радиационная физика: Матер. VIII Междунар. конф. – Алматы: ИЯФ НЯЦ РК, 2011. – С. 506–509.

Поступила: 15.01.2013 г.

ВЛИЯНИЕ СКИН-ЭФФЕКТА НА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ФАКЕЛЬНОГО РАЗРЯДА

Ю.Ю. Луценко, Е.П. Зеленецкая, В.А. Власов

Томский политехнический университет
E-mail: luts@mail.ru

Рассмотрено решение электродинамической задачи для высокочастотного факельного разряда при выраженном скин-эффекте с учётом радиальной неоднородности его канала. Установлен сдвиг максимума магнитного поля в плазме разряда по радиальной координате при усилении скин-эффекта. Проведён расчёт волнового числа электромагнитной волны, распространяющейся вдоль канала факельного разряда. Показано, что отношение коэффициента затухания к коэффициенту фазы электромагнитной волны увеличивается при усилении эффекта скинирования.

Ключевые слова:

Высокочастотный факельный разряд, электромагнитное поле, плазма, волновое число.

Key words:

High-frequency torch discharge, electromagnetic field, plasma, wave number.

Введение

Высокочастотный факельный разряд, горящий при атмосферном давлении, представляет собой тонкий плазменный шнур, окружённый слабосветящейся диффузионной оболочкой. Горение высокочастотного факельного разряда осуществляется за счёт диссипации энергии поперечно-магнитной волны [1], распространяющейся вдоль канала разряда. Вследствие этого физические особенности разряда будут существенным образом зависеть от характера распределения электромагнитного поля в плазме разряда. В свою очередь, определение характера распределения электромагнитного поля разряда непосредственно связано с пространственным распределением удельной электропроводности разрядной плазмы. Электропроводность плазмы факельного разряда слабо меняется в осевом направлении. В то же время градиент температуры и электропроводности в радиальном направлении достигает значительных величин, и его необходимо учитывать при решении задачи о распространении электромагнитной волны вдоль канала разряда.

В работах [2, 3] рассмотрено решение задачи о распространении электромагнитной волны вдоль канала факельного разряда с учётом его радиальной неоднородности. Было получено приближённое решение для случая слабого скин-эффекта. Такое условие выполняется для факельного разряда, горящего в воздухе и имеющего относительно небольшую мощность. Однако при горении разряда в других средах, а также при увеличении мощности и частоты электромагнитного поля, питающего разряд, условие слабого скин-эффекта может не выполняться.

В настоящей работе рассмотрено решение электродинамической задачи для радиально неоднородного канала факельного разряда, горящего в воздухе, с учётом скин-эффекта. Определены условия, при которых скин-эффектом можно пренебречь.

Определение радиального профиля удельной электропроводности плазмы разряда

Для решения электродинамической задачи необходимо установить вид радиального распределения удельной электропроводности плазмы разряда. Она может быть определена расчётным путём на основе известных значений газовой температуры. В свою очередь радиальный профиль газовой температуры разряда определяется экспериментально или посредством решения уравнений теплопереноса. В работе [2] получен профиль удельной электропроводности плазмы факельного разряда, горящего в воздухе при атмосферном давлении посредством использования решения уравнения Эленбааса–Геллера. В этом случае выражение, описывающее радиальное распределение удельной электропроводности плазмы разряда, имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1+x^2)^2}; \quad x = \frac{r}{a}. \quad (1)$$

Здесь r – радиальная координата; a – радиальная координата, соответствующая точке перегиба профиля; σ_0 – удельная электропроводность плазмы на оси разряда.

Экспериментальное определение радиального профиля газовой температуры факельного разряда, горящего в воздухе, было проведено в работе [4]. Радиальный профиль газовой температуры и соответствующий ему радиальный профиль удельной электропроводности плазмы разряда представлены на рис. 1. Удельная электропроводность воздушной плазмы рассчитывалась на основе предположения о существовании локального термодинамического равновесия в плазме разряда. Согласно результатам работы [5], условие локального термодинамического равновесия выполняется для высокочастотных разрядов, горящих в воздухе при атмосферном давлении, в случае, если температура разрядной плазмы превышает 3000 К. Из приведённого на рис. 1 радиального профиля температуры

видно, что для центральной зоны разряда это условие выполняется. В этом случае зависимость удельной электропроводности от температуры может быть задана [6] формулой:

$$\sigma(T) = 53370 \cdot T^{0,5} \exp\left(-\frac{57000}{T}\right). \quad (2)$$

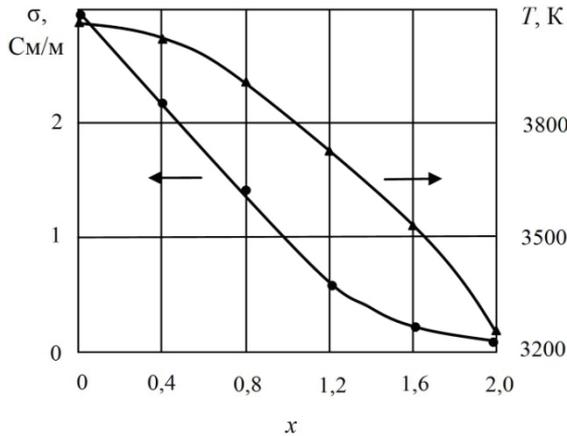


Рис. 1. Радиальный профиль газовой температуры и удельной электропроводности плазмы факельного разряда: 1) удельная электропроводность; 2) газовая температура

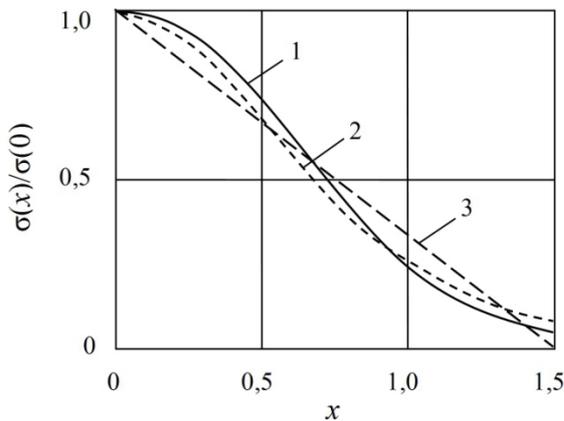


Рис. 2. Аппроксимации радиального профиля удельной электропроводности плазмы факельного разряда: 1) зависимость (4); 2) зависимость (1); 3) зависимость (3)

Как видно из рис. 1, рассчитанный в соответствии с формулой (2) профиль удельной электропроводности при $x < 1,2$ хорошо описывается линейной зависимостью вида

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{2}{3}x\right). \quad (3)$$

В свою очередь, радиальный профиль удельной электропроводности плазмы разряда, описываемый формулой (1), может быть заменён при $x < 1,5 \dots 2,0$ зависимостью вида

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{x^2}{0,7}}. \quad (4)$$

Радиальный профиль удельной электропроводности, описываемый формулой (1), и его аппрок-

симация, описываемая формулой (4), представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при $x < 1,2$ различие между этими зависимостями не превышает 30%. На этом же рисунке приведена линейная зависимость (3), описывающая экспериментальные данные.

Таким образом, в области изменения безразмерной радиальной координаты x от 0 до 1,2...1,5 теоретически и экспериментально определённый радиальный профиль удельной электропроводности может быть с точностью не менее 70% представлен зависимостями (3) или (4).

Решение электродинамической задачи

Рассмотрим решение электродинамической задачи.

Группа уравнений Максвелла, соответствующая поперечно-магнитным волнам, в цилиндрической системе координат с учётом аксиальной симметрии задачи будет иметь вид:

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + j\omega \varepsilon E_r = 0; \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} H_\varphi + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - j\omega \varepsilon E_z = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} + j\omega \mu H_\varphi = 0. \quad (7)$$

Здесь E_r и E_z – комплексные амплитуды соответственно радиальной и осевой компонент напряженности электрического поля; H_φ – комплексная амплитуда аксиальной компоненты напряженности магнитного поля; φ – угловая координата; z и r – осевая и радиальная координаты; j – мнимая единица; ε и μ – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости; ω – частота электромагнитного поля.

Преобразуем систему уравнений (5)–(7), полагая постоянство комплексной диэлектрической проницаемости в осевом направлении.

Получим:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \beta(r) \right] + H_\varphi \left[\varepsilon \mu \omega^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \beta(r) \right) \right] = 0; \quad (8)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \left[\frac{1}{r} H_\varphi + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \right]; \quad (9)$$

$$E_r = -\frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}. \quad (10)$$

Здесь $\beta(r) = \frac{d\varepsilon/dr}{\varepsilon(r)}$.

Разделяя независимые переменные r и z в уравнении (8), приведем его к уравнению в полных производных:

$$y'' + y' \left[\frac{1}{r} - \beta(r) \right] + y \left[k^2 - h^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} + \beta(r) \right) \right] = 0, \quad (11)$$

где $k^2 = \varepsilon_0 \mu \omega^2 - j \sigma \mu \omega$; $H_\varphi = y(r) e^{-jhz}$; ε_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость; h – постоянная разделения (волновое число).

Токами смещения по сравнению с токами проводимости в нашем случае можно пренебречь, поэтому

$$\beta(r) = \frac{1}{\sigma(r)} \frac{d\sigma}{dr}; \quad k^2 = -j \sigma \mu \omega.$$

Запишем уравнение (11) относительно безразмерной переменной $x = \frac{r}{a}$, определяемой выражением (1). Получаем:

$$y'' + y' \left[\frac{1}{x} - \beta(x) \right] + y \left[(k^2(x) - h^2) a^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{\beta(x)}{x} \right] = 0. \quad (12)$$

В работе [3] уравнение (12) решалось для радиального профиля электропроводности, описываемого выражением (1) для случая слабого скин-эффекта. Выражением $(k^2(x) - h^2) a^2$ в этом случае можно пренебречь, т. к. при низкой электропроводности плазмы и частоте электромагнитного поля в десятки мегагерц его величина не превышает $10^{-2} \dots 10^{-3}$.

Аналитическое решение уравнения (12) без упрощений, принятых в работе [3], можно получить, если использовать для профиля удельной электропроводности зависимости (3) и (4). Зависимость (3) использовалась нами при записи выражения для величины $k^2(x)$, зависимость (4) – во всех остальных случаях. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$y'' + y' \left(\frac{1}{x} + 2,857x \right) + y \left[d - bj(1 - 0,66x) - \frac{1}{x^2} + 2,857 \right] = 0. \quad (13)$$

Здесь $b = \sigma_0 \mu \omega a^2$; $d = h^2 a^2$.

Решение уравнения (13) может быть представлено функциями класса Гойна:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{660}{2857} jbx} \varphi(x, d, b) \cdot x + \frac{C_2 x e^{-\frac{660}{2857} jbx} \varphi(x, d, b) \int e^{\frac{1320}{2857} jbx - \frac{2857}{2000} x^2} dx}{x^3 \varphi(x, d, b)^2};$$

$$\varphi(x, d, b) = \text{HeunB} \left(\begin{array}{l} 2, \frac{26400}{8162449} b \sqrt{14285}, \\ -\frac{2000}{2857} d + \frac{2000}{2857} j b + \\ + \frac{871200000}{23320116793} b^2, \\ 0, \frac{1}{100} j \sqrt{14285} x \end{array} \right).$$

В подынтегральном выражении второго линейно независимого решения уравнения (13) присутствует величина $1/x^3$. Вследствие этого второе линейно независимое решение уравнения (13) в точке $x=0$ не имеет конечных значений. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только первое линейно независимое решение уравнения (13):

$$y(x) = y_1(x) = C e^{-\frac{660}{2857} jbx} \varphi(x, d, b) x. \quad (14)$$

Зависимость $y_1(x)$, соответствующая радиальному распределению аксиальной компоненты магнитного поля, представлена на рис. 3, а. При расчёте этого распределения предполагалось, что $d = 2 \cdot 10^{-4}$; $b = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Эти значения соответствуют случаю факельного разряда, горящего в воздухе при атмосферном давлении на частоте 40 МГц, имеющего радиус канала 2 мм, и удельную электропроводность на оси разряда 2 См/м. Здесь же приведено распределение напряжённости магнитного поля, полученное в работе [3]. Как видно из представленного рисунка, эти зависимости незначительно отличаются друг от друга. Также из рисунка видно, что максимум напряжённости магнитного поля расположен в точке $x=1$. В связи с этим данную точку можно отождествить с радиусом токоведущей зоны разряда, т. е. с радиусом его канала.

Заметим, что точка $x=1$ является также точкой перегиба профиля удельной электропроводности, описываемого выражением (1). Этот факт позволил авторам работы [3] связать точку перегиба радиального профиля удельной электропроводности с радиусом канала разряда. Результаты расчётов зависимости $y_1(x)$ при различных значениях величины b показывают, что данное условие выполняется лишь для случая слабого скин-эффекта. В случае значительного увеличения величины b максимум магнитного поля начинает смещаться вдоль радиуса разряда.

На рис. 3, б приведены радиальные распределения амплитуды напряжённости магнитного поля при различных значениях величины b . Как видно из рисунка, при $b=10$ смещение максимума напряжённости магнитного поля по радиальной координате составляет не менее 10%. Данное значение b соответствует случаю факельного разряда мощностью в десятки киловатт и горящего на частоте сотни МГц – единицы ГГц. Таким образом, в случае выра-

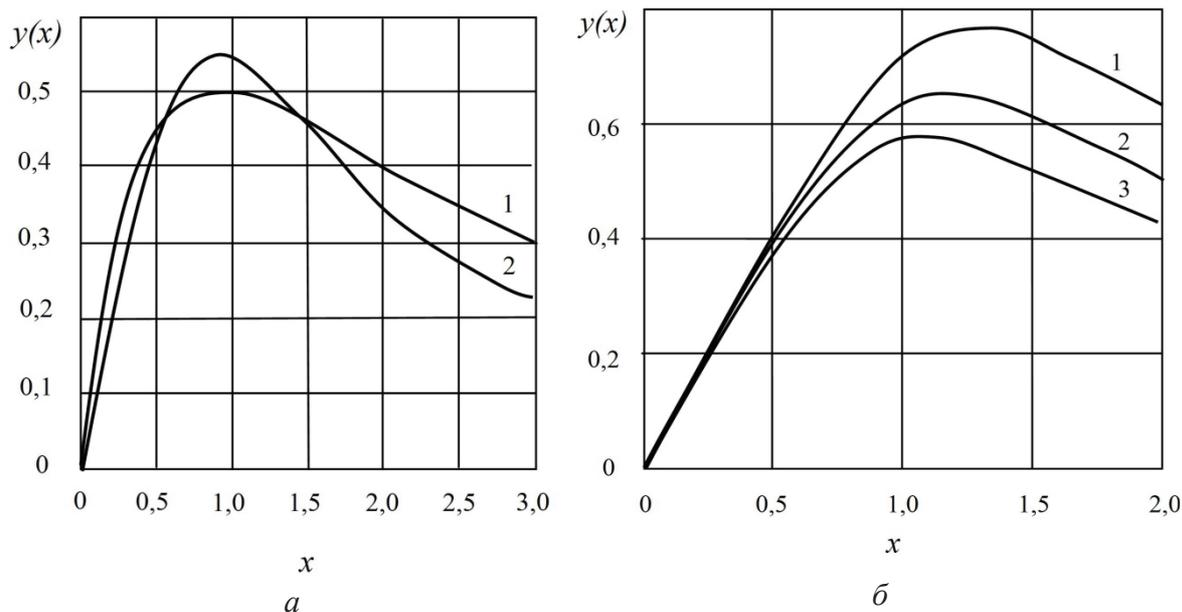


Рис. 3. Радиальное распределение напряжённости магнитного поля факельного разряда: а) при слабом скин-эффекте: 1) по данным работы [3]; 2) расчёт по формуле (14); б) при выраженном скин-эффекте: 1) $b=20$; 2) $b=15$; 3) $b=10$

женного скин-эффекта радиус канала не может быть отождествлён с точкой перегиба радиального профиля удельной электропроводности плазмы разряда.

Радиальные распределения осевой и радиальной компоненты электрического поля могут быть определены по уравнениям (9) и (10) посредством использования выражения (14). Типичные распределения компонент электрического поля для случая слабого скин-эффекта представлены на рис. 4, а. Распределения, соответствующие случаю выраженного скин-эффекта, приведены на рис. 4, б.

Заметим, что по сравнению с магнитным полем заметные изменения в радиальном распределении

электрического поля появляются при меньших значениях величины b .

Определение волнового числа электромагнитной волны

Наиболее важным параметром, характеризующим процесс распространения электромагнитной волны вдоль канала разряда, является её волновое число. Волновое число $h = \text{Re}h + j\text{Im}h$ представляется собой комплексную величину, мнимая часть которой характеризует величину затухания электромагнитной волны, а действительная часть $\text{Re}h$ — длину электромагнитной волны.

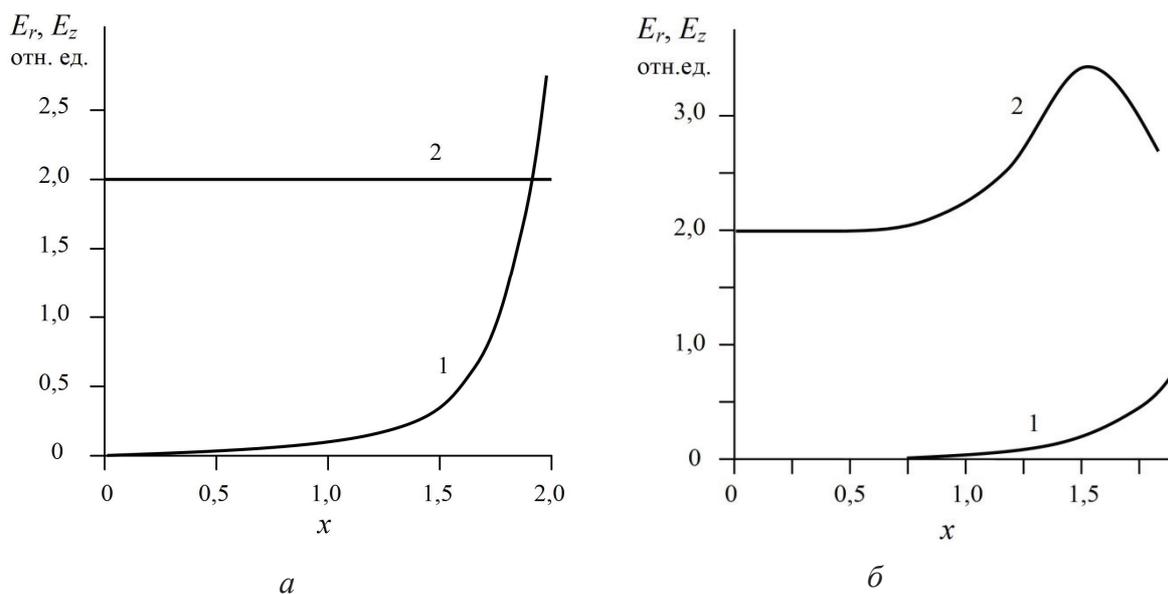


Рис. 4. Радиальное распределение компонент электрического поля. а) при слабом скин-эффекте: $d = 0,0002$; $b = 0,0025$; б) при выраженном скин-эффекте: $d = 0,0002$; $b = 5$; 1) E_r ; 2) E_z

Величина волнового числа обычно определяется из условия равенства тангенциальных компонент поля при переходе границы раздела сред. В работе [3] показано, что в периферийных областях разряда ($x > 2$) происходит диссипация менее 20 % всей тепловой мощности разряда, вследствие чего эта зона разряда не оказывает существенного влияния на процесс распространения электромагнитной волны. Заметим также, что определённая нами выше аппроксимация радиального профиля удельной электропроводности справедлива лишь для области $0 < x < 1,5$. Поэтому при определении волнового числа будем рассматривать радиальный профиль удельной электропроводности ступенчатого вида, который при $x < 1,5$ описывается зависимостью (4), а при $x > 1,5$ равен нулю.

Условие сшивки тангенциальных компонент поля на границе проводящей зоны запишется следующим образом:

$$\left. \frac{E_{z_1}}{H_{\varphi_1}} \right|_{x=1,5} = \left. \frac{E_{z_2}}{H_{\varphi_2}} \right|_{x=1,5}. \quad (15)$$

Здесь индекс «1» соответствует проводящей зоне, а индекс «2» – зоне, где проводимость отсутствует.

Тангенциальные компоненты поля в непроводящей зоне, согласно работе [7], описываются функцией Ханкеля второго рода и её производной:

$$E_{z_2} = DH_0^{(2)}(\sqrt{k_2^2 - h^2} \cdot r) e^{j\omega t - jhz}; \quad (16)$$

$$H_{\varphi_2} = DH_0^{(2)'}(\sqrt{k_2^2 - h^2} \cdot r) e^{j\omega t - jhz} \times \frac{jk_2^2}{\mu_2 \omega \sqrt{k_2^2 - h^2}}. \quad (17)$$

Здесь $\rho = 1,5a\sqrt{k_2^2 - h^2}$; $k_2^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$.

Тангенциальные компоненты проводящей зоны представлены выражениями (14) и (9).

Левая часть уравнения (15) может быть представлена в виде

$$\left. \frac{E_{z_1}}{H_{\varphi_1}} \right|_{x=1,5} = \frac{\psi(d, b)}{a\sigma_0},$$

где $\psi(d, b)$ – функция, слабо зависящая от d . Ранее в работе [3] получено, что $\psi(d, b) = 5$. Из результатов наших расчётов следует, что при слабом скин-эффекте величина $\psi(d, b)$ слабо меняется, и её значение составляет $4,46e^{0,01}$. Заметим, что величина d для достаточно мощных разрядов может меняться лишь в незначительных пределах $0 < d < 0,001$. Это связано с тем фактом, что при увеличении мощности разряда диаметр его канала растёт, а величина волнового числа электромагнитной волны, подерживающей разряд, уменьшается. Расчёты показывают, что зависимость от d как модуля, так и аргумента величины $\psi(d, b)$ незначительна и ею можно пренебречь. Результаты расчёта модуля и аргумента величины $\psi(d, b)$ в зависимости от величин b

представлены на рис. 5 и 6. Из рис. 5 видно, что при $b < 1$ величина $|\varphi(d, b)|$ меняется незначительно, а при $b > 2,5$ зависит от b по линейному закону: $|\varphi(d, b)| \sim 3 + 0,9b$.

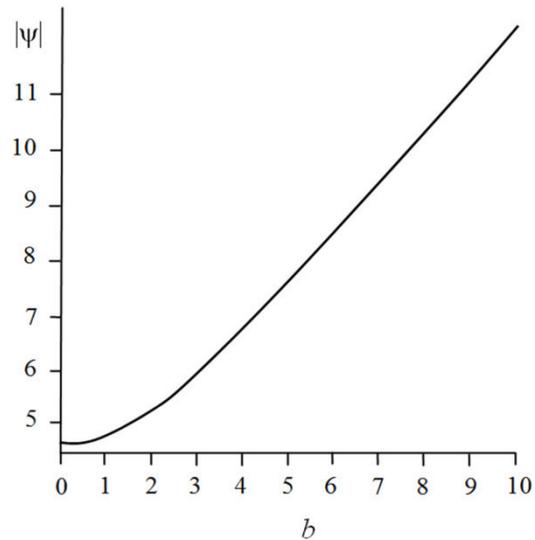


Рис. 5. Зависимость модуля ψ от величины b

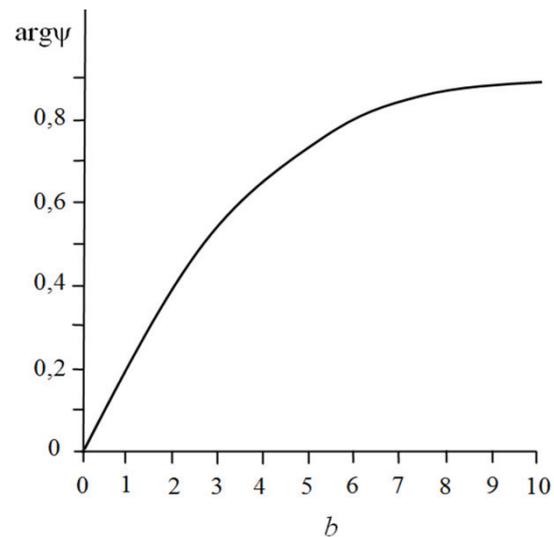


Рис. 6. Зависимость аргумента ψ от величины b

Аргумент величины $\psi(d, b)$ зависит от b более сложным образом. В случае больших b его величина практически постоянна и составляет (0,85...0,90) радиан. При $b < 10$ зависимость аргумента $\psi(d, b)$ от b хорошо аппроксимируется полиномом третьего порядка: $\arg \psi(d, b) \sim 1,19 \cdot 10^{-3} \cdot b^3 - 3,1 \cdot 10^{-2} \cdot b^2 + 0,281 \cdot b + 4,4 \cdot 10^{-4}$.

Правая часть уравнения (15) представлена функциями Ханкеля, которые при малых значениях аргумента $\rho = 1,5a\sqrt{k_2^2 - h^2}$ имеют логарифмическую асимптотику. Таким образом, уравнение (15) может быть записано следующим образом:

$$\zeta \ln \zeta = -0,75 j \lambda. \quad (18)$$

Здесь $\zeta = \left(\frac{\gamma \rho}{-2j} \right)^2$; $\lambda = \frac{\psi(d, b) \epsilon_0 \omega \gamma^2}{\sigma_0}$, $\ln \gamma$ – постоянная Эйлера

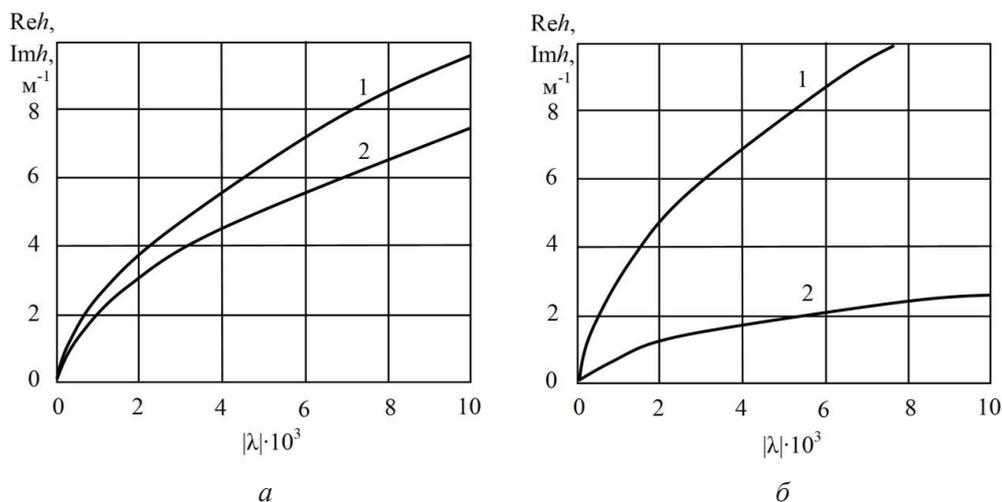


Рис. 7. Зависимость коэффициентов фазы и затухания электромагнитной волны от величины λ : а) при слабом скин-эффекте ($b=2,5 \cdot 10^{-3}$); б) при выраженном скин-эффекте ($b=5$); 1) Imh ; 2) Reh

Данное трансцендентное уравнение обычно решается [7] методом итераций. Из полученного в результате решения уравнения (18) значения величины ζ можно рассчитать величину волнового числа электромагнитной волны по следующей формуле:

$$h = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 + \frac{4\zeta}{2,25a^2\gamma^2}}$$

Результаты расчёта волнового числа электромагнитной волны, распространяющейся вдоль канала факельного разряда, горящего на частоте 40 МГц и имеющего диаметр канала 4 мм, при слабом скин-эффекте представлены на рис. 7, а. Результаты расчёта волнового числа для аналогичного разряда при выраженном скин-эффекте приведены на рис. 7, б. Из представленных рисунков видно, что при слабом скин-эффекте коэффициент фазы незначительно отличается от коэффициента затухания. В то же время в случае выраженного скин-эффекта коэффициент затухания превышает коэффициент фазы в 3...5 раз. При этом в отличие от случая слабого скин-эффекта замедление электромагнитной волны является незначительным при более выраженном затухании её амплитуды.

Заметим, что при $b > 2,5$ величина $|\varphi(d, b)|$ зависит от b по линейному закону. Вследствие этого величина λ и соответственно величина волнового числа будут слабо зависеть от величины удельной электропроводности плазмы при наличии выраженного скин-эффекта. Учитывая результаты вышеприведённых расчётов можно также утверждать, что приближение слабого скин-эффекта для факельного разряда справедливо в случае, когда $b < 1,0...2,5$.

Выводы

1. Получено решение задачи о распространении электромагнитной волны вдоль радиально неоднородного канала факельного разряда.
2. Установлено смещение максимума магнитного поля по радиальной координате в случае выраженного скин-эффекта.
3. Показано, что в случае выраженного скин-эффекта увеличивается отношение коэффициента фазы к коэффициенту затухания электромагнитной волны, а также уменьшается зависимость величины затухания электромагнитной волны от величины удельной электропроводности плазмы разряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов А.В., Трехов Е.С., Фетисов Е.П. Электродинамическая модель высокочастотного факельного разряда // Журнал Технической Физики. – 1970. – Т. 40. – № 2. – С. 340–345.
2. Тихомиров И.А., Власов В.А., Луценко Ю.Ю. Физика и электрофизика высокочастотного факельного разряда и плазмотроны на его основе. – М.: Энергоатомиздат, 2002. – 196 с.
3. Тихомиров И.А., Луценко Ю.Ю. Распределение компонент электромагнитного поля и их затухание в канале высокочастотного факельного разряда при слабом скин-эффекте с учётом неоднородности радиального профиля удельной электропроводности плазмы разряда // Известия СО АН СССР. Сер. Техн. наук – 1989. – Вып. 3. – С. 109–115.
4. Тихомиров И.А., Перскальскис Б.Ш., Федянин В.Я. и др. Исследование пространственного распределения параметров

ВЧ факельного разряда. – Деп. в ВИНТИ 16.03.1973, № 7606–73. – Томск, 1973. – 9 с.

5. Benilov M.S., Naidis G.V. Simulation of discharges in atmospheric-pressure air sustained by traveling electromagnetic waves // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2003. – V. 31. – № 4. – P. 488–494.
6. Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high-temperature air in local thermodynamic equilibrium // European Physical Journal D. – 2000. – V. 11. – P. 279–289.
7. Страттон Д. Теория электромагнетизма. – М.;Л.: Гостехиздат, 1948. – 539 с.

Поступила 05.05.2012г.

УДК 621.51

РАСЧЕТ НАГРУЗОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОПРИВОДА УГЛОВОГО КОМПРЕССОРА

А.А. Филипас*, В.В. Осиненко*, С.Н. Кладиев, А.А. Фомин

*Северский технологический институт НИЯУ «МИФИ»

Томский политехнический университет

E-mail: alf@ssti.ru

Предложен алгоритм расчета параметров и характеристик углового поршневого компрессора как специфической нагрузки регулируемого электропривода на основе анализа кинематической схемы. Полученные нагрузочные характеристики используются для уточненного выбора мощности регулируемого электропривода.

Ключевые слова:

Угловой поршневой компрессор, нагрузочные характеристики электропривода, кинематическая схема, расчет мощности.

Key words:

Angle reciprocating compressor, load characteristics of electric drive, kinematic scheme, power estimation.

Основной задачей модернизации технологических процессов в промышленности является увеличение энергоэффективности современного производства. Наиболее перспективной в этом плане является оптимизация выбора мощности элементов силовой цепи, а также применение регулируемого электропривода для общепромышленных компрессорных агрегатов с учетом особенностей и режимов их работы.

С этой целью проведено построение нагрузочных диаграмм углового компрессора в функции угла поворота его вала. Существующая методика выбора мощности элементов электрической силовой цепи компрессора направлена на расчёт по усреднённым параметрам, что даже при учёте специфики нагрузки даёт излишний «запас» мощности примерно на 10 %.

Расчет нагрузочных характеристик электропривода компрессора на основе компьютерного моделирования режимов работы позволит произвести уточненный выбор силового оборудования и оптимизировать систему управления электроприводом для обеспечения максимальной энергоэффективности [1–4]. Данная статья является продолжением работ в этом направлении [5] и посвящена классу угловых компрессоров. По кинематической схеме компрессора составлена расчетная схема механизма движения (рис. 1).

На рис. 1 приняты следующие обозначения: S_i – ход поршня; r – радиус кривошипа; L_i – длина шатуна; $\alpha = \omega t$ – угол поворота коленчатого вала; ω – угловая частота вращения коленчатого вала, рад/с; β_i – угол между осью шатуна и осью ряда; P_r и P_{ti} – радиальная и тангенциальная составляющие поршневой силы; $P_{\Sigma i}$ – результирующая поршневая сила; N_i – нормальная сила ряда; $P_{\text{ш}i}$ – сила, действующая вдоль шатуна; i – число двойных ходов поршня за один оборот коленчатого вала.

Текущее значение хода поршня определяется по формуле (1):

$$S = L + r - (L \cos \beta + r \cos \omega t), \quad (1)$$

где r – радиус кривошипа, м; L – длина шатуна, м.

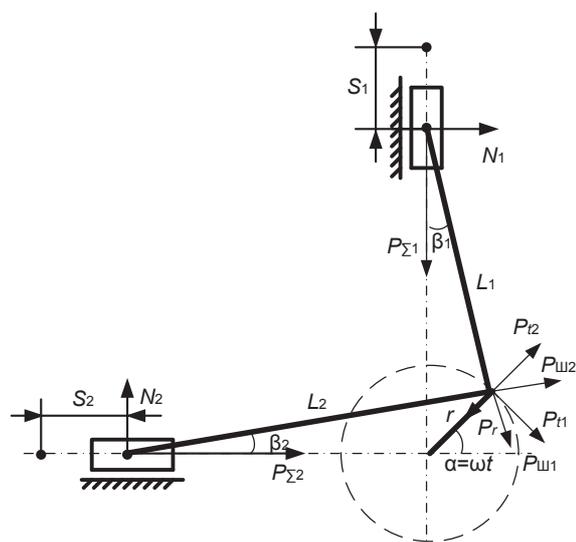


Рис. 1. Расчетная схема механизма движения

Учитывая, что $\sin \beta / \sin \omega t = r / L$, т. е. отношению радиуса кривошипа к длине шатуна, которое принято обозначать λ , получим:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}.$$

Разлагая выражение в степенной ряд и учитывая только первые два члена ряда, имеем:

$$\cos \beta = 1 - (\lambda^2 / 4)(1 - \cos 2\omega t).$$

Подставив (1), получим:

$$S = r \left[(1 - \cos \omega t) + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\omega t) \right].$$

Радиальная сила проходит через центр вращения кривошипа и не создает вращающего момента относительно этого центра. Таким образом, в создании момента нагрузки механизма участвует пара тангенциальных сил, значения которых зависят от текущего положения коленчатого вала и модуля поршневой силы [2].

Вначале необходимо определить индикаторные мощности в ступенях сжатия, а также требуемые значения частоты вращения коленчатого вала при

минимальной и максимальной производительности компрессора.

Степени сжатия каждой ступени определяются как

$$\varepsilon_i = \frac{p_{ki}}{p_{ni}},$$

где p_{ki} – конечное давление нагнетания i -й ступени, Па; p_{ni} – начальное давление всасывания i -й ступени, Па.

Плотности воздуха перед всасывающими патрубками первой и второй ступеней можно вычислить по формуле

$$\rho_i = \frac{p_{ni}}{RT_{ni}},$$

где R – универсальная газовая постоянная сжимаемого воздуха, равная 287,2 Дж/кг·К; T_{ni} – температура всасываемого воздуха на i -й ступени, К.

Определяем максимальную производительность, требуемую от компрессора потребителями сжатого воздуха:

$$Q_{\max} = \sum_{i=1}^n Q_{i\max} n_i,$$

где $Q_{i\max}$ – максимальная подача (расход) i -го потребителя сжатого воздуха, м³/мин; n_i – количество однородных потребителей i -го оборудования, шт.

Массовую максимальную производительность компрессора рассчитываем по формуле:

$$m_{\max} = \rho_1 Q_{\max}.$$

Индикаторная мощность i -й ступени определяется по формуле

$$N_{ni} = \frac{k}{k-1} p_{ni} \bar{Q}_i (\varepsilon_i^{\frac{k-1}{k}} - 1),$$

где k – показатель адиабаты, численное значение которого для воздуха составляет 1,4.

Суммарная максимальная индикаторная мощность компрессора равна:

$$N_{i\Sigma\max} = N_{i1\max} + N_{i2\max}.$$

Частота вращения коленчатого вала компрессора для обеспечения требуемой производительности определяется по формуле

$$n_i = \frac{Q_i 60}{i V_1 \lambda_1 \lambda_2},$$

где Q_i – требуемая i -я производительность компрессора, м³/с; V_1 – рабочий объем цилиндра первой ступени, м³; λ_1 и λ_2 – отношение радиуса кривошипа к длине шатуна ступеней сжатия.

Рабочий объем цилиндра первой ступени найдем по формуле

$$V_1 = F_1 S = \pi \frac{D_1^2}{4} S,$$

где F_1 – площадь внутренней полости цилиндра, м²; D_1 – диаметр цилиндра первой ступени, м.

Находим минимальную массовую производительность:

$$m_{\min} = \rho_1 Q_{\min}.$$

Для определения зависимостей момента статической нагрузки в функции угла поворота кривошипа необходимо рассчитать и построить зависимости поршневых усилий в этой же функции, действующие в обоих цилиндрах. Расчет усилий основан на действительном газовом цикле в цилиндре компрессора, который состоит из этапов сжатия, нагнетания, расширения и всасывания.

Для упрощения расчета не учитываем эффект расширения газа после нагнетания, т. к. данный процесс происходит достаточно быстро и можно считать, что давление газа после полного выталкивания сжатого воздуха из цилиндра скачкообразно падает от давления нагнетания до давления всасывания [2].

Определяем усилия всасывания и нагнетания на каждой из ступеней:

$$P_{г.вс1} = p_{n1} F_{n1}; P_{г.н1} = p_{к1} F_{n1};$$

$$P_{г.вс2} = p_{n2} F_{n2}; P_{г.н2} = p_{к2} F_{n2}.$$

Затем строим усилия сжатия со стороны коленчатого вала в соответствии с уравнением (2):

$$P_{г.i} = P_{г.вс} \left(\frac{S_1}{S_{ik}} \right)^k, \quad (2)$$

где S_1 – начальная координата хода поршня, соответствующая началу сжатия, мм; S_{ik} – текущая координата хода поршня, мм; k – показатель адиабаты сжатия воздуха.

На первом шаге расчета, когда α_{ik} и соответствующее ему значение S_{ik} равны нулевым значениям, возникает проблема неопределенности (при делении ноля на ноль), учитывая, что начальная координата хода поршня S_1 также будет равна нулю. В этом случае за начальную координату S_1 принимают конечное значение хода поршня S , а за текущую координату S_{ik} – величину S_{ib} , которая определяется как

$$S_{ib} = S - S_{ik},$$

где S_{ib} – текущая координата хода поршня со стороны коленчатого вала; S_{ik} – текущая координата хода поршня со стороны крышки цилиндра.

При этом условный угол поворота коленчатого вала, соответствующий текущему значению S_{ib} , определяется как

$$\alpha_{ib} = 180 - \alpha_{ik},$$

где α_{ib} – текущая координата угла поворота вала со стороны коленчатого вала; α_{ik} – текущая координата угла поворота вала со стороны крышки цилиндра.

Из формулы (2), подставив вместо текущего значения усилия сжатия значение усилия нагнетания, можно определить текущую координату:

$$S_k = \frac{S_1}{(P_{г.н} / P_{г.вс})^{1/k}}.$$

Решая уравнение (2) относительно α , получаем, что угол поворота вала, соответствующий данному значению хода поршня, равен 84°.

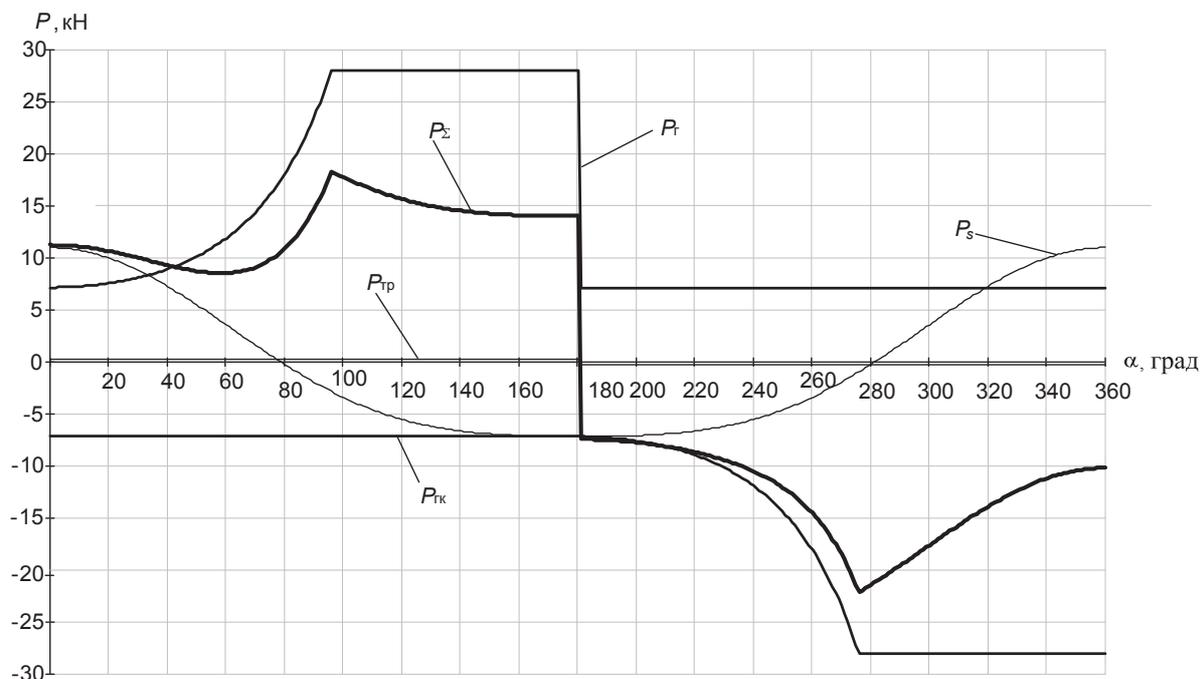
После полного выталкивания газа из цилиндра поршень изменяет направление движения на противоположное, при этом срабатывают всасывающие клапаны, и воздух начинает засасываться в цилиндр до момента времени, которое соответствует полному ходу поршня. Далее цикл повторяется.

Сила инерции возвратно-поступательно движущихся частей определяется по формуле

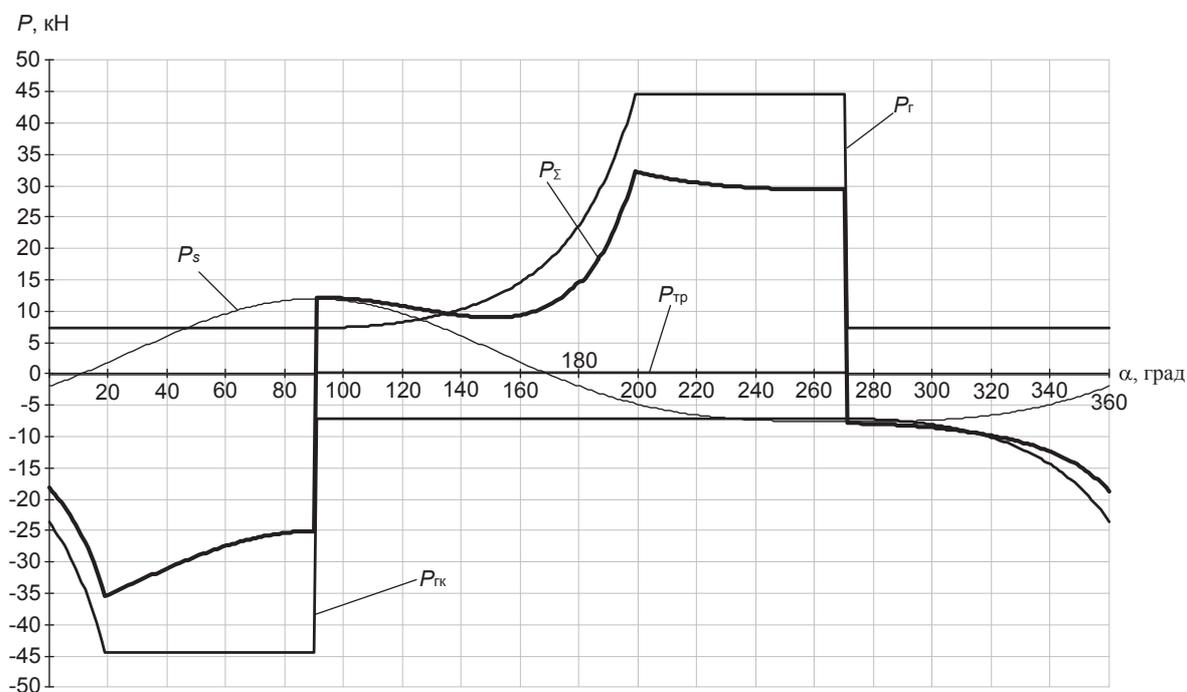
$$P_s = m_s \frac{d^2 S}{dt^2} = m_s r \omega^2 (\cos \alpha_i + \lambda \cos 2\alpha_i),$$

где m_s – масса возвратно-поступательно движущихся частей, кг.

При работе механизма компрессора возвратно-поступательное движение совершают поршень, кресткопф, шток. Шатун совершает сложное-плоское движение, которое является частью возврат-



а



б

Рис. 2. Силы, действующие в цилиндрах компрессора при максимальной частоте вращения вала: а) для первой ступени; б) для второй ступени

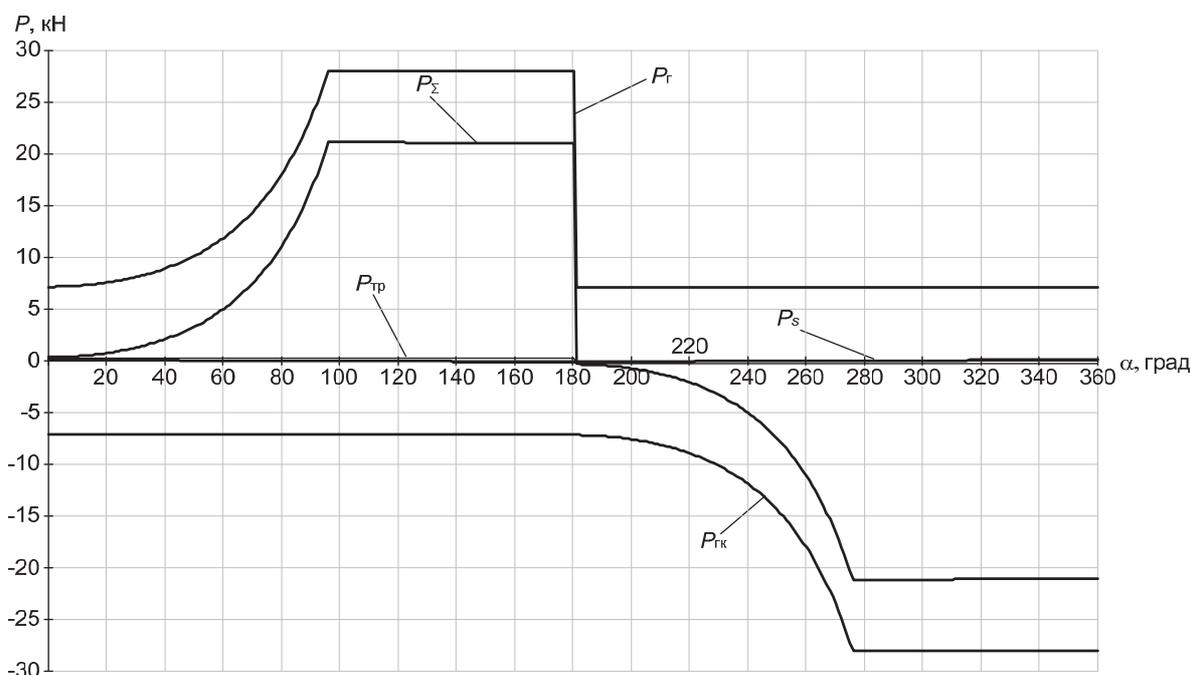
но-поступательного, поэтому массу шатуна разбивают на две части: $m_{шс}=0,3m_{ш}$ и $m_{шр}=0,7m_{ш}$, где $m_{шс}$, $m_{шр}$ – массы шатуна, участвующие в возвратно-поступательном и во вращательном движении.

Определим суммарное численное значение массы возвратно-поступательно движущихся частей по формуле

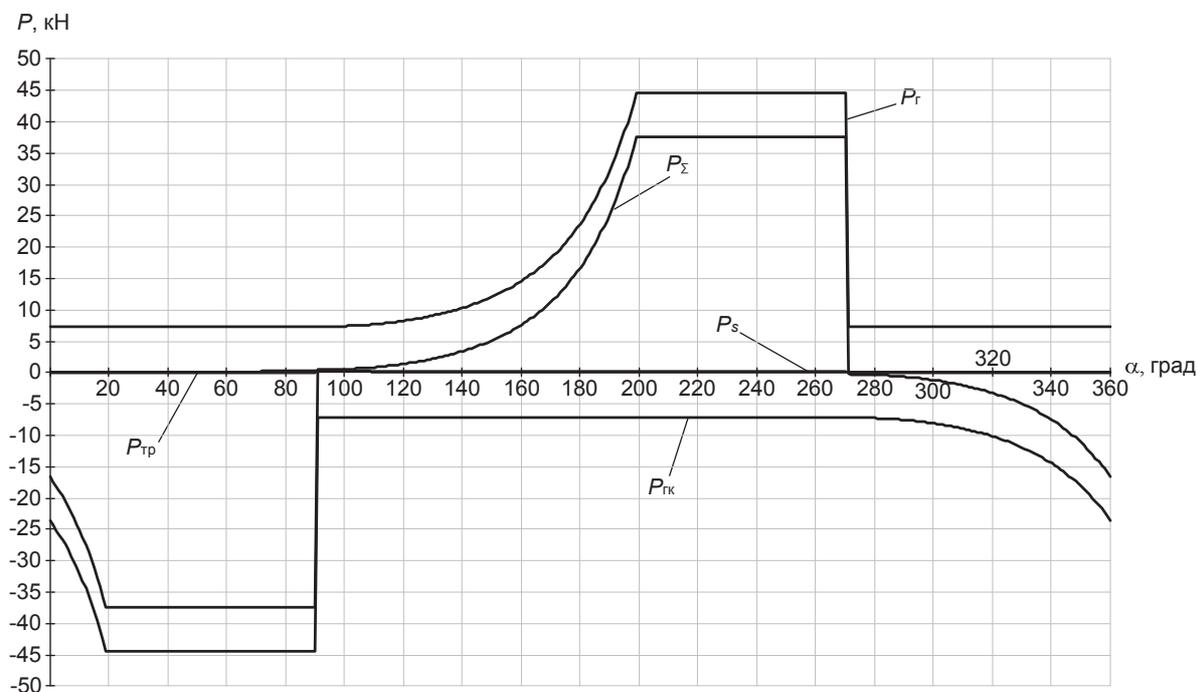
$$m_s = m_n + m_k + m_{шт} + 0,3m_{ш},$$

где m_n , m_k , $m_{шт}$ и $m_{ш}$ – массы поршня, крейцкопфа, штока и шатуна, кг.

Силы трения, действующие в ступенях, полагают постоянными и меняющими знак после каждой половины оборота вала, что соответствует 180° . При выполнении теоретических расчетов считают, что сила трения возвратно-поступательно движущихся частей составляет 60...70 % от общей силы трения. Сила трения возвратно-посту-



а



б

Рис. 3. Силы, действующие в цилиндрах компрессора при минимальной частоте вращения вала: а) для первой ступени; б) для второй ступени

пательно движущихся частей определяется по формуле

$$P_{\text{прси}} = \frac{(0,6 \dots 0,7) N_{\Sigma i} (1 - \eta_k)}{2S\omega_i \eta_{kl}},$$

где $N_{\Sigma i}$ – суммарная индикаторная мощность компрессора при i -й скорости вращения вала, Вт; η_k – механический КПД компрессора; ω_i – i -я скорость вращения вала двигателя, рад/с.

Результирующую поршневую силу P_{Σ} находим как алгебраическую сумму всех четырех сил, действующих в цилиндре (P_{i1} , P_{i2} , $P_{\text{прс}}$ и $P_{\text{кр}}$).

Для учёта влияния на поршень атмосферного давления рассчитываем усилия со стороны крышки $P_{\text{кр}}$, которые равны усилиям, действующим на поршень со стороны коленчатого вала, но в противоположном направлении и в противофазе [2].

На рис. 2, а приведены зависимости всех сил, действующих в цилиндре первой ступени, в функции от угла поворота коленчатого вала при максимальной частоте вращения вала для определения суммарной (поршневой) силы.

На рис. 2, б приведены зависимости всех сил, действующих в цилиндре второй ступени, с учетом того, что поршень второй ступени смещен относительно поршня первой ступени на 90° .

Далее рассчитаны значения результирующих усилий и момента нагрузки в ступенях сжатия компрессора при минимальной частоте вращения вала, которая составляет 0,1 от номинального значения.

Газовые усилия в цилиндре при минимальной скорости задания будут те же, что и при максимальной, т. к. значения усилий газовых сил зависят только от соотношения величин давлений всасывания и нагнетания [1]. При изменении частоты вращения изменится сила инерции возвратно-поступательно движущихся частей, т. к. она является функцией квадрата частоты вращения коленчатого вала компрессора.

На рис. 3, а, приведены графики сил, действующих в цилиндре со стороны вала и со стороны крышки, и результирующая сила.

Анализ графика результирующей силы (рис. 3, а) показывает, что действие силы инерции в создании результирующей силы незначительно и результирующая сила практически определяется усилиями газовых сил.

Результаты расчета усилий при минимальной производительности для второй ступени приведены на рис. 3, б.

Далее определён момент нагрузки, создаваемый результирующими усилиями на валу компрессора. Для определения момента нагрузки на валу воспользуемся формулой:

$$M_{\Sigma i} = P_i l = \frac{P_{\Sigma i} l \sin(\alpha_i + \arccos(\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha_i}))}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha_i}},$$

где l – плечо, создаваемое результирующими силами первой и второй ступени ($l=2r$), м.

Результаты расчета в виде зависимостей моментов нагрузки в функции от угла поворота вала представлены на рис. 4.

Суммарный момент первой и второй ступени можно посчитать по формуле

$$M_{\Sigma} = r(P_{1\Sigma i} \sin \alpha_i - P_{2\Sigma i} \cos \alpha_i).$$

Следует отметить, что данный момент нагрузки начнет действовать только тогда, когда продувочный ventиль будет закрыт, а двигатель разгонится до максимальной скорости задания (т. е. будет работать в установившемся режиме).

Помимо сил трения возвратно-поступательно движущихся частей, будут действовать силы трения вращательного движения. Момент сил трения вращательного движения составляет обычно 30...40 % от общей силы трения. Момент сил трения вращательного движения определяется по формуле

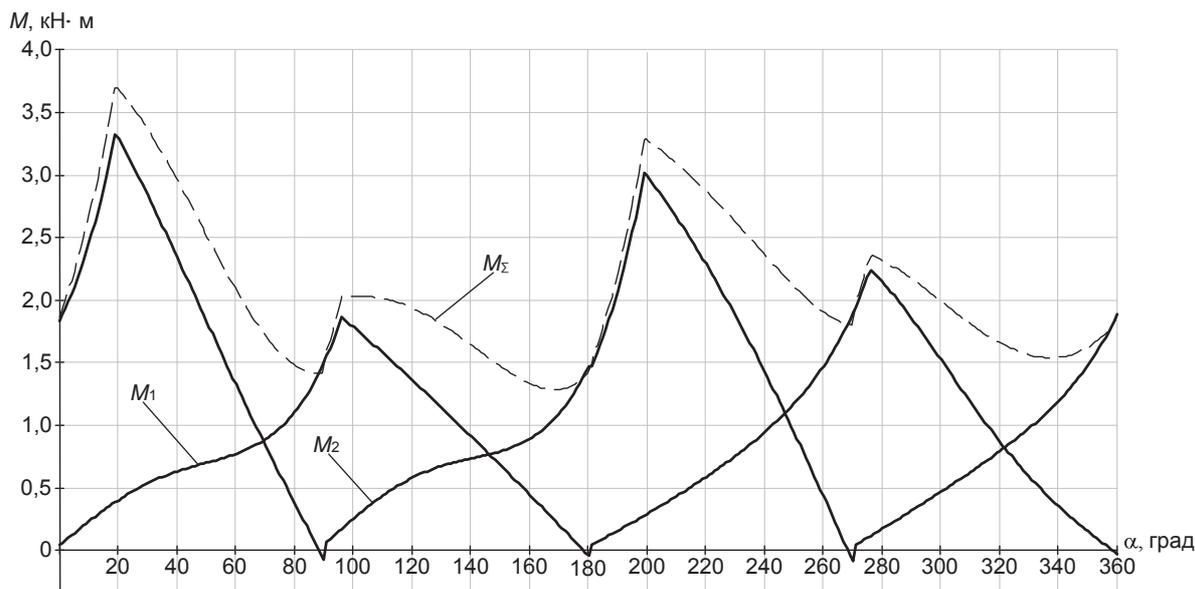


Рис. 4. Моменты нагрузки на валу в функции от угла поворота при максимальной частоте вращения

$$M_{\text{тр. вр}} = \frac{0,35 N_{\Sigma i} (1 - \eta_k)}{\omega_i \eta_k}$$

Из графика суммарного момента на рис. 4 можно определить максимальную и минимальную мощность, необходимую компрессору, и подобрать необходимый по мощности, моменту и диапазону регулирования частоты электропривод.

Приведенные расчеты и графики получены для имитационной модели компрессора 302 ВП10/8 в среде MatLab.

Полученные результаты можно использовать для построения имитационной модели системы автоматического регулирования скорости обобщенного углового поршневого компрессора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкасский В.М. Насосы, вентиляторы, компрессоры. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416 с.
2. Фотин Б.С., Пирумов И.Б., Прилуцкий И.К., Пластинин П.И. Поршневые компрессоры / под общ. ред. Б.С. Фотина. – Л.: Машиностроение, 1987. – 372 с.
3. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу аппаратов химической технологии / под ред. чл.-корр. АН СССР П. Г. Романкова. 10-е изд., перераб. и доп. – Л.: Химия, 1987. – 576 с.

Выводы

Предложен алгоритм расчета параметров и характеристик углового поршневого компрессора, учитывающий характер движения кривошипно-шатунного механизмов первой и второй ступеней сжатия как специфической пульсирующей нагрузки для регулируемого электропривода.

Методика выбора мощности элементов силовой цепи компрессора с учётом изменения его производительности по расчётной упорядоченной нагрузочной диаграмме позволяет снизить излишний запас по мощности электропривода, который имел место при выборе мощности по усреднённой диаграмме.

4. Воронежский А.В. Современные компрессорные станции (концепции, проекты, оборудование). – М.: ООО «Премиум Инжиниринг», 2008. – 614 с.
5. Филипас А.А., Кладиев С.Н., Челядинов Р.Л. Уточненный расчет нагрузочных характеристик электропривода оппозитного поршневого компрессора // Известия вузов. Электромеханика. – 2011. – № 4. – С. 67–71.

Поступила 06.06.2012 г.

УДК 669.337

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗУЧЕНИЯ СУШКИ ГРАНУЛИРОВАННОГО ЧЕРНОВОГО МЕДНО-МОЛИБДЕНОВОГО КОНЦЕНТРАТА МЕСТОРОЖДЕНИЯ «ТАСТАУ»

Л.М. Каримова, Е.Т. Кайралапов, К.Ж. Жумашев, Т.Е. Токбулатов

Химико-металлургический институт, ТОО «Инновация», г. Караганда, Республика Казахстан
E-mail: lutsia.08@mail.ru

Приведены результаты исследования операции сушки, входящей в технологическую схему, которая включает гранулирование черного медно-молибденового концентрата месторождения «Тастау». Получены математические модели, описывающие закономерности обезвоживания и изменение свойств материала в ходе термической обработки. Контролируемыми показателями являлись относительная убыль массы при сушке, при последующем досушивании гранул, степень их обезвоживания. Установлено, что особенности фазового состава влияют на результаты их последующей обработки. Специфика рассматриваемого материала определяет также и выбор комбинаций обжига и выщелачивания, при использовании которых стало возможным достижение заданной цели – наиболее полного извлечения меди и молибдена.

Ключевые слова:

Сушка, гранулирование, черновой флотоконцентрат, факторы, обобщенные функции.

Key words:

Drying, granulation, rough flotation concentrate, factors, generalized functions.

Черновой медно-молибденовый концентрат может служить источником извлечения ценных компонентов в раствор. В одном из предлагаемых вариантов ведения процесса, включающего обжиг [1], в качестве подготовительных операций в технологической схеме использованы гранулирование концентрата и сушка полученных гранул [2].

Концентрат характеризуется высокой степенью дисперсности. Поэтому необходимо получить на стадии окатывания такие гранул, которые соответствуют по свойствам основному условию – достижению при обжиге высокого извлечения ценных компонентов. Назначение последних – стабилизация процесса окатывания с образованием гра-

нул, имеющих разветвленную сеть микрокапилляров, для облегчения диффузии кислорода внутрь этих гранул и обратной диффузии продуктов обжига. В упомянутых работах [1, 2] эти вопросы рассматриваются лишь отрывочно.

Задачей исследования было восполнение указанных «пробелов» на основе использования современных представлений об анализе многофакторных процессов с получением обобщенных математических моделей сушки гранулированных материалов.

Целью наших исследований явилось изучение режима обезвоживания с максимально полным удалением не только физической, но и конституционной влаги окатышей из чернового медно-молибденового концентрата.

Исследованию подвергались гранулы, полученные из чернового концентрата с содержанием класса $-0,074$ мм 75 %, насыпная масса концентрата составила $1,12$ г/см³. Химический состав приведен в табл. 1.

Таблица 1. Содержание основных компонентов в концентрате, мас. %

| Cu | S | Fe | CaO | Na ₂ O | K ₂ O | SiO ₂ | Al ₂ O ₃ | Mo |
|------|------|-------|-------|-------------------|------------------|------------------|--------------------------------|------|
| 7,91 | 9,51 | 15,15 | 12,58 | 0,82 | 2,07 | 28,76 | 7,90 | 0,13 |

Концентрат окатывали на лабораторном грануляторе с диаметром чаши 0,4 м, высотой борта 0,15 м при скорости вращения 20 об/мин и подаче связующего разбрызгиванием. Концентрация лигносульфоната 1,05 г/см³ в два раза меньше, чем используется на практике медеплавильных заводов.

Для определения оптимальных условий сушки гранул были проведены опыты на основе математического планирования эксперимента по методу [3]. Изучали влияние температуры (t , °C), продолжительности сушки (τ , мин), расхода воздуха (V , см³/с), размера гранул (d , мм). Условия и результаты опытов приведены в табл. 2.

При изучении сушки применяли специально предназначенную для этой цели установку, включающую электрокалорифер, компрессор, ротаметр и рабочую ячейку с решетчатым дном, а также термомпары и вторичные приборы. В ячейку помещали навеску влажных гранул. Снизу в ячейку вдували нагретый воздух с заданной линейной скоростью. По окончании опыта гранулы извлекали из ячейки, взвешивали, досушивали при температуре 105 °C и вновь взвешивали.

Особенность данного процесса обусловлена спецификой химического и фазового составов концентрата, содержащих сульфиды, сульфаты и оксиды металлов. При орошении концентрата водой на стадии гранулирования образуются гидратированные молекулы сульфидов и сульфатов металлов. Таким образом, гранулы, полученные из исследуемых концентратов, содержат и влагу, которая находится в капиллярах, образованных частицами пыли внутри гранул (несвязанную воду), и

химически связанную (конституционную) воду. Причем эти две характеристики сопоставимы друг с другом по величине.

Соединения металлов, содержащие в своем составе воду, дегидратируют в широком диапазоне температур, в том числе и при температуре ниже 105 °C. Например, ZnSO₄·6H₂O теряет пять молекул воды при 70 °C. Поэтому величины предельной относительной убыли массы влажных гранул, определяемые при той или иной температуре, не являются влажностью в общепринятом смысле этого слова. Как правило, содержание химически связанной воды не учитывается в практике сушки при нахождении влажности исследуемого образца. В то же время наличие значительных количеств химически связанной воды может привести к разрушению гранул в процессе их последующего обжига. Гранулы, попадая в зону повышенных температур, будут «взрываться» за счет интенсивного выделения воды разлагающихся кристаллогидратов.

При исследовании опытов определяли:

- а) количество воды (относительная убыль массы влажных гранул), перешедшей в газ в условиях опытов (W_1):

$$W_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot 100 \text{ \%}}{m_1},$$

где m_1 и m_2 – масса исходных влажных и подсушенных в опыте гранул;

- б) количество воды, удаляемое в ходе досушивания гранул при 105 °C (W_2):

$$W_2 = \frac{(m_2 - m_3) \cdot 100 \text{ \%}}{m_1},$$

где m_3 – масса удаленной воды при досушивании;

- в) суммарное количество воды, перешедшее в газовую фазу на обеих стадиях (W_3):

$$W_3 = \frac{(m_1 - m_3) \cdot 100 \text{ \%}}{m_1}. \quad (1)$$

При этом $W_3 = W_1 + W_2$, %.

Степень обезвоживания гранул (α) рассчитывали по соотношению [4]:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2) \cdot 100 \text{ \%}}{m_1 - m_3'} = \frac{W_1 \cdot 100 \text{ \%}}{W_{3\max}},$$

где $W_{3\max}$ – предельное количество воды, которое может быть удалено в процессе термообработки материала при 210 °C; m_3' – масса удаленной воды при этой температуре.

Получены частные зависимости относительной убыли массы гранул после сушки W_1 и после их досушивания при 105 °C W_2 и степени обезвоживания гранул α от заданных факторов (рис. 1, 2). Адекватность полученных зависимостей определяли по коэффициенту корреляции R и его значимости t_R (точки – экспериментальные данные, линии – по уравнениям табл. 3, 4).

Как следует из этих зависимостей, на W_1 влияют температура и время термообработки. При варь-

ровании скорости воздуха в принятом интервале убыль массы гранул остается неизменной, что указывает на кинетический режим процесса сушки.

Таблица 2. Зависимость экспериментальных (α) и рассчитанных (ρ) по обобщенному уравнению значений изучаемых функций (W, α) от температуры сушки $t, ^\circ\text{C}$; продолжительности τ , мин; размера гранул d , мм; расхода вдуваемого воздуха $V, \text{cm}^3/\text{c}$

| Изучаемый фактор | $W_1, \%$ | $W_1(4), \%$ | $W_3, \%$ | $\alpha_3, \%$ | $\alpha, (5), \%$ | |
|---|-----------|--------------|-----------|----------------|-------------------|-------|
| $t, ^\circ\text{C}$, при $\tau=30$ мин, $V=60 \text{ cm}^3/\text{c}$, $d=10$ мм | 50 | 9,85 | 9,68 | 11,82 | 83,37 | 83,28 |
| | 100 | 10,68 | 10,69 | 11,79 | 90,59 | 87,86 |
| | 150 | 11,78 | 11,34 | 12,79 | 92,09 | 90,66 |
| | 190 | 11,69 | 11,74 | 12,82 | 91,18 | 92,33 |
| | 210 | 12,14 | 11,91 | 12,80 | 94,85 | 93,04 |
| τ , мин, при $t=100 ^\circ\text{C}$, $V=60 \text{ cm}^3/\text{c}$, $d=10$ мм | 5 | 4,64 | 5,51 | 8,063 | 57,56 | 59,05 |
| | 10 | 7,46 | 7,12 | 10,33 | 72,26 | 68,86 |
| | 15 | 8,78 | 8,27 | 9,76 | 83,96 | 75,34 |
| | 30 | 10,68 | 10,69 | 12,18 | 87,68 | 87,86 |
| | 40 | 11,79 | 11,90 | 12,51 | 94,20 | 93,65 |
| | 60 | 11,87 | 13,83 | 12,61 | 94,13 | 99,49 |
| d , мм, при $t=100 ^\circ\text{C}$, $V=60 \text{ cm}^3/\text{c}$, $\tau=30$ мин | 5 | 9,46 | 9,22 | 11,04 | 85,69 | 84,52 |
| | 8 | 10,55 | 10,11 | 11,76 | 89,71 | 86,58 |
| | 10 | 10,68 | 10,69 | 12,19 | 87,58 | 87,86 |
| | 12 | 11,74 | 11,29 | 12,85 | 91,35 | 89,06 |
| $V, \text{cm}^3/\text{c}$, при $t=100 ^\circ\text{C}$, $\tau=30$ мин, $d=10$ мм | 20 | 11,38 | - | 12,42 | 91,71 | - |
| | 40 | 11,43 | - | 12,61 | 90,64 | - |
| | 60 | 10,68 | - | 12,19 | 87,61 | - |
| | 80 | 11,59 | - | 12,57 | 92,20 | - |
| 100 | 11,55 | - | 12,67 | 91,10 | - | |

По мере увеличения размера гранул увеличивается и количество влаги, присутствующей в гранулах. Эти эффекты обусловлены изменением размера гранул за счет увеличения площадей сечения последних. С другой стороны, облегчается диффузия паров воды из центра гранул наружу, возрастает убыль их массы при нагревании. Однако в крупных гранулах, возможно, происходит растрескивание, за счет чего и происходит дополнительное удаление влаги.

Таблица 3. Коэффициент корреляции R и его значимость t_R для частных функций относительной убыли массы гранул после сушки

| Функция относительной убыли массы гранул, % | R | Условие $t_R > 2$ | Значимость |
|---|--------|-------------------|------------|
| $W_1 = 5,585 t^{0,1442}$ | 0,9601 | 123,94 > 2 | + |
| $W_1 = 2,914 t^{0,37}$ | 0,8474 | 6,012 > 2 | + |
| $W_1 = 0,0024 V + 11,183$ | 0,0423 | 0 < 2 | - |
| $W_1 = 0,3027 d + 7,9622$ | 0,9448 | 7,524 > 2 | + |

Таблица 4. Коэффициент корреляции R и его значимость t_R для частных функций степени обезвоживания гранул после сушки

| Функция степени обезвоживания, % | R | Условие $t_R > 2$ | Значимость |
|--|--------|-------------------|------------|
| $\alpha = 62,232 t^{0,0772}$ | 0,8791 | 119,078 > 2 | + |
| $\alpha = 40,135 t^{0,2218}$ | 0,9979 | 78,70 > 2 | + |
| $\alpha = 0,0017 V + 90,55$ | 0,0009 | 0 < 2 | - |
| $\alpha = -0,0098 d + 0,8275 d + 82,161$ | 0,7442 | 2,347 > 2 | + |

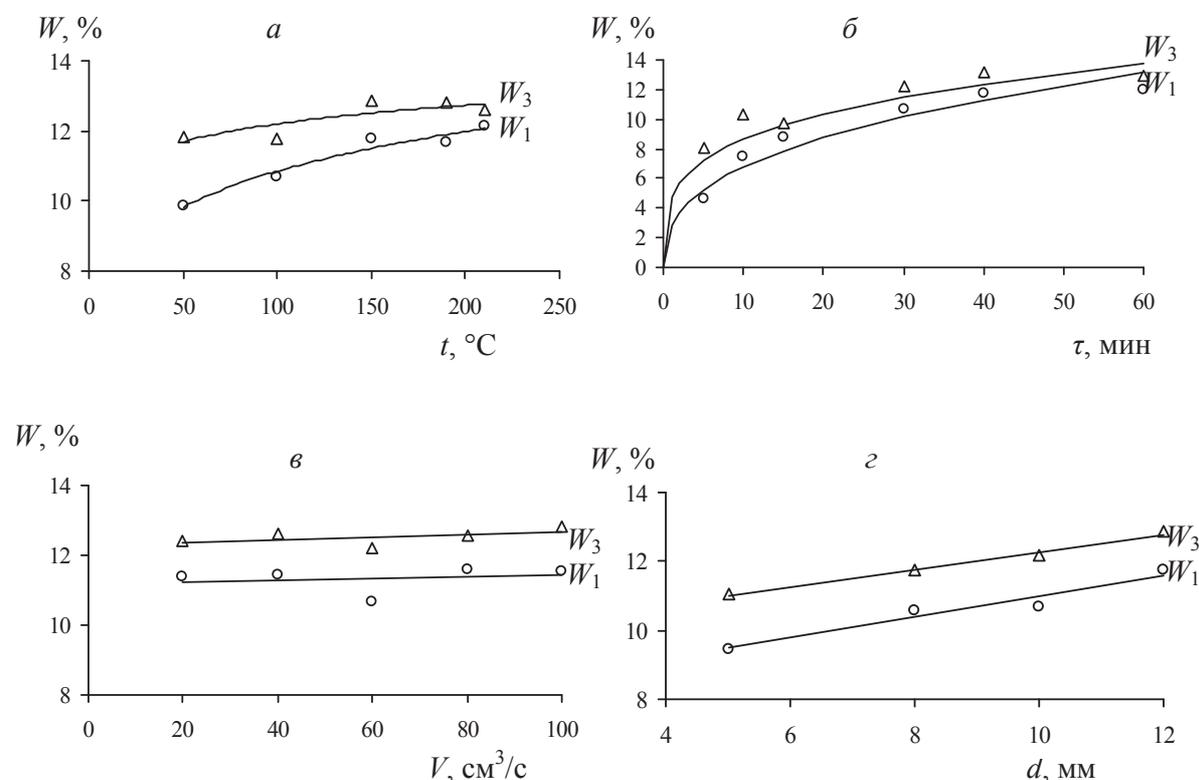


Рис. 1. Зависимости относительной убыли массы гранул после сушки (W_1) и после их досушивания при $105 ^\circ\text{C}$ (W_3) от: а) температуры; б) продолжительности сушки; в) расхода воздуха; г) размера гранул

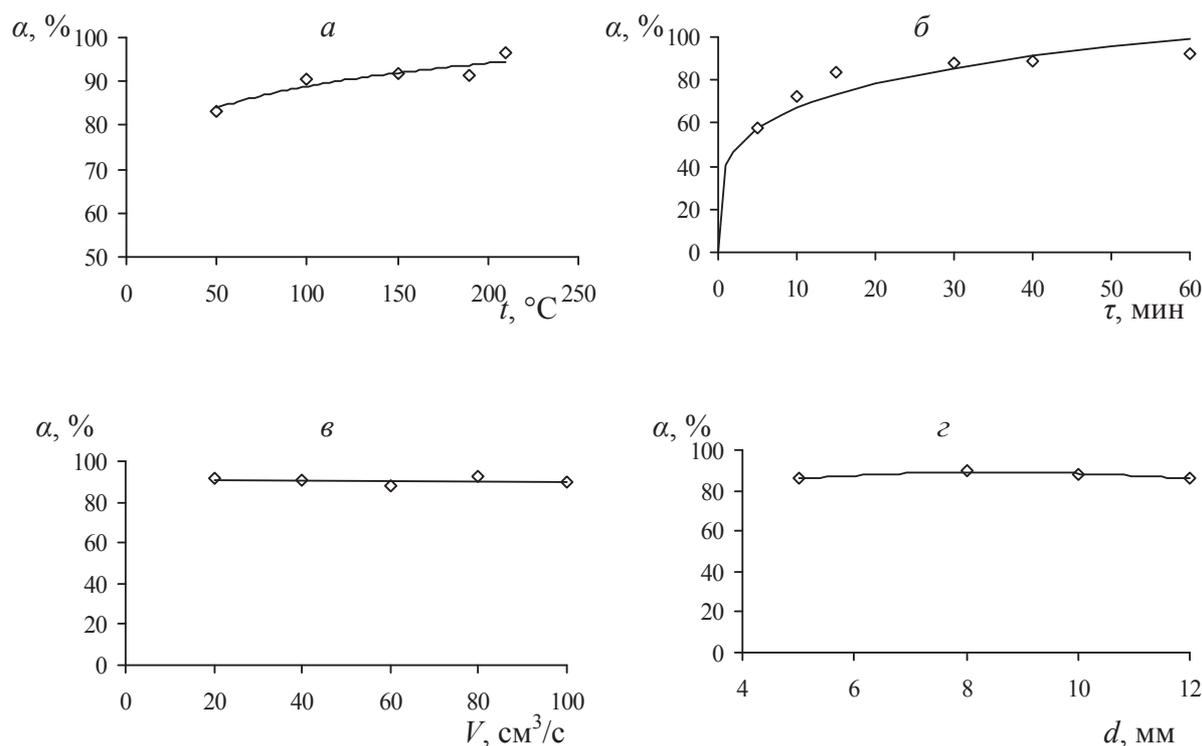


Рис. 2. Зависимости степени обезвоживания гранул от изучаемых факторов от: а) температуры; б) продолжительности сушки; в) расхода воздуха; г) размера гранул

Зависимость W_1 от времени характеризуется наличием крутого (первые 10 мин) и пологого (после 10 мин) участков. То есть наибольшая часть влаги удаляется из материала в первые 10 мин ведения процесса.

Полученные частные зависимости W_3 от варьируемых факторов практически повторяют по форме одноименные зависимости W_1 . Это подтверждает суждение о том, что значительное влияние на формирование функций W_1 и W_3 оказывают процессы удаления химически связанной влаги.

Согласно соотношению (1) W_3 равно сумме W_1 и W_2 . То есть W_3 при отсутствии химических превращений в ходе нагревания должно быть равно влажности исходного материала (содержанию в нем несвязанной воды).

Величина влажности последнего не зависит от условий термообработки материала. Значение W_3 должно быть неизменным. Несоблюдение этого условия свидетельствует о протекании процессов разложения гидратированных соединений. Только в данном случае W_3 может зависеть от температуры.

Предельное изменение массы влажных гранул той же фракции при 210 °С (210 °С – верхняя граница температуры) W_{210} равно:

$$W_{210} = \frac{(m'_1 - m'_3) \cdot 100}{m'_1} = 12,84,$$

где штрих относится к массе гранул после их термообработки при 210 °С.

Дополнительная потеря массы обусловлена разложением рассматриваемых соединений: $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ до $\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ при 150 °С, а $\text{Zn}(\text{OH})_2$ до оксидов при 125 °С.

Таким образом, саму процедуру определения W_3 можно рассматривать как способ уточнения механизма обезвоживания материала и определения вклада, вносимого химическими реакциями в итоговые результаты процесса.

Полученные уравнения для относительной убыли массы и степени обезвоживания гранул после сушки (табл. 3, 4) с учетом значимых функций для описания совокупности действующих факторов обобщаются согласно [3] в виде их произведения с нормировкой по центральному экспериментальному значению в степени $(n-1)$, где n – число значимых частных функций. По центральному (ц) для всех функций условию ($t=100$ °С, $\tau=30$ мин, $d=10$ мм, $V=60$ см³/с) значение $W_{\text{ц}}=10,69$ % и $\alpha_{\text{ц}}=87,86$ %. Обобщенные уравнения выразятся как

$$W_1 = 8,74 \cdot 10^{-3} (5,585t^{0,1442})(2,914\tau^{0,37}) \times (0,3027d + 7,9622), \quad \%, \quad (4)$$

$$\alpha = 1,3 \cdot 10^{-4} (62,232t^{0,0772})(40,135\tau^{0,2218}) \times (0,8275d - 0,0098d^2 + 82,161), \quad \%. \quad (5)$$

При сопоставлении результатов эксперимента и расчета нашли значения коэффициента корреляции для относительной убыли массы и степени обезвоживания гранул после сушки $R=0,9455$,

$t_R=32,140>2$, $R=0,9393$, $t_R=28,750>2$ соответственно, что подтверждает адекватность описания данных эксперимента настоящим уравнением.

Сушку материала в промышленном аппарате рекомендуется вести при 150...180 °С, а достаточным временем пребывания материала в этом аппарате можно считать 20...30 мин. Так, расчет по полученным уравнениям показывает, что при условиях ведения процесса $t=180$ °С, $\tau=20$ мин контролируемые показатели равны: $W_1=10,014\%$, $\alpha=84,031\%$.

Полученную модель (5) можно использовать для расчета продолжительности сушки при вариации температуры и диаметра гранул. Для этого необходимо заменить τ на α , т. е. численные коэффициенты являются постоянными, это позволяет обозначить их общей величиной, например K . Тогда обобщенное уравнение выразится как

$$\alpha = 5,20 \cdot 10^{-3} (62,232t^{0,0772})(\tau^{0,2218}) \times (0,8275d - 0,0098d^2 + 82,161),$$

заменяя τ на α , получим

$$\tau = \left[\frac{\left\{ K(62,232t^{0,0772}) \times \left(0,8275d - 0,0098d^2 + 82,161 \right) \right\}}{\alpha} \right]^{\frac{1}{0,2218}}, \text{ мин. (6)}$$

Значения продолжительности сушки по уравнению (6) приведены в табл. 5 при различных заданных величинах температуры и диаметра гранул.

Таблица 5. Необходимая продолжительность сушки (мин) для достижения заданной степени обезвоживания при $\alpha=84,031\%$ от температуры и размера гранул

| $t, ^\circ\text{C}$ | $d, \text{мм}$ | | | |
|---------------------|----------------|-------|-------|-------|
| | 5 | 8 | 10 | 12 |
| 50 | 37,66 | 33,41 | 31,27 | 29,41 |
| 100 | 29,26 | 26,25 | 24,57 | 23,11 |
| 150 | 25,41 | 22,79 | 21,33 | 20,06 |
| 190 | 23,40 | 20,99 | 19,65 | 18,48 |
| 210 | 22,60 | 20,27 | 18,97 | 17,84 |

Необходимый для сушки расход воздуха рассчитывается по данным лабораторных опытов с навеской 26 г, для которой достаточный расход

воздуха составил (с избытком) 60 см³/с. Отсюда удельный расход V' выразится как

$$V' = \frac{60}{26} = 2,31 \text{ см}^3 / (\text{с} \cdot \text{г}) = 8,31 \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{ч}).$$

Поэтому необходимый расход воздуха на сушку любой массы материала m при выше заданных условиях для расчета τ будет равным

$$V = V' \tau m, \text{ м}^3. \quad (7)$$

Полученные данные по ур. (7) при различной температуре сушки и диаметре гранул 10 мм представлены в табл. 6.

Таблица 6. Необходимый расход воздуха (м³) для сушки гранул от заданной массы и температуры процесса

| $m, \text{г}$ | $t, ^\circ\text{C}$ | | | | |
|---------------|---------------------|--------|--------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 190 | 210 |
| 10 | 2598 | 2041 | 1772 | 1632 | 1576 |
| 30 | 7795 | 6125 | 5317 | 4898 | 4729 |
| 50 | 12992 | 10208 | 8862 | 8164 | 7882 |
| 100 | 25985 | 20417 | 17725 | 16329 | 15764 |
| 200 | 51970 | 40835 | 35450 | 32658 | 31528 |
| 300 | 77956 | 61253 | 53175 | 48987 | 47292 |
| 400 | 103941 | 81670 | 70900 | 65316 | 63056 |
| 500 | 129926 | 102088 | 88626 | 81645 | 78820 |
| 700 | 181897 | 142923 | 124076 | 114304 | 110348 |
| 800 | 207883 | 163341 | 141801 | 130633 | 126112 |
| 1000 | 259853 | 204176 | 177252 | 163291 | 157640 |

Полученные данные могут быть использованы для выбора типа конструкции и размеров сушильного аппарата.

Выводы

1. Исследованы закономерности обезвоживания и изменение свойств гранулированного чернового медно-молибденового концентрата месторождения «Тастау» в ходе термической обработки.
2. Выявлены оптимальные области режимов сушки в интервале действующих факторов (температура – от 50 до 210 °С; время сушки от 5 до 60 мин; размер гранул от 5 до 12 мм; расход воздуха от 20 до 100 см³/с), обеспечивающих степень обезвоживания не менее 84 %, что является достаточным для подготовки материала к дальнейшей переработке.
4. Беляев С.В., Оралов Т.А., Малышев В.П. О методе расчета степени обезвоживания при термообработке материала в печи с наклонной газораспределительной решеткой // Комплексное использование минерального сырья. – 1994. – № 2. – С. 80–83.

Поступила 25.01.2012 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.И., Тихонов А.И. Обжиг медных руд и концентратов. – Свердловск: Metallurgizdat, 1958. – 280 с.
2. Букетов Е.А., Малышев В.П. Технологические процессы шахтного обжига в цветной металлургии. – Алма-Ата: Наука, 1973. – 345 с.
3. Малышев В.П. Математическое описание результатов многофакторного эксперимента, проведенного по методу Зейделя–Гаусса // Вестник АН КазССР. – 1978. – № 4. – С. 31–38.

УДК 621.791.92

СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ «СТАЛЬ Р6М5 – (WC+TiC)» В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОДЕРЖАНИЯ КАРБИДА ВОЛЬФРАМА В ИСХОДНОЙ ШИХТЕ

С.Ф. Гнусов, В.Г. Дураков*

Томский политехнический университет

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск

E-mail: gnusov@rambler.ru

Исследованы особенности формирования структурно-фазового состава композиционных покрытий «сталь Р6М5 – (WC+TiC)» в зависимости от содержания монокарбида вольфрама. Установлено, что количество остаточного аустенита в композиционном покрытии зависит от содержания карбида вольфрама в общем объеме вводимой упрочняющей фазы. Максимальное количество аустенита (75 %) от общего объема матрицы имеют покрытия, в которых карбидной составляющей содержится 20 %.

Ключевые слова:

Быстрорежущая сталь, карбид вольфрама, карбид титана, композиционное покрытие, микроструктура.

Key words:

High speed steel, tungsten carbide, titanium carbide, composition coating, microstructure.

Введение

В последние годы огромный интерес вызывает применение методов нанесения покрытий с использованием концентрированных источников энергии [1, 2]. При воздействии концентрированных потоков энергии (КПЭ) в сталях в течение тысячных долей секунды происходит сложный комплекс структурных и фазовых превращений, которые могут обеспечивать многофункциональность покрытий, удовлетворяющих целому ряду требований. При этом важным элементом в формировании данных покрытий является правильный подбор композиционных наплавочных материалов.

Одним из возможных путей решения данной проблемы мог бы быть способ применения наплавочного материала, в котором карбидные частицы имеют разную способность к растворению в жидкометаллической матрице и к карбидообразованию. Это позволило бы, во-первых, на этапе кристаллизации жидкометаллической ванны выделиться высокодисперсным карбидам; во-вторых, за счет быстрого охлаждения сформировать пересыщенный твердый раствор карбидообразующих элементов в матрице; в-третьих, в соответствующих температурно-временных условиях выделиться из твердого раствора в виде дисперсных частиц равномерно по всему объему; в-четвертых, сохранить в условиях наплавки некоторое количество исходных частиц карбидов в матрице. Следовательно, необходимо сформировать мультимодальное распределение частиц упрочняющей фазы по размерам равномерно по всему объему матрицы.

В данных условиях необходимы и соответствующие подходы к выбору структурно-фазового состава матрицы. Это касается ее способности к значительному растворению карбидообразующих элементов при высокой температуре, высокой пластичности в малых по размеру межкарбидных прослойках в условиях эксплуатации. Данные требования может одновременно удовлетворить только

аустенитная или аустенитно-мартенситная матрица, аустенит которой находится в метастабильном состоянии. В условиях внешнего воздействия данный аустенит будет эффективно удерживать карбидные частицы от преждевременного выкрашивания, а за счет частичного фазового превращения упрочняться, внося тем самым вклад в общее упрочнение композиционного покрытия.

В [3] исследованы особенности формирования структуры покрытий на основе стали Р6М5, полученные с помощью многопроходной электронно-лучевой наплавки в вакууме. Установлено, что в карбидной подсистеме упрочненного слоя формируется мультимодальное распределение упрочняющих частиц по размерам. Объемная доля вторичного карбида M_6C и остаточного аустенита матрицы может регулироваться в пределах 4,5...7,5 и 5...30 % соответственно в зависимости от термического цикла наплавки. С ростом количества остаточного аустенита в покрытиях их износостойкость повышается за счет $\gamma \rightarrow \alpha'$ мартенситного превращения и наличия дисперсных карбидов в объеме зерен матрицы. Увеличение количества метастабильного аустенита можно осуществить введением в исходный наплавочный порошок быстрорежущей стали монокарбида вольфрама. Он обладает большой растворимостью в стальной матрице, что обеспечивает ей практически аустенитную (80...90 %) структуру и большую объемную долю выделившихся дисперсных карбидов [4]. В [5] показано, что работа разрушения при абразивном изнашивании карбидостали с метастабильной матрицей увеличивается в семь раз по сравнению с материалом без фазовых превращений при тех же условиях испытаний.

Целью данной работы является изучение влияния содержания карбида вольфрама в исходной наплавочной смеси на структурно-фазовый состав композиционного покрытия «сталь Р6М5 – (WC+TiC)».

Материал, оборудование и методы исследования

В качестве наплавочного материала использовали смесь порошков сталь Р6М5 – WC (15, 20, 25 % вес.) – TiC (5 % вес.). Композиционные смеси для наплавки получали смешиванием выше названных порошков, спеканием смесей в вакууме, последующим дроблением и рассевом на фракции полученных спеков. Подробно технология подготовки композиционных наплавочных смесей изложена в [6]. Электронно-лучевую наплавку в вакууме проводили на образцы основного металла (подложки), изготовленные из стали 30 размером 20×30×400 мм, в пять проходов. Это позволило сформировать покрытие толщиной 3...4 мм. Коэффициент отношения объема подложки к объему наплавленного металла в данных условиях был равен $K_{п/н}=13$. Часть образцов после наплавки подвергали термической обработке в виде однократного отпуска при температуре 570 ± 10 °С в течение 1 часа.

Структуру наплавленных покрытий исследовали с помощью оптического микроскопа OLYMPUS

GX51 с комплектом прикладных программ SIAMS 700. Определение количественных характеристик микроструктуры проводили линейным методом по методике А. Розиваля [7]. Исследование фазового состава образцов проводили методами рентгеноструктурного анализа (РСА) на дифрактометре ДРОН-УМ1 с фильтрованным $Cu_{K\alpha}$ -излучением в режиме сканирования в интервале углов 2Θ от 20 до 150° с шагом 0,1°. При проведении качественного фазового анализа использовали хорошо известные картотеки. Для количественного фазового анализа использовали значения интегральной интенсивности дифракционных линий.

Микротвердость (H_{μ}) покрытий и подложки, непосредственно прилегающей к наплавке, измеряли на приборе ПМТ-3 (ГОСТ 9450-76) с шагом по глубине 100 мкм при нагрузке 0,981 Н. Измерения производили в виде двух параллельных дорожек со смещением уколов индентора между дорожками 50 мкм. Расстояние между дорожками было 200 мкм. Это позволило построить график изменения микротвердости по толщине с шагом 50 мкм.

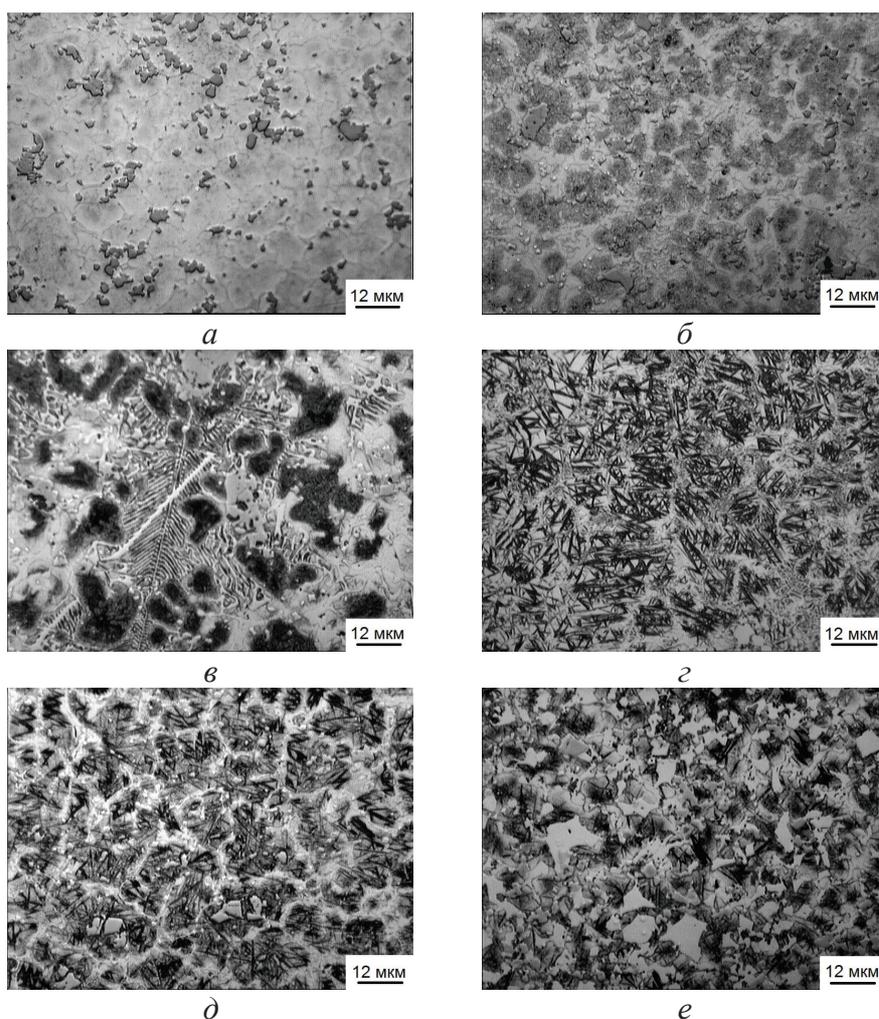


Рис. 1. Микроструктура покрытий: а, г – «сталь Р6М5-(5 % TiC+15 % WC)»; б, д – «сталь Р6М5-(5 % TiC+20 % WC)»; в, е – «сталь Р6М5-(5 % TiC+25 % WC)» непосредственно после наплавки (а, б, в) и отпуска (г, д, е)

Результаты и обсуждение

На рис. 1, 2 и табл. 1 представлены микроструктуры и данные РСА-покрытий на основе стали Р6М5 с карбидным упрочнением WC (15, 20, 25 % вес.) + TiC (5 % вес.) непосредственно после наплавки и дополнительной термической обработки. Анализ микроструктуры и рентгеноструктурного исследования свидетельствует, что покрытия в большинстве имеют однородную многофазную структуру. Данные покрытия состоят из четырех фаз: карбид титана, сложный карбид на основе вольфрама типа M_6C , остаточный аустенит и мартенсит. Карбид титана в процессе наплавки слабо растворяется в жидкометаллической матрице и остается в покрытии в виде отдельных частиц, которые имеют темно-серый цвет. Средний размер зерен карбида титана уменьшается при движении от верха к низу наплавки с 2,3 до 2,0 мкм.

Карбид вольфрама при наплавке растворяется в жидкометаллической ванне и вновь выпадает в виде сложного карбида типа M_6C . В зависимости от месторасположения по зонам (верх, середина или низ наплавки) этот карбид имеет разную морфологию. В процессе быстрого охлаждения при многопроходной наплавке сложный карбид вольфрама образует дендриты скелетообразной формы светло-серого цвета. Дендриты располагаются в верхней и частично средней зонах покрытия (рис. 1, в). В нижней и средней зонах образуются крупные отдельные скопления, близкие к равноосной форме. Это происходит за счет перекристаллизации данного карбида через жидко-твердую фазу при многопроходной наплавке. Следовательно, в ходе наплавки формируется мультимодальное распределение карбидных частиц по размерам в матрице.

Таблица 1. Результаты идентификации дифрактограмм

| Максимум | 2Θ , град | D , нм | J , о. е. | Фаза |
|-----------|------------------|----------|-------------|--------------------|
| Рис. 2, а | | | | |
| 1 | 32,324 | 0,2767 | 0,019 | M_6C (400) |
| 2 | 35,364 | 0,2536 | 0,046 | M_6C (331) |
| 3 | 36,142 | 0,2483 | 0,041 | TiC (111) |
| 4 | 39,975 | 0,2253 | 0,184 | M_6C (422) |
| 5 | 41,956 | 0,2152 | 0,048 | TiC (200) |
| 6 | 42,464 | 2,1269 | 0,243 | M_6C (511) |
| 7 | 43,222 | 0,2091 | 1,000 | γ -Fe (111) |
| 8 | 44,401 | 0,2039 | 0,267 | α -Fe (110) |
| 9 | 46,428 | 0,1954 | 0,045 | M_6C (440) |
| 10 | 50,187 | 0,1816 | 0,112 | γ -Fe (200) |
| Рис. 2, б | | | | |
| 1 | 32,434 | 0,2758 | 0,013 | M_6C (400) |
| 2 | 35,440 | 0,2531 | 0,016 | M_6C (331) |
| 3 | 39,964 | 0,2254 | 0,171 | M_6C (422) |
| 4 | 41,951 | 0,2152 | 0,026 | TiC (111) |
| 5 | 42,520 | 0,2124 | 0,290 | M_6C (511) |
| 6 | 43,523 | 0,2078 | 0,426 | γ -Fe (111) |
| 7 | 44,471 | 0,2036 | 1,000 | α -Fe (110) |
| 8 | 46,471 | 0,1952 | 0,070 | M_6C (440) |
| 9 | 50,234 | 0,1815 | 0,009 | γ -Fe (200) |

J – относительная интенсивность линий, о. е.; D – межплоскостное расстояние, нм.

Матрица после наплавки находится в двухфазном состоянии: α -фаза (мартенсит) разной дисперсности – игольчатый и мелкодисперсный (рис. 1) – в виде участков темного цвета, и γ -фаза (аустенит) в виде светлой структурной составляющей (рис. 1, а, б). Количество аустенита зависит от содержания карбида вольфрама в общем объеме вводимой упрочняющей фазы (WC + TiC). Максимальное количество аустенита (70...75 %) имеют

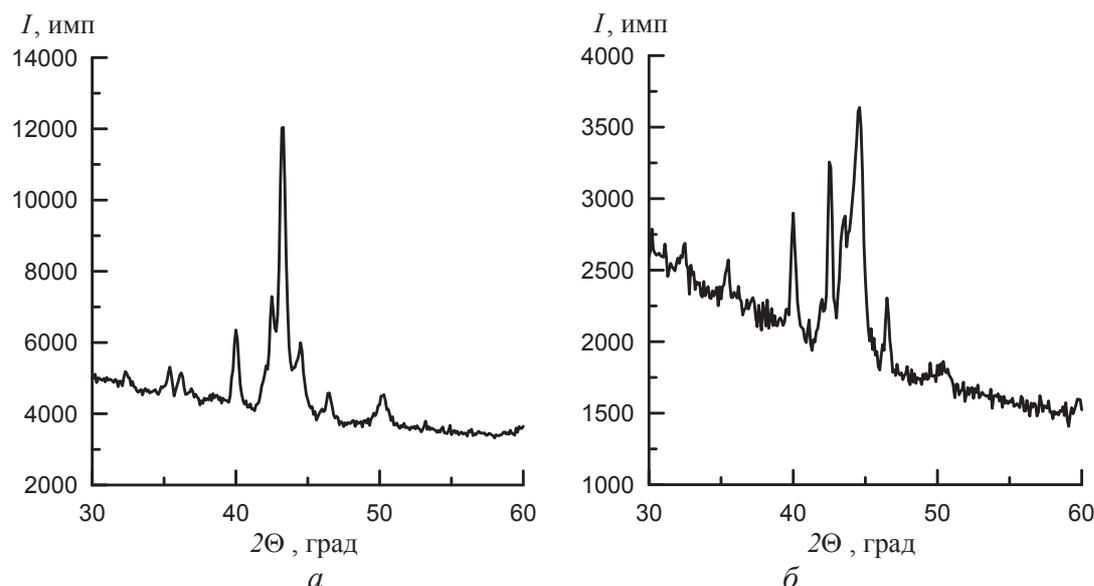


Рис. 2. Дифрактограммы, полученные от композиционных покрытий «сталь Р6М5 – (5 % TiC+15 % WC)» после наплавки (а) и термической обработки (б)

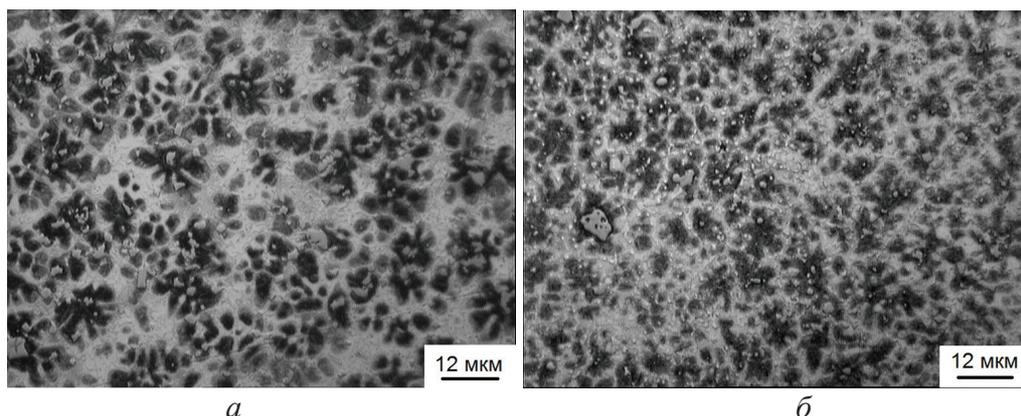


Рис. 3. Микроструктура покрытий «сталь Р6М5 – (5 % TiC+20 % WC)» (а) и «сталь Р6М5 – (5 % TiC+25 % WC)» (б) непосредственно после наплавки

покрытия, в которых карбидной составляющей содержится 20 % (рис. 1, а, в). При большем содержании упрочняющей фазы количество аустенита уменьшается до 40...50 % от общего объема матрицы. В процессе однократного отпуска до 50 % аустенита превращается в игольчатый мартенсит (рис. 1, б, д, рис. 2, б).

Необходимо отметить, что в образцах после наплавки мелкодисперсный (бесструктурный) мартенсит в основном образуется в непосредственной близости к карбидным включениям титана, их конгломератам или полностью окружает эти включения (рис. 3). При наплавке чистой сталью Р6М5 количество остаточного аустенита сохраняется на уровне 20...30 %, а при дополнительном введении в наплавочную смесь монокарбида вольфрама (20...30 %) его содержание достигает ~ 85 % [3, 4].

Для определения объемной доли карбида титана была проанализирована структура наплавки «сталь Р6М5 – (5 % TiC + 15 % WC)». Как показали расчеты, в верхней части наплавки объемная доля карбида титана составляет 10,5 %, в средней области – 10,3 %, а в нижней части наплавленного слоя – 9,6 %. Данные значения хорошо аппроксимируются линейной функцией, показывающей небольшое увеличение доли карбида титана в верхней части наплавки. Это может быть связано с рядом причин.

Первая причина связана с тем, что частицы карбида титана за счет слабой растворимости в жидкометаллической ванне и тем более конгломераты частиц не успевают раствориться. Второй причиной может являться перекристаллизация через жидкую фазу более мелких частиц карбида титана и частичное растворение крупных частиц и конгломератов с выделением мелких зерен сложного карбида в ходе многократного подплавления при многопроходной наплавке. Это подтверждается, с одной стороны, тем, что среднее значение размера зерен карбида титана уменьшается при движении от верха к низу наплавки. С другой стороны, сложный карбид помимо атомов титана может включать атомы вольфрама и железа, о чем го-

ворит изменение межплоскостных расстояний, характерных для TiC. Образование такого сложного карбида хорошо просматривается на микроструктуре в виде «кольцевых» образований на крупных частицах карбида титана.

Из анализа графиков микротвердости (рис. 4) видно, что с увеличением содержания карбидной фазы в составе наплавляемого покрытия твердость увеличивается. Причем интенсивность ее увеличения наиболее характерна для состава, содержащего 30 % карбидной фазы (рис. 4, кривая 1). Это связано с тем, что при введении в сталь 20...25 % карбидов в ее структуре после наплавки сохраняется большое количество аустенита, который после отпуска превращается в мартенсит, и, следовательно, микротвердость возрастает (рис. 4, кривая 2). Значения микротвердости достигают 12 ГПа.

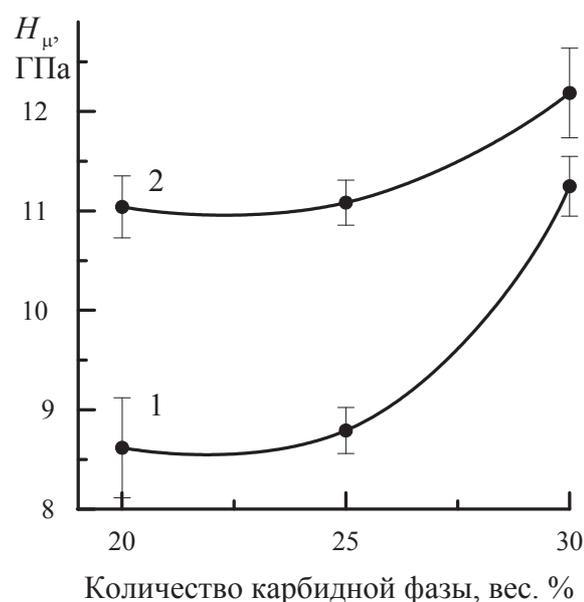


Рис. 4. Изменение микротвердости в зависимости от количества карбидной фазы и термической обработки: 1) после наплавки; 2) после наплавки и отпуска

Таким образом, количество аустенита в композиционном покрытии зависит от содержания карбида вольфрама в общем объеме вводимой упрочняющей фазы (WC+TiC). Максимальное количество аустенита (~75 %) имеют покрытия, в которых карбидной составляющей содержится 20 %. При большем содержании упрочняющей фазы количество аустенита уменьшается до 40...50 % от общего объема матрицы. В процессе однократного отпуска до 50 % остаточного аустенит превращается в игольчатый мартенсит. Частицы карбида титана слабо растворяются в жидкометаллической ванне расплава. Отмечается образование конгломератов из этих частиц.

Выводы

На основе анализа композиционного покрытия «сталь Р6М5 – (WC+TiC)» установлено, что количество остаточного аустенита в покрытии зависит от содержания карбида вольфрама в общем объеме

вводимой упрочняющей фазы (WC+TiC). Максимальное количество аустенита (75 %) от общего объема матрицы имеют покрытия, в которых карбидной составляющей содержится 20 %. При большем содержании карбидов количество остаточного аустенита уменьшается до 40...50 % от общего объема матрицы.

Показано, что в образцах непосредственно после наплавки мелкодисперсный мартенсит в основном образуется в непосредственной близости к карбидным включениям титана, их конгломератам или полностью окружает эти включения. В процессе однократного отпуска до 50 % аустенит превращается в игольчатый мартенсит. Частицы карбида титана слабо растворяются в жидкометаллической ванне расплава.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ ТПУ № 8.3664.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fadeev S.N., Golkovski M.G., Korchagin A.I., Kuksanov N.K., Lavruhin A.V., Petrov S.E., Salimov R.A., Vaisman A.F. Technological applications of BINP industrial electron accelerators with focused beam extracted into atmosphere // *Radiation Physics and Chemistry*. – 2000. – V. 57. – № 3–6. – P. 653–655.
2. Панин В.Е., Белюк С.И., Дураков В.Г. и др. Электронно-лучевая наплавка в вакууме: оборудование, технология, свойства покрытий // *Сварочное производство*. – 2000. – № 2. – С. 34–38.
3. Гнюсов С.Ф., Игнатов А.А., Дураков В.Г. Структура и износостойкость покрытий на основе стали Р6М5 // *Письма в журнал технической физики*. – 2010. – Т. 36. – № 16. – С. 19–23.
4. Гнюсов С.Ф. Структура и абразивная износостойкость композиционных покрытий «сталь Р6М5 – карбид вольфрама» // *Письма в журнал технической физики*. – 2012. – Т. 28. – № 18. – С. 100–104.
5. Смышляева Т.В. Оценка работы разрушения трипстали при абразивном изнашивании // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22. – № 3. – С. 295–298.
6. Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г., Гнюсов К.С. Вакуумная электронно-лучевая наплавка карбидосталей. I. Особенности технологии наплавки и подготовки композиционных наплавочных смесей // *Сварочное производство*. – 2007. – № 11. – С. 8–12.
7. Салтыков С.А. Стереометрическая металлография. – М.: Металлургия, 1970. – 376 с.

Поступила 18.07.2012 г.

УДК 621.793.794.357.7

ВЛИЯНИЕ НИКЕЛЯ НА МИКРОСТРУКТУРУ И СВОЙСТВА МЕДНО-ХРОМОВОГО КОНТАКТНОГО МАТЕРИАЛА, ПОЛУЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ НАПЛАВКОЙ

В.Г. Дураков¹, С.Ф. Гнусов^{1,2}, С.З. Дехонова²¹Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск²Томский политехнический университет

E-mail: dana0863@mail.ru

Изучено влияние легирования никелем на микроструктуру Cu–Cr контактного материала, полученного в условиях вакуумной электронно-лучевой наплавки и дополнительного переплава. Введение никеля в исходную Cu–Cr-шихту способствует формированию гомогенного медно-хромового расплава, уменьшает сегрегацию и ограничивает рост дендритов хрома в процессе кристаллизации.

Ключевые слова:

Псевдосплав Cu–Cr, никель, электронно-лучевая наплавка, температурный режим, структура.

Key words:

Pseudoalloy Cu–Cr, nickel, electron beam facing, temperature mode, structure.

Введение

Медно-хромовые контактные материалы широко используются в большинстве промышленных силовых вакуумных выключателей, поскольку обладают хорошими электрическими свойствами, высокой отключающей способностью, стойкостью к дуговой эрозии и свариваемости. Наилучшими характеристиками по отключающей способности обладают композиты, содержащие ~25 % хрома [1, 2]. Однако многочисленные исследования структурных характеристик медно-хромового композита показали, что уменьшение размера частиц хрома [3–5] вплоть до наноразмеров [6] может значительно улучшить свойства Cu–Cr-материала. В.Ф. Ридер с соавторами [3] обнаружил, что максимальный прерывающий ток (ток среза) уменьшается и пробивная напряженность поля увеличивается, когда размер частиц хрома в контактном материале уменьшается от 150 до 36 мкм. Медно-хромовые композиты, производимые посредством дугового переплава, с размером зерен 15...30 мкм, имеют лучшие технические характеристики, чем традиционные спеченные Cu–Cr-материалы с размером зерен 74...150 мкм [5]. Более того, дополнительный вакуумный переплав спеченных медно-хромовых композитов способствует не только измельчению хромовых выделений, но и формированию полукогерентных межфазных границ, что обеспечивает более высокую допустимую нагрузку по току, электрическую прочность и меньшую шероховатость поверхности контактов после отключения, чем у спеченного материала того же состава [4]. Следовательно, уменьшение среднего размера и сферическая морфология частиц хрома, равномерное их распределение в медной матрице способствуют улучшению технических характеристик вакуумных выключателей.

Метод электронно-лучевой наплавки позволяет сформировать на медной основе (подложке) медно-хромовый контактный материал с мультимо-

дальной структурой [7, 8]: частицы исходного хрома, хром в виде первичных частиц, образовавшихся при кристаллизации, и хром, выделившийся по границам и внутри зерен матрицы (вторичные частицы хрома) в результате старения твердого раствора на основе меди. Средний размер первичных частиц хрома растет от 1,8 до 5,1 мкм, а вторичных частиц от 0,25 до ~1 мкм с увеличением температуры основного металла от 600 до 880 °С. Минимальное количество исходных частиц хрома в композиционном Cu–Cr-покрытии соответствует температуре основного металла в начале/конце процесса 500/600 °С. Сформировать более однородную структуру без включений исходных частиц хрома со средним размером первичных частиц хрома ~0,8 мкм возможно только при повторном оплавлении покрытия электронным лучом при условии, что температура основного металла не превышает 360 °С.

Наплавка же при температуре 600 °С сопряжена с определенными трудностями, которые заключаются в необходимости поддержания повышенного значения плотности мощности электронного луча и обеспечения теплоотвода от медной подложки. В технологическом плане наплавку проще вести при температуре подложки в диапазоне 800...900 °С, когда устанавливается баланс между подводимой энергией и энергией, рассеиваемой подложкой за счет излучения и теплопроводности в оснастку технологического оборудования. Увеличение температуры подложки способствует повышению производительности процесса наплавки, но приводит к росту среднего размера хромовых дендритов и коагуляции хромовых выделений.

Известно положительное использование легирующих элементов при индукционном плавлении Cu–Cr контактного материала [9]. В частности, легирование никелем в количестве до 3 вес. % оказывает положительное влияние на морфологию и дисперсность хромовых выделений при индук-

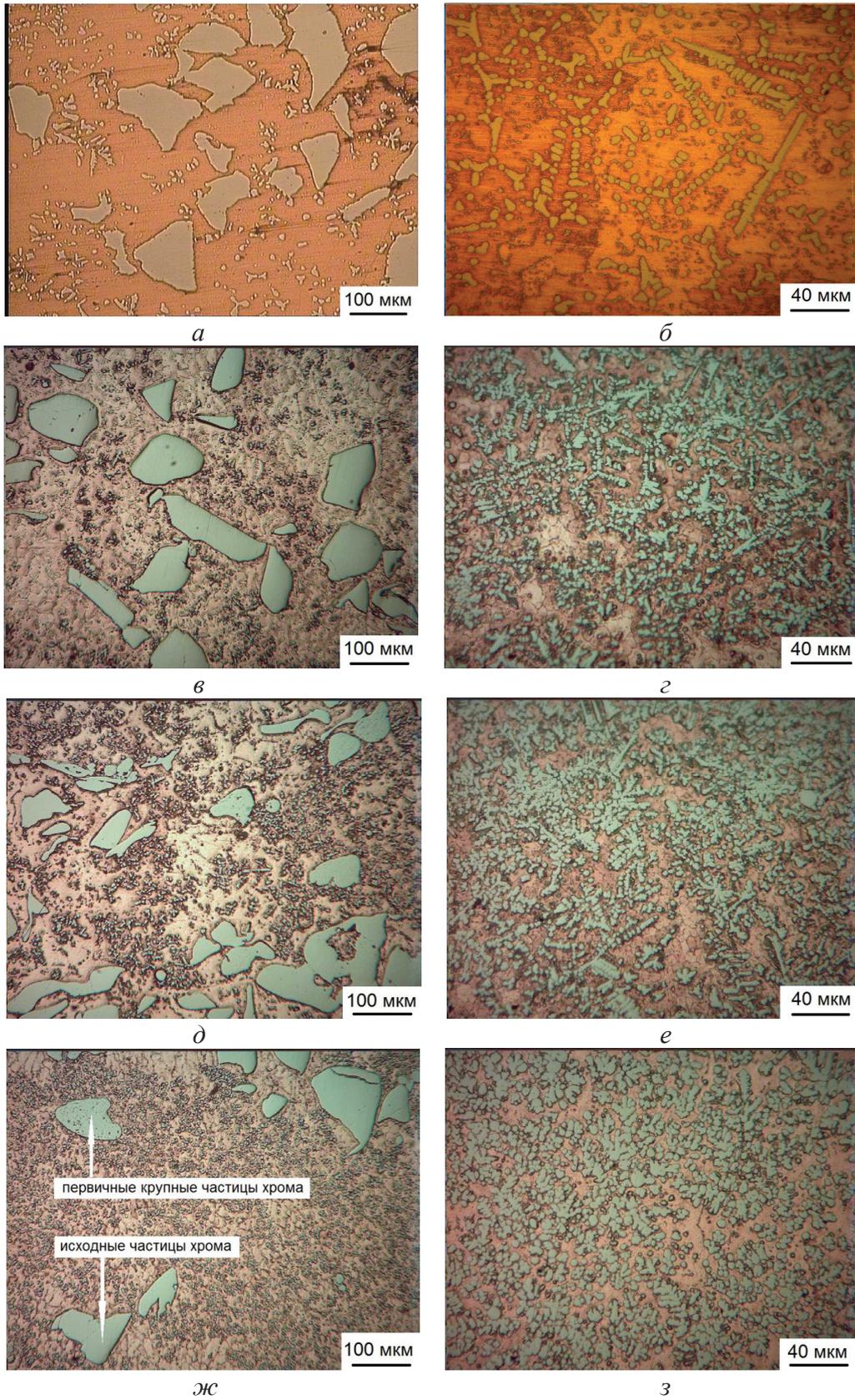


Рис. 1. Микроструктура Si-Cr-покрытия (ХД75) после наплавки (а, в, д, ж) и дополнительного переплава (б, г, е, з) с различным содержанием никеля: а, б - 0 %, в, г - 1 %, д, е - 2 %, ж, з - 4 %

ционном плавлении [10]. Процесс электронно-лучевой наплавки характеризуется малым временем существования жидкометаллической ванны, высокой скоростью охлаждения расплавленной зоны и формированием сильно пересыщенного твердого раствора. Вопросы о влиянии легирования никелем Cu–Cr-сплава в условиях быстрого охлаждения расплава при электронно-лучевой наплавке в литературе не изучены.

Целью работы является исследование влияния легирования никелем на микроструктуру Cu–Cr контактного материала, полученного в условиях электронно-лучевой наплавки.

Материал, оборудование и методы исследования

Для электронно-лучевой наплавки использовали смесь порошков меди (ПМС-Н) и хрома (ПЭРХ-1/160), соответствующую составу ХД75 (75 вес. % Cu). На этапе подготовки исходных смесей в них дополнительно вводился никель в количестве 0, 1, 2, 3 и 4 вес. %. Дисперсность порошков меди, хрома и никеля находилась в диапазоне от 90 до 125 мкм. После наплавки часть образцов дополнительно оплавливали электронным лучом. Наплавку проводили на образцы, изготовленные из бескислородной меди М06 (ГОСТ 10988-75), в виде дисков диаметром 60 мм и толщиной 10 мм по методике [11]. Температуру основного металла (подложки) контролировали с помощью термопары (WRe5-WRe20), вставленной в глухое отверстие, расположенное в центре диска. Диск вращался с угловой скоростью 3 мин⁻¹ при неподвижной термопаре. Температура образцов в процессе наплавки не превышала 700...900 °С. Дополнительное оплавление части образцов электронным лучом проводили при температуре подложки, не превышающей 600 °С. После окончания процесса наплавки и оплавления скорость охлаждения образцов до температуры ~200 °С составляла 20 °С/мин.

Микроструктуру наплавленных покрытий исследовали с помощью оптического микроскопа Olympus GX51, снабженного анализатором изображений SIAMS 700. С помощью анализатора изображений оценивали объемные доли частиц хрома, их средние диаметры и среднеквадратичное отклонение размеров. Микротвердость H_d упрочненного слоя по всей его толщине и подложки, непосредственно прилегающей к наплавке (1 мм), измеряли на приборе ПМТ-3 (ГОСТ 9450-76) при нагрузке 0,981 Н с шагом между уколами 250 мкм.

Результаты и обсуждение

Как было показано в [11], доля исходных не расплавившихся частиц хрома определяется степенью перегрева медной ванны в зоне действия электронного луча и зависит от плотности его мощности и температуры подложки. При более высокой температуре подложки требуется меньшая плотность мощности электронного луча для поддержания требуемого размера ванны расплава. Это

положительным образом сказывается на производительности процесса наплавки за счет ослабления процесса сдувания наплавочной смеси потоком пара из ванны, но при этом уменьшается степень перегрева ванны, что ведет к увеличению в наплавленном слое доли не расплавившихся частиц хрома.

С помощью дополнительного легирования никелем предполагалось увеличить производительность процесса наплавки. Поэтому наплавка велась на верхнем пределе температуры (900 °С). Влияние никеля на микроструктуру медно-хромовых композитов, наплавленных электронным лучом, представлено на рис. 1, а, в, д, ж.

Во всех трех составах, содержащих никель (рис. 1, в, д, ж), наряду с не расплавившимися исходными частицами хрома и крупными первичными частицами (ж), выпавшими при кристаллизации и содержащими внутри себя отдельные мелкие выделения меди, наблюдаются мелкие выделения хрома, доля которых растет с увеличением содержания никеля. Это говорит о том, что никель положительно влияет на процесс плавления исходных хромовых частиц. Согласно двойным диаграммам состояния Cu–Ni и Cr–Ni, никель имеет неограниченную растворимость как в меди, так и в хrome. Следовательно, добавка никеля будет способствовать формированию более гомогенного Cu–Cr-расплава и уменьшать сегрегацию. Кроме того, присутствуя в медно-хромовом расплаве, никель ограничивает рост дендритов хрома при охлаждении (анизотропический рост кристаллов хрома).

При дополнительном переплаве покрытий электронным лучом независимо от содержания никеля полностью исчезают исходные частицы хрома (рис. 1, б, г, е, з). С увеличением содержания никеля изменяется морфология хромовых выделений от протяженных дендритообразных до округлых равноосных (рис. 1, г, е, з).

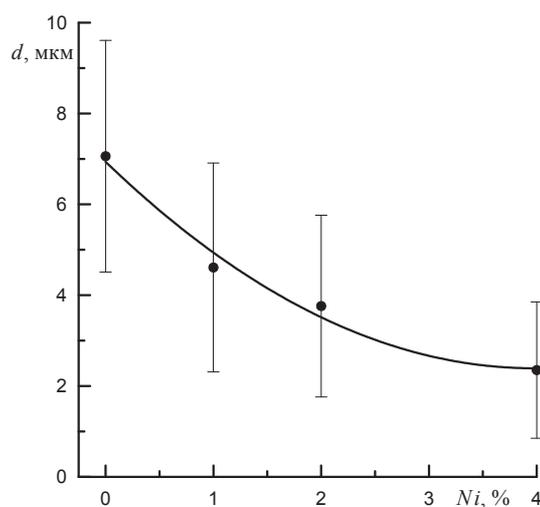


Рис. 2. Изменение среднего размера хромовых выделений от содержания никеля в Cu–Cr наплавочном материале

Кроме изменения морфологии хромовых выделений, влияние никеля также связано и с уменьшением среднего размера частиц хрома (рис. 2). При увеличении содержания никеля до 4 вес. % средний размер хромовых выделений уменьшается более чем в два раза. Наиболее интенсивно (~35 %) данное уменьшение отмечается уже при введении никеля в количестве 1 вес. % в исходный наплавочный материал. Одновременно с уменьшением размера хромовых частиц уменьшается и их дисперсия в распределении по размерам, что говорит о более однородной структуре.

Выводы

1. Изучено влияние легирования никелем на микроструктуру Cu–Cr контактного материала, полученного в условиях электронно-лучевой наплавки. Показано, что введение никеля в исход-

ную Cu–Cr-шихту способствует формированию более гомогенного медно-хромового расплава, уменьшает сегрегацию и ограничивает рост дендритов хрома при кристаллизации покрытий после вакуумной электронно-лучевой наплавки.

2. Доказано, что дополнительный переплав наплавленных Cu–Cr-покрытий, легированных никелем, способствует полному исчезновению как исходных, так и первичных крупных частиц хрома. С увеличением содержания никеля от 1 до 4 вес. % изменяется морфология хромовых выделений от протяженных дендритообразных до округлых равноосных, а их средний размер уменьшается более чем в два раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-08-00089-а и частично государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ № 8.3664.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Slade P.G. Advances in material development for high power, vacuum interrupter contacts // Components, Packaging, and Manufacturing Technology, Part A, IEEE Transactions. – 1994. – V. 17. – № 1. – P. 96–106.
2. Schellekens H. 50 Years of TMF Contacts Design Considerations // XXIII-rd Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. – Bucharest, 2008. – 340 p.
3. Rieder W.F., Schusseck M., Glatzle W., Kny E. The Influence of Composition and Cr Particle-Size of Cu/Cr Contacts on Chopping Current, Contact Resistance, and Breakdown Voltage in Vacuum Interrupters // Transactions on Components Hybrids and Manufacturing Technology. – 1989. – V. 12. – P. 273–283.
4. Miao B., Zhang Y. Two New Cu–Cr Alloy Contact Materials // High Voltage Apparatus. – 2000. – V. 36. – № 3. – P. 60–62.
5. Muller R., Melted A. CuCr Alloy Contact Materials for Vacuum Interrupters // Siemens Forsch. UndEntwickl. – 1988. – V. 17. – № 3. – P. 105–111.
6. Yu L., Wang J., Geng Y., Kong G., Liu Z. High Current Vacuum Arc Phenomena of Nanocrystalline CuCr25 Contact Material / XXIVth Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. – Braunschweig, 2010. – P. 257–260.
7. Дехонова С.З., Дураков В.Г., Гнюсов С.Ф. Формирование бимодальной структуры псевдосплава Cu–Cr методом электронно-лучевой наплавки // Сварочное производство. – 2003. – № 10. – С. 19–23.
8. Дураков В.Г., Гнюсов С.Ф., Дампилон Б.В., Дехонова С.З. Влияние технологических параметров электронно-лучевой наплавки на структуру медно-хромовых композитов // Известия ТПУ. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 80–86.
9. Zhang C., Wang Y., Yang Z., Guo Y., Bingjun D. Microstructure and properties of vacuum induction melted CuCr25 alloys // Journal of Alloys and Compounds. – 2004. – V. 366. – P. 289–292.
10. Yu M., Wang Y., Sun Z. Effect of Ni addition on the microstructures of melt-spun CuCr ribbons // Materials Science-Poland. – 2008. – V. 26. – № 3. – P. 234–240.
11. Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г., Дехонова С.З., Белок С.И. Формирование бимодальной структуры контактного материала вакуумных выключателей // Перспективные материалы. – 2004. – № 2. – С. 65–70.

Поступила 03.09.2012 г.

УДК 621.791.92

СТРУКТУРА КАРБИДНОЙ ПОДСИСТЕМЫ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ АУСТЕНИТНЫХ СТАЛЕЙ

С.Ф. Гнусов, Д.А. Маков*

Томский политехнический университет

*ООО «Сибирский механический завод», г. Северск

E-mail: gnusov@rambler.ru

Изучено влияние термоциклирования при многопроходной электронно-лучевой наплавке и последующего старения на особенности выделения частиц карбида ванадия в матрице на основе стали из никелевого и марганцовистого аустенита. Установлено, что карбид ванадия в композиционных покрытиях представлен в виде отдельных равноосных частиц, средний размер которых в марганцовистой матрице равен 94 нм, а в никелевой – 0,8 мкм.

Ключевые слова:

Электронно-лучевая наплавка, термоциклирование, композиционное покрытие, аустенитная сталь, карбид ванадия, структура.

Key words:

Electron beam facing, temperature cycling, composition coating, austenitic steel, vanadium carbide, structure.

Введение

В [1] изучено влияние термической обработки на структурно-фазовый состав и свойства аустенитных композиционных покрытий, наносимых с помощью электронно-лучевой наплавки. Установлен рациональный режим старения (600 °С в течение 1...2 ч), обеспечивающий сохранение аустенитной структуры матрицы и равномерное мультимодальное распределение карбидной фазы по размерам в объеме упрочненного слоя: $d_1=0,3...2,0$, $d_2=2...4$ и $d_3=4...7$ мкм. Показано, что сформировать подобное структурно-фазовое состояние композиционного покрытия возможно в условиях совмещения процесса вакуумной электронно-лучевой наплавки и термической обработки. На основе анализа микроструктуры и данных рентгеноструктурного исследования матрица в данных покрытиях представлена γ -фазой (аустенит), а упрочняющие частицы карбидами M_6C и VC . Однако детального анализа выделений частиц карбида ванадия в зависимости от типа аустенитной матрицы (никелевый и марганцовистый аустенит) в работе [1] не проведено. Вместе с тем дисперсность карбида и его объемная доля может существенно влиять на износостойкость [2].

Целью данной работы является изучение влияния термоциклирования при многопроходной электронно-лучевой наплавке и последующего старения на особенности выделения частиц карбида ванадия в матрице на основе никелевого или марганцовистого аустенита.

Материалы и методики проведения исследований

Для электронно-лучевой наплавки в вакууме (остаточное давление не выше 10^{-2} Па) использовались композиционные порошки на основе марганцовистого и никелевого аустенита. Для образца № 526 (вес. %): 20 Mn, 0,9 C, 4 Mo, 4 V, 15 WC, Fe – остальное; для образца № 527: 20 Ni, 4 Mo, 4 V, 15 WC, Fe – остальное. Композиционные порошки готовили путем смешивания порошков исходных компонентов, спекания, последующего дробления

полученных спеков и рассевом их на фракции по методике [3]. Для наплавки использовалась фракция дисперсностью 50...350 мкм. Наплавку проводили на плоские образцы размером 30×200 мм и толщиной 30 мм, изготовленные из стали 30. Число проходов электронного луча было равно четырем, что позволило сформировать покрытие общей толщиной ~ 3 мм. Мощность электронного луча была равна 4050...4300 Вт, диаметр электронного луча, длина развертки и скорость движения подложки составили 1 мм, 20 мм и 2,8 мм/с соответственно. После каждого прохода основной металл с наплавленным покрытием охлаждался до 200 °С со скоростью 20 °С/с.

Термическую обработку (старение) наплавленных образцов проводили при температуре $T_c=600\pm 10$ °С в течение 2 ч с последующим охлаждением на спокойном воздухе.

Структуру наплавленных покрытий (на продольных и поперечных микрошлифах) исследовали с помощью растрового электронного микроскопа (РЭМ) Philips SEM 515, снабженного микроанализатором EDAX ECON IV.

В настоящей работе способ приготовления микрошлифов традиционный – механическое шлифование и полирование на алмазных пастах различной дисперсности. Химическое травление производилось в 4%-м спиртовом растворе HNO_3 и смеси кислот HNO_3 (1 об. часть) и HCl (3 об. части). Определение количественных характеристик микроструктуры (количества, размеров, формы, распределения различных фаз) проводили линейным и точечным методами.

Исследование фазового состава образцов непосредственно после наплавки и после старения проводили методом рентгеноструктурного анализа на дифрактометре ДРОН-7 с фильтрованным $Co_{K\alpha}$ -излучением в режиме сканирования в интервале углов 2Θ от ~ 15 до 150°, с шагом 0,1°. При проведении качественного фазового анализа использовались хорошо известные картотеки.

Микротвердость (H_μ) покрытий и основного металла (подложки), непосредственно прилегающей к наплавке (2 мм), измеряли на приборе ПМТ-3 (ГОСТ 9450-76) с шагом по глубине 100 мкм при нагрузке 0,981 Н. Измерения производили в виде двух параллельных дорожек со смещением уколов индентора между дорожками 50 мкм. Расстояние между дорожками было

200 мкм. Это позволило построить график изменения микротвердости по толщине с шагом 50 мкм.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлена микроструктура покрытий образца № 526 в различных ее участках (в верхней части, середине и у подложки) непосредственно после наплавки и дополнительного старения

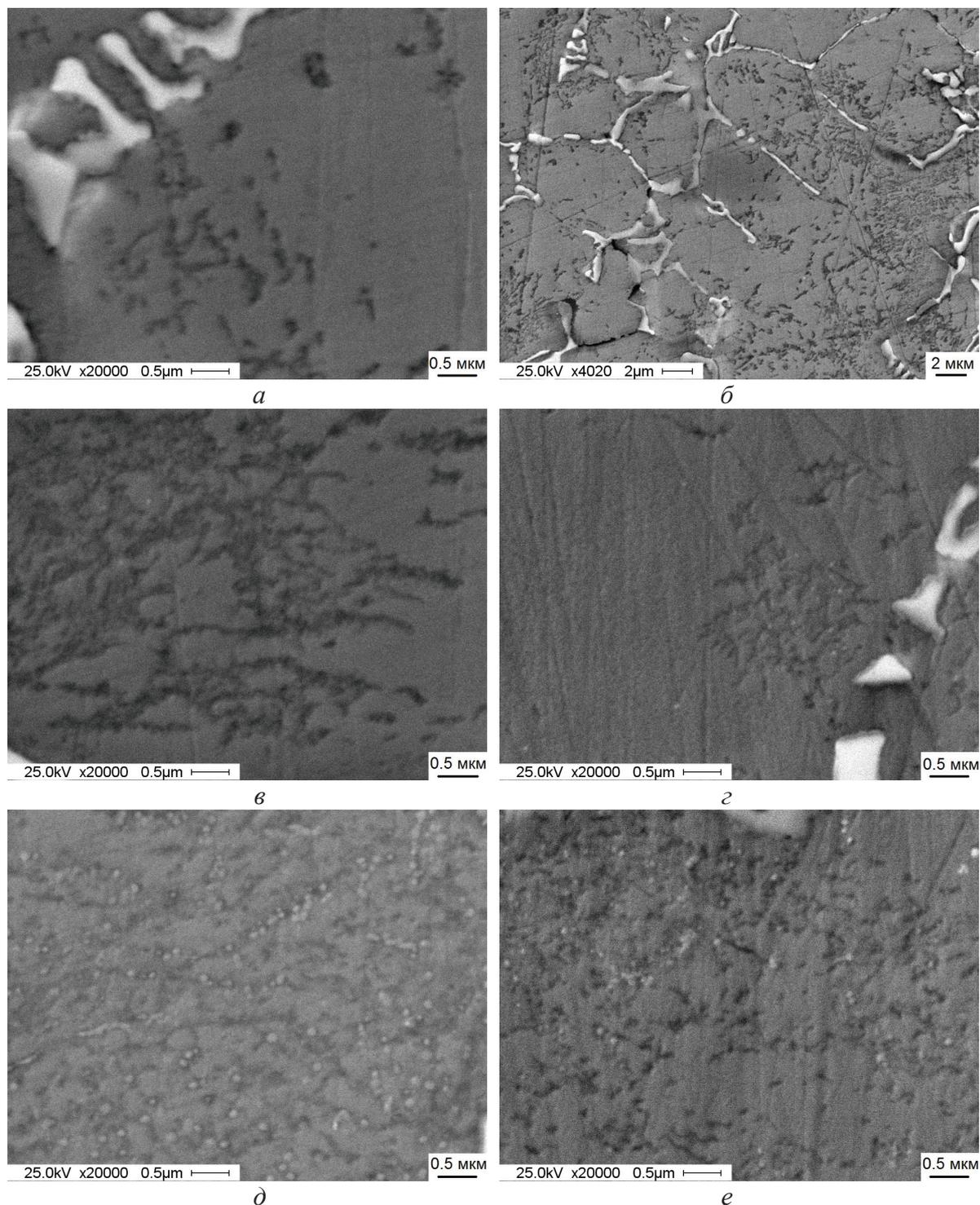


Рис. 1. Микроструктура покрытий образца № 526 после наплавки (а, в, д) и старения (б, г, е) при температуре 600 °С в течение 2 ч; а, б – верх, в, г – середина наплавки; д, е – у подложки

при температуре 600 °С в течение 2 ч. Анализ данной микроструктуры свидетельствует, что в объеме наплавленного металла первого и второго прохода (общая толщина ~ 1,5 мм) как непосредственно после наплавки, так и после дополнительного старения наряду с первичными эвтектическими и вторичными вытянутыми частицами карбида M_6C наблюдаются дисперсные округлые выделения частиц карбида VC (рис. 1, д, е). В середине наплавки данные частицы выявляются методом РЭМ только после старения (рис. 1, з), и их размер значительно меньше (в ~ 2 раза) по сравнению с частицами VC, расположенными в нижней части (рис. 1, д, е). В верхней части наплавки (объем наплавленного металла четвертого прохода) данные частицы методом РЭМ не выявляются (рис. 1, а, б).

На рис. 2 представлена гистограмма выделенных в объеме нижней части покрытия (у подложки (рис. 1, д)) частиц карбида ванадия по размерам. Видно, что их средний размер равен 94 ± 28 нм.

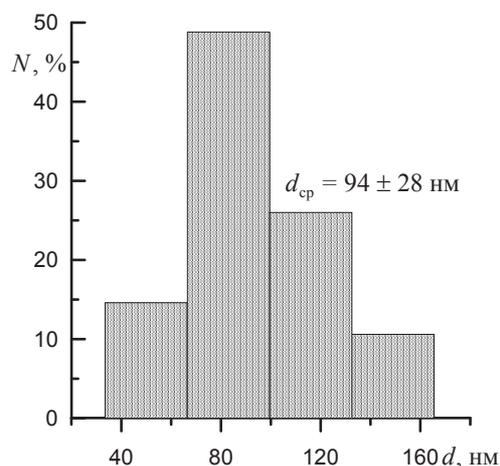


Рис. 2. Гистограмма размеров частиц VC в нижней части наплавки образца № 526 (рис. 1, д)

Анализ микроструктуры покрытий образца № 527 выявил наличие выкрашивания карбидных частиц и пористости (рис. 3). Карбидная сетка эвтектических карбидов M_6C более грубая по сравнению с покрытием образца № 526 (рис. 1, б). Наблюдаются отдельные крупные угловатые частицы карбидов. Карбидов ванадия нанодисперсного диапазона не наблюдается по всему объему покрытия как после наплавки (рис. 3, а, б), так и после дополнительной термической обработки (рис. 3, в, г). Однако число дисперсных карбидов (d_i) со средним размером ~ 0,8 мкм (рис. 4) после старения увеличивается в объеме упрочненного слоя с 1,0 до 2,6 %.

Отдельные крупные карбиды типа M_6C в процессе травления получают разную степень градации уровня серого: от светло-серого на внешней части частицы до темно-серого в ее центральной части. Микрорентгеноспектральный анализ элементного состава в этих областях (точки 1, 2 и 3 на рис. 3, д) свидетельствует о его различии, как показано в таблице.

Таблица. Результаты МРСА покрытия образца № 527 в различных областях (рис. 3, д)

| Анализируемая область | Химический состав в вес. % | | | | | | |
|--------------------------|----------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|
| | Mo | V | Cr | Mn | Ni | W | Fe |
| Точка 1 | 18,52 | 3,02 | 2,06 | — | 11,60 | 48,73 | 16,00 |
| Точка 2 | 18,72 | 2,84 | 2,44 | 0,85 | 12,16 | 45,75 | 17,25 |
| Точка 3 | 47,51 | 2,51 | 3,29 | 0,81 | 22,64 | 14,54 | 8,69 |
| Интегральная (рис. 3, б) | 5,68 | 4,19 | 2,22 | 0,93 | 24,97 | 7,26 | 54,75 |

В более светлых областях карбидной частицы (точки 1 и 2 на периферии) количество молибдена в два с лишним раза меньше, чем в ее центральной части, в то время как вольфрама в этих областях, наоборот, больше примерно втрое. Это говорит о том, что данные частицы карбида типа M_6C формировались как на этапе кристаллизации, так и на этапе термоциклирования в процессе многопроходной наплавки.

Таким образом, с учетом работ [1, 4], можно с уверенностью утверждать, что в процессе наплавки и последующего старения в покрытии № 526 наряду с карбидом типа M_6C трех типоразмеров ($d_1=0,3...2,0$ мкм, $d_2=2...4$ мкм и $d_3=4...7$ мкм), выделяются дисперсные частицы карбида ванадия четвертого диапазона (d_4) размером до 150 нм. Следовательно, формируется мультимодальное распределение карбидов по размерам в объеме матрицы, которое эффективно влияет на увеличение микротвердости. Так, H_v для покрытия № 526 увеличивается с $4,5 \pm 0,5$ до $5,9 \pm 0,4$ ГПа после старения, а для покрытия № 527 — с $3,7 \pm 0,6$ до $4,1 \pm 0,4$ ГПа.

Для композиционных покрытий на основе марганцовистого аустенита эффект упрочнения в процессе старения более значителен, чем у покрытий на основе никелевого аустенита, что связано, по-видимому, с низкой энергией дефекта упаковки марганцовистого аустенита, образованием при деформации дефектов упаковки, развитием процессов деформационного двойникования и мартенситного превращения [5]. В [4] исследовали структуру, механизмы выделения карбидов и механические свойства сталей на основе марганцовистого (сталь 45Г20М2Ф2) и никелевого (сталь 45Н26М2Ф2) аустенита. Авторами установлено, что для всех исследуемых сталей характерно гомогенное матричное выделение карбидов ванадия. Однако в марганцовистом аустените выделяются самые мелкие карбиды (3...6 нм) с плотностью распределения $(2...10) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. В никелевом аустените в единице объема данных карбидов на порядок меньше, а их средний размер в 1,5...2,0 раза больше. Это обуславливает самый высокий уровень упрочнения марганцовистого аустенита ($\sigma_{0,2}=1290$ МПа) после старения при 650 °С в течение 10 ч по сравнению с никелевым аустенитом ($\sigma_{0,2}=765$ МПа).

Увеличение размера частиц карбида ванадия в нижней части наплавки по сравнению с данными [4] обусловлены тем, что в процессе многопроходной наплавки ранее нанесенные слои подвергают-

ся термоциклированию. При этом абсолютная величина температуры в термоцикле значительно выше, чем 600 °С. Это вызывает наряду с выделением дисперсных карбидов и их коагуляцией. В верхних слоях наплавки число циклов нагрев-охлаждение уменьшается и, следовательно, процессы роста и коагуляции частиц карбида ванадия не фиксируются. Это подтверждается данными рабо-

ты [6], где изучали тонкую структуру теплостойкой стали 12Х1МФ после различного периода наработки при температуре эксплуатации ~ 570...600 °С. Авторы установили, что коагуляция карбидов ванадия начинает заметно проявляться только после 100 тыс. ч наработки. До этого момента наблюдается только процесс выделения дисперсных карбидов ванадия на дислокациях.

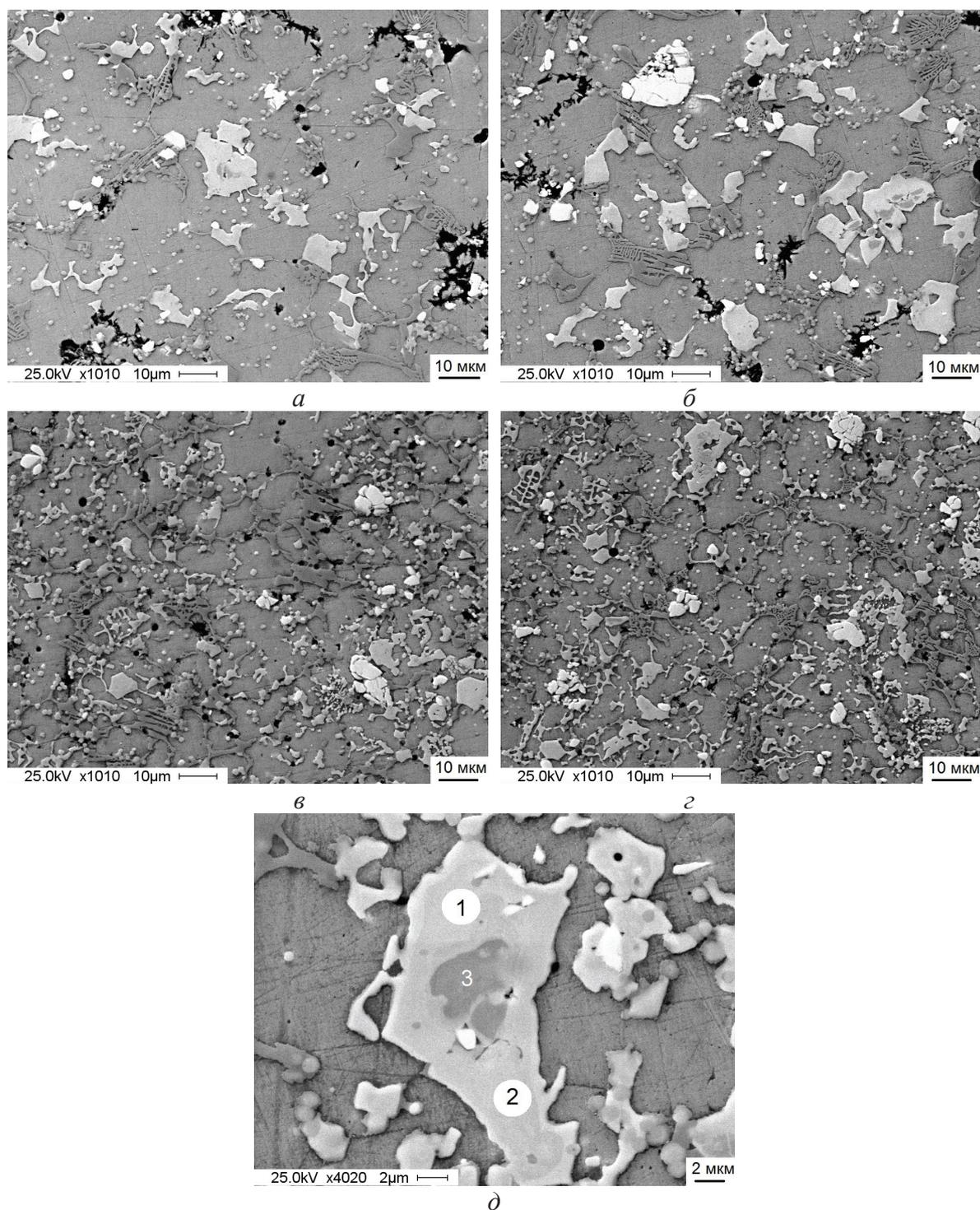


Рис. 3. Микроструктура покрытий образца № 527 после наплавки (а, б, д) и старения (в, г) при температуре 600 °С в течение 2 ч; а, в) середина наплавки; б, г) у подложки

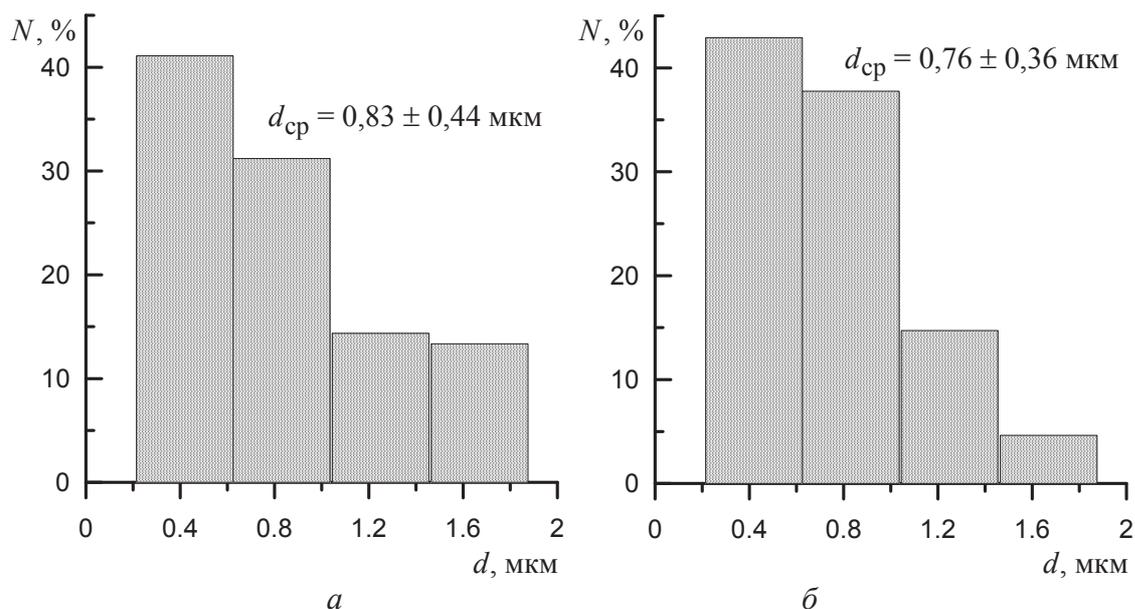


Рис. 4. Гистограмма размеров частиц VC в нижней части образца № 527 после наплавки (а) и дополнительного старения (б)

Выводы

При исследовании влияния термоциклирования при многопроходной электронно-лучевой наплавке и последующего старения композиционных покрытий установлено, что карбид ванадия в покрытиях представлен в виде отдельных равноосных частиц, средний размер которых в марганцовистой матрице равен 94 нм, а в никелевой порядка 0,8 мкм.

Показано, что частицы карбида после наплавки фиксируются в объеме упрочненного

слоя, непосредственно прилегающего к основному металлу (~1,5 мм). В процессе последующего старения при $600 \pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение 2 ч частицы карбида обнаруживаются и в объеме наплавленного металла при третьем проходе электронного луча. Однако их размер примерно в два раза меньше.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ ТПУ № 8.3664.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнусов С.Ф., Маков Д.А. Влияние режимов старения на эволюцию структурно-фазового состава и свойств композиционных покрытий // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 100–106.
2. Jia K., Fischer T.E. Abrasion resistance of nanostructured and conventional cemented carbides // Wear. – 1996. – V. 200. – P. 206–214.
3. Панин В.Е., Белюк С.И., Дураков В.Г., Прибытков Г.А., Ремпе Н.Г. Электронно-лучевая наплавка в вакууме: оборудование, технология, свойства покрытий // Сварочное производство. – 2000. – № 2. – С. 34–38.
4. Косицина И.И., Сагарадзе В.В. Аустенитные стали разных систем легирования с карбидным упрочнением // Металлы. – 2001. – № 6. – С. 65–74.
5. Кульков С.Н., Гнусов С.Ф. Карбидостали на основе карбидов титана и вольфрама. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 240 с.
6. Смирнов А.Н., Козлов Э.В. Субструктура, внутренние поля напряжений и проблема разрушения паропроводов из стали 12Х1МФ. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 163 с.

Поступила 26.09.2012 г.

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НИКЕЛИДЕ ТИТАНА ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА

А.И. Потекаев*, В.А. Хохлов, С.В. Галсанов, А.Н. Табаченко*, И.А. Шулепов**

Томский государственный университет

*Сибирский физико-технический институт им. акад. В.Д. Кузнецова, г. Томск

**Томский политехнический университет

E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Проведен анализ условий формирования фронтальных пластических волн и образования дорожек трения при скольжении сферического индентора по пластическому полупространству из никелида титана. Установлен пульсирующий скачкообразный характер движения индентора и изменения вида дорожек трения при различных температурно-скоростных режимах.

Ключевые слова:

Никелид титана, пластическое течение и волны, структура, твердость, скольжение, трение, сферическое контртело.

Key words:

Titanium nickelide, plastic current and waves, structure, hardness, sliding, friction, spherical counterbody.

Введение

Особенностями никелида титана TiNi является его способность изменять фазовый состав и, соответственно, свойства при термических воздействиях и в силовых полях [1–6]. Так, при понижении температуры T исходная аустенитная (А) фаза переходит в более пластичную мартенситную (М) фазу. Возврат температуры к исходной сопровождается обратным превращением мартенсита в аустенит. Подобное превращение может произойти также под действием напряжений σ и деформаций ε , при котором фаза А переходит в мартенсит деформации (M_d) с теми же его свойствами, что и в термическом мартенсите. Снятие внешней нагрузки приводит к обратному $M_d \rightarrow A$ превращению. Реакция $A \rightarrow M_d$ происходит при температурах до 60...80 °С. Выше этих температур мартенсит деформации не образуется.

Таким образом, TiNi, как и другие материалы с памятью формы (ПФ), относятся к классу сложных материалов, свойства которых, а также количественные соотношения фаз переменны и зависят от температуры и напряженно-деформированного состояния. Возникновение твердофазных реакций типа $A \leftrightarrow M$ и $A \leftrightarrow M_d$ превращений является первопричиной ряда аномалий в свойствах этих материалов, в частности механических, таких как снижение сопротивления деформациям, увеличение внутреннего трения, пластичности, особое поведение материалов с ПФ в условиях трения и износа. Так, в [7, 8] была установлена аномально высокая износостойкость TiNi, выявлены механизмы износа и установлена их природа. Однако для установления полной физической картины необходимо изучение предистории их проявления, вопросов протекания пластических деформаций в поверхностных слоях при трении, структурно-фазового состояния последних, формирования дорожек трения и возможных способов удаления материала.

Разрешение данных вопросов, призванных углубить и расширить понимание механизмов износа, составило цель данной работы.

Формирование пластической волны

Вначале рассмотрим задачу скольжения с трением сферического штампа (индентора) по пластическому материалу в феноменологическом приближении. Подобная пара трения общепринята в механике контактного взаимодействия, в которой как дискретные, так и единичные микронеровности моделируются набором сферических сегментов радиусами R_1 и R_2 . По аналогии примем одну из контактирующих поверхностей как жесткое тело с $R_1=R$, а другую – как пластичное с $R_2=\infty$, что приводит к задаче о скольжении сферического штампа по упруго-пластическому полупространству.

На первой стадии контактного взаимодействия приложение только нормальной нагрузки P_y вызывает внедрение сферического индентора (СИ) на глубину h (рис. 1, а). Материал при этом сжимается и частично удаляется в навалы, образуя основу будущей волны. На рисунке показано поле напряжений в области контакта, возникающих при вдавлении СИ [9]. Первичный проход индентора по упруго-пластическому полупространству под действием сил $P_y = \text{const}$ и монотонно возрастающей сдвигающей P_z (рис. 1, б) сопровождается образованием дорожки трения (трека). Приложение силы P_z разгружает СИ (на рисунке левую сторону), причем дальнейшая деформация материала реализуется за счет смещения сферического индентора (на рисунке вправо). Так как силы трения, действующие на границе контакта, удерживают СИ от проскальзывания, то индентор движет перед собой нарастающую пластическую волну.

Дорожка формируется за счет выдавливания материала на боковые поверхности трека, образования перед индентором пластической волны и – в меньшей степени – за счет адгезионного вырывания. Из-за образования больших отрицательных «передних» углов и $h \ll R$ микрорезание отсутствует.

Силы, ответственные за фронтальный и боковой сдвиги, различны в разных точках контакта (показаны на рис. 2). Величины P_z , P_b – сжимаю-

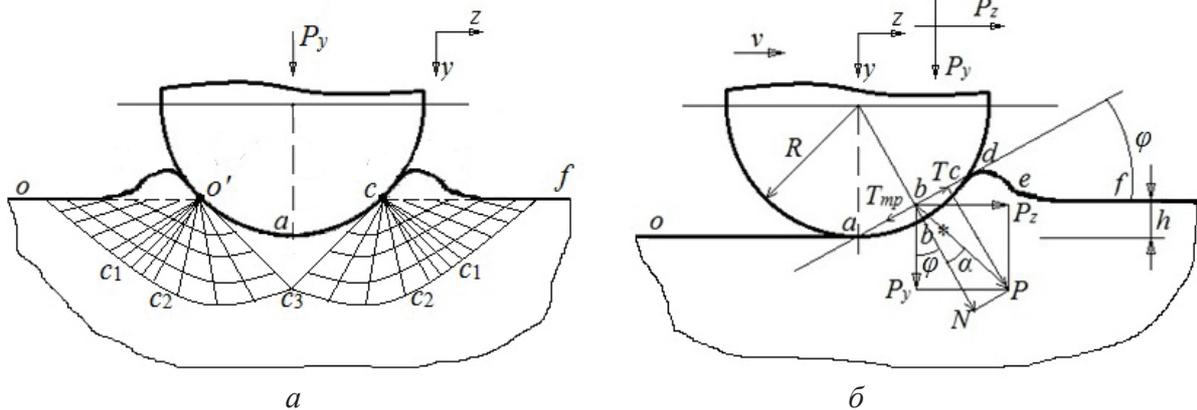


Рис. 1. Перемещение индентора и силовые схемы: а) вертикальное перемещение и поле линий скольжений; б) тангенциальное смещение

шая и боковая силы; B – произвольная лежащая на одном из горизонтальных уровней точка (линия 2) площадки контакта; линии 1 и 3 – контуры дна трека и его верхней границы. Как видно из схемы, P_z и P_b изменяются в зависимости от β : от $P_z = P_{zmax}$ и $P_b = 0$ при $\beta = 0^\circ$ до $P_z = 0$ и $P_b = P_{bmax}$ при $\beta = 90^\circ$. При этом только часть выдавленного из трека материала движется перед индентором.

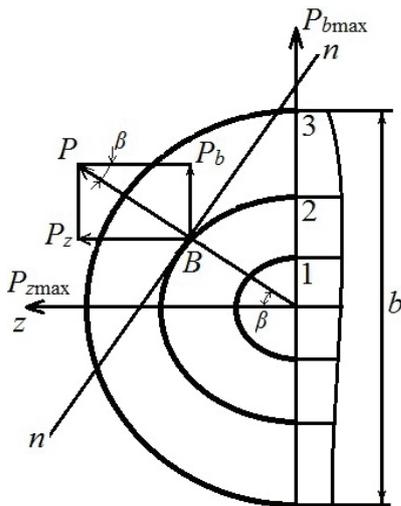


Рис. 2. Вид трека в плане

Рассмотрим процесс формирования дорожки трения и движения материала вдоль оси z . На рис. 1, б приведена схема его перемещения индентором. На рисунке $ab*c$ – граница контакта СИ с полупространством, cde – пластическая волна. Для удобства и упрощения анализа процесса перехода от состояния покоя индентора к скольжению заменим криволинейную границу $ab*c$ на прямую abc . Такая замена допускает незначительную ошибку в расчетах, т. к. $h \ll R$. Так, например, в наших экспериментах при $R = 1,5$ мм и $P_y = 2$ Н глубина трека $h = 0,007 \dots 0,008$ мм, т. е. h и R отличаются друг от друга более чем на два порядка.

Проанализируем силовую часть схемы. Ввиду малости abc положим в первом приближении, что

центр действующих на линии касания сил расположен в точке b . Тогда в этой точке действуют: сжимающая (нормальная к oa) сила P_y , сдвигающая P_z , сила сопротивления скольжению – сила трения $T_{тр}$, преодолевающая ее касательная T и нормальная к abc сила N , равнодействующая к P_z , P_y и T , N сила P . Силы трения и нормальная связаны между собой известным соотношением $T_{тр} = Nf$, f – адгезивно-деформационный коэффициент трения.

Если $T < T_{тр}$, то на площадке abc существует только микроскольжение, а общее скольжение отсутствует. Движение индентора вызывает образование пластической волны, увеличение ее объема, силы сопротивления $T_{тр}$ и, соответственно, коэффициента трения. Для преодоления $T_{тр}$ необходимо увеличение P_z . При этом будут возрастать T , N и α . Скольжение СИ по волне начнется при $N = P$ и $\text{tg} \alpha = \text{tg} \varphi$ [10], где φ – угол трения (угол между линиями abc и oa), $\text{tg} \varphi = f$. В результате этого индентор перескакивает через вершину d волны, занимая новое устойчивое, энергетически более выгодное положение с образованием под действием P_y исходной лунки, как и в первом случае. На профилограмме (рис. 3, б) показаны этапы движения СИ от исходного состояния (точка 1), образования трека (1–2) с перемещением пластической волны (2–3), перескоком через вершину 3 в новое положение (3–4). Далее процесс повторяется – образуется новая увеличивающаяся в размерах волна (5–6) перескок через вершину (7) и т. д. Причем этот процесс формирования волн повторяется многократно при однократном циклическом движении СИ под нагрузками.

Факт подобного образования и развития пластической волны экспериментально подтвержден нами на TiNi [11], а также в работе Челлена и Оксли [12] в опытах с индентором в виде клина и пластичными металлами. Они назвали схему деформирования, аналогичную описанной выше, модой растирания (размазывания), поскольку материал растекается вдоль поверхности основы без отделения от нее. Вариант, когда вытесненный материал скользит вдоль основания с отделением частиц

в результате многократных проходов индентора и усталости металла (как было показано в [8]), они назвали модой износа. В нашем случае прослеживается аналогия образования валика клином [11] и сферой при $h \ll R$ (рис. 1).

Экспериментальные исследования

Рассмотренные выше условия формирования пластической волны, скачкообразное движение индентора и пульсирующий вид дорожек трения подтвердились экспериментально на никелиде титана. Были испытаны сплавы двух составов, отличающиеся между собой пределами прочности σ_B и характеристическими температурами начала образования температурного мартенсита M_H : сплав № 1 $Ti_{49,2}Ni_{50,8}$ с $\sigma_{B \min}=650$ МПа, $\sigma_{B \max}=1200$ МПа, $M_H=-20$ °С и сплав № 2 $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ с $\sigma_{B \min}=1000$ МПа, $\sigma_{B \max}=1500$ МПа, $M_H=-80$ °С. Следует отметить, что в полях напряжений и деформаций температуры M_H повышаются.

Работа выполнялась на шариковом трибометре «CSEM instruments» с корундовым сферическим

индентором диаметром 3 мм и 3D-профилографе «Still». Задавались нагрузка $P_z=2$ Н и скорости $v=0,09...0,15$ м/с. Опыты проводились при температурах 20 и 400 °С.

На рис. 3, а, б видно периодическое, пульсирующее изменение размеров и формы треков: наблюдается фронтальное пластическое оттеснение материала с нарастанием его объема, сопровождающееся ростом силы сопротивления скольжению СИ, перескоком в новое положение и последующим повторением процесса. Это согласуется с изложенными представлениями. Коэффициент трения равен 0,45. Понижение скорости движения индентора приводит к снижению температуры на контакте, увеличению сопротивления материала движению индентора, коэффициента трения и, следовательно, к увеличению частоты и уменьшению шага пульсаций (рис. 4). Коэффициент трения при этом составлял 0,55.

Процесс формирования треков у сплава № 1 несколько иной. Хотя на профилограмме проглядываются следы скачкообразных переходов инден-

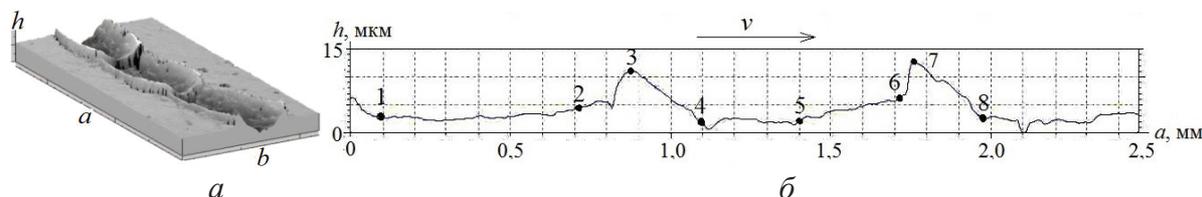


Рис. 3. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). $Ti_{49,2}Ni_{50,8}$, $h=19$ мкм, $a=2,47$ мм, $b=1,17$ мм. $P=2$ Н, $v=0,157$ м/с

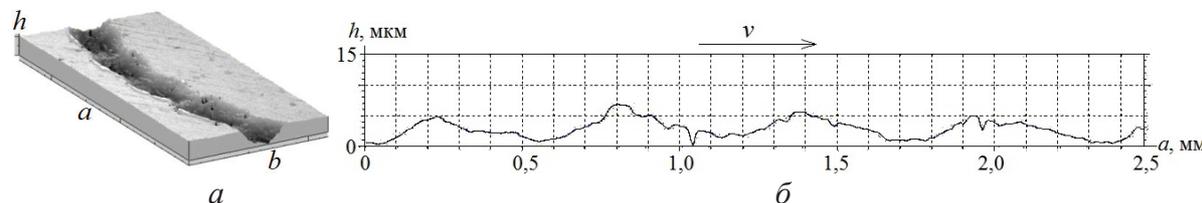


Рис. 4. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). $Ti_{49,2}Ni_{50,8}$, $h=11,8$ мкм, $a=2,47$ мм, $b=1,17$ мм. $P=2$ Н, $v=0,09$ м/с

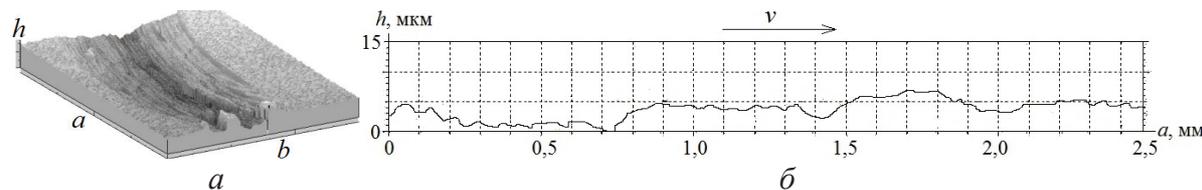


Рис. 5. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). TN-1К, $h=17,9$ мкм, $a=2,49$ мм, $b=1,5$ мм. $P=2$ Н, $v=0,157$ м/с

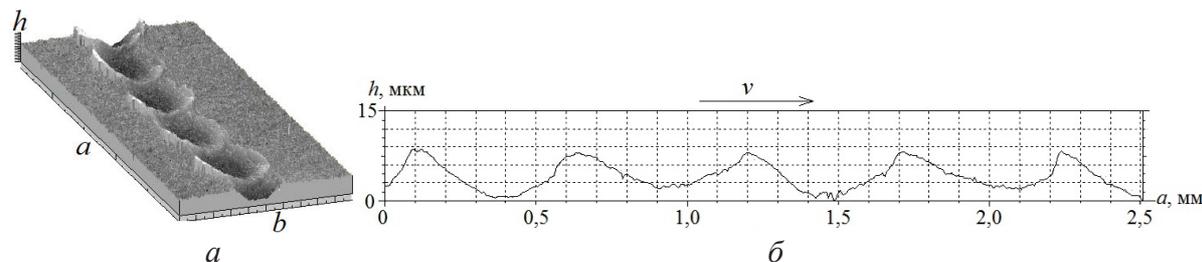


Рис. 6. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). TN-1К, $h=9,92$ мкм, $a=2,5$ мм, $b=1$ мм. $P=2$ Н, $v=0,157$ м/с. $T=400$ °С

тора (рис. 5, б), но обнаружить их на изображении поверхности трения (рис. 5, а) сложно.

Иначе выглядит картина формирования треков на сплаве № 1, нагретом до 400 °С вблизи температур гомогенизирующего отжига. Процесс идет в полном соответствии с теоретическими представлениями (рис. 6). Наблюдаются пульсационные скачкообразные следы движения индентора, пластические волны и боковые навалы. Коэффициенты трения в опытах при комнатных температурах равны 0,38, а при повышенных $f=0,45$.

Таким образом, экспериментально получено следующее:

- Вид поверхности трения аналогичен описанной выше схеме. Наблюдается образование валика, волны, перескок (СИ) в новое положение и последующее повторение цикла.
- С увеличением температуры опыта податливость TiNi уменьшается, шаг перескока увеличивается, что является следствием реализации неравенства $T \geq T_p$ на большей длине прохода и уменьшения f .
- Повышение скорости движения СИ равносильно повышению общей температуры пары трения. Как было показано ранее [8], при относительно высоких скоростях скольжения контртела по никелиду титана локальные вспышки температур существенно изменяют процесс трения и триботехнические характеристики материала. В нашем случае увеличение v приводит

к уменьшению f , шага перескоков и увеличению его частоты.

- Форма волны – дугообразная, приблизительно одинакового поперечного сечения.
- В отдельных местах поверхности скольжения отслеживаются следы адгезионного вырывания металла (рис. 3, а, б), и, судя по их масштабам, оно является вторичным механизмом износа.
- Интенсивность адгезионного вырывания с повышением скорости и температуры остается практически неизменной.

Таким образом, результаты опытов, проведенных на TiNi, показали полное соответствие с рассмотренной выше теорией формирования фронтальных пластических волн. Положения ее могут быть применимы к любым пластическим материалам. Например, опыты со скольжением СИ по меди показали качественно аналогичные результаты. На рис. 7 и 8 приведены виды дорожек трения и их продольные профилограммы для $T=20$ °С (рис. 7) и $T=300$ °С (рис. 8) температур, полученных на меди МО с $\sigma_b=190...215$ МПа и $\sigma_t=60...75$ МПа. Из рисунков следует, что размеры треков по глубине и высота гребней волн выше, чем у никелида титана. Частота тем ниже и шаг пульсаций тем выше, чем выше температура. Уровень адгезионного взаимодействия такой же, как у TiNi, коэффициент трения $f=0,43$. Но с повышением температуры на меди усиливаются процессы схватывания, что приводит к росту коэффициента трения до 0,62.

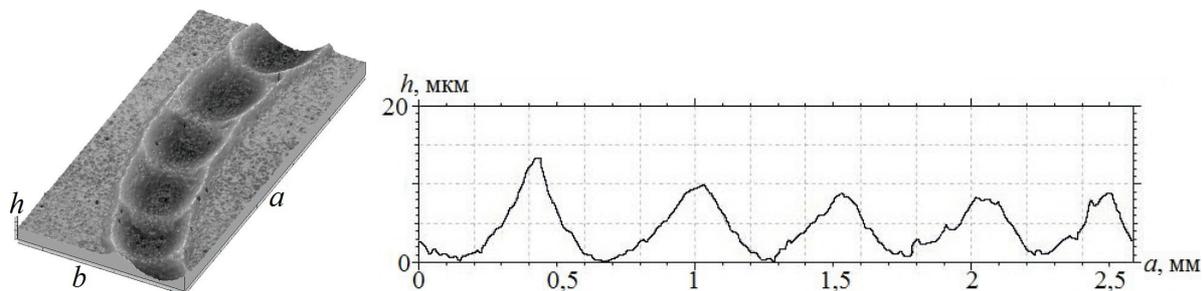


Рис. 7. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). Cu, $h=26$ мкм, $a=2,49$ мм, $b=1,18$ мм. $P=2$ Н, $v=0,157$ м/с, $T=20$ °С

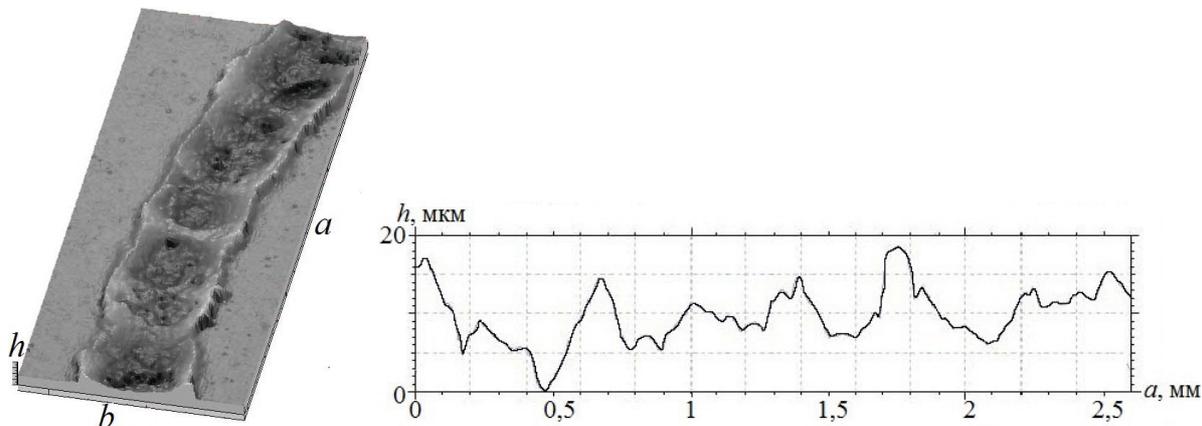


Рис. 8. Вид поверхности трения (а) и ее продольная профилограмма (б). Cu, $h=41,1$ мкм, $a=2,96$ мм, $b=1,16$ мм. $P=2$ Н, $v=0,09$ м/с, $T=300$ °С

Обсуждение результатов

Выше произведено сравнение по внешним признакам: виду, форме, размерам треков и коэффициентам трения. Существенные же отличия формирования волн в никелиде титана от подобного процесса традиционных материалов кроются во внутренних факторах – структурно-фазовом состоянии (СФС) в приповерхностных слоях и в самой пластической волне. На рис. 1, а показано поле линий напряжений под индентором при его внедрении без скольжения. Здесь возникает равномерное напряженное состояние со сжимающими напряжениями и прямолинейным полем линий скольжения. В области под границей контакта (cc_1c_2 и oc_1c_2) – центрированное поле линий с центрами в точках o и c и остальное поле с линиями скольжения, имеющими переменную кривизну. Как показано в [9], действие сдвигающей силы не изменяет характер полей линий скольжения с той лишь разницей, что сторона материала слева от индентора становится свободной от напряжений.

В материалах с пластичностью, определяемой дислокационными механизмами, скольжение сопровождается пластическими деформациями с деформационным упрочнением в волне и в поверхностном слое, следы которого сохраняются и обнаруживаются на поверхности треков по твердости. Поскольку температуры в контакте при трении ниже точек фазовых превращений, фазовый состав и свойства остаются неизменными. Изменяется только структура за счет текстурирования и измельчения зерен.

В TiNi при действии сил P_x и P_y на умеренных скоростных режимах и в широком диапазоне давлений ($P_y=5...30$ Н) в подповерхностных слоях и в теле «волны» возникает сложный структурный и фазовый состав, состоящий из мартенсита M_d вблизи границы контакта, совокупности M_d и А на глубине материала и в самой «волне», а также тонкого белого слоя толщиной 10...25 мкм на границе $ab*cde$, где возникает большое гидростатическое

давление. Причем эти состояния качественно сохраняются после прохождения индентора и упругого восстановления после разгрузки материала с левой от СИ стороны (аналогично СФС в полях остаточных деформаций, отмеченных в [13]). Локальное повышение температур при трении мало и не влияет на СФС [8].

Несколько иное СФС должно возникать при внешнем термическом воздействии при повышении температуры выше температур начала мартенситного превращения T_{M_d} . Условие $T > T_{M_d}$ исключает возникновение мартенситной фазы, и процесс скольжения идет по TiNi в аустенитном состоянии. Однако это состояние можно назвать квазиаустенитным, поскольку так же как и при исходных ($T=20$ °С) температурах, происходит образование белого слоя, состоящего из целого набора фаз и представляющего сложную гетерогенную высокодисперсную (наноразмерную) систему. Она обладает, как показывают опыты, свойствами белого слоя, возникающего при исходных температурах трения, и, соответственно, повышенной циклической прочностью и долговечностью.

Заключение

На основе анализа силовой схемы скольжения с трением сферического индентора установлено, что образованная им фронтальная пластическая волна, монотонно увеличиваясь в объеме, повышает силу сопротивления скольжению и, следовательно, коэффициент трения. При значениях сдвигающих сил, превышающих силы трения, происходит перескок индентора через вершину волны в новое устойчивое положение. Этот процесс циклически повторяется, а на дорожках трения наблюдаются периодически повторяющиеся пульсации глубины треков и самих волн, размеры которых определяются давлением, скоростью и температурой. Показано хорошее совпадение экспериментальных результатов и представлений о формировании пластических волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клопотов А.А., Потекаев А.И., Кулагина В.В., Гонтер В.Э. Влияние дефектов структуры на структурно-фазовые превращения в слабоустойчивых состояниях функциональных материалов // Известия вузов. Черная металлургия. – 2010. – № 10. – С. 61–67.
2. Клопотов А.А., Потекаев А.И., Гонтер В.Э. и др. Влияние фазового наклепа на предмартенситные состояния и на мартенситные превращения в многокомпонентных сплавах Ti (Ni, Co, Mo) с эффектами памяти формы // Материаловедение. – 2010. – № 12. – С. 37–44.
3. Макаров С.В., Плотников В.А., Потекаев А.И. Слабоустойчивые состояния кристаллической решетки алюминия при высокотемпературной деформации и акустическая эмиссия // Известия вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 3. – С. 47–55.
4. Клопотов А.А., Потекаев А.И., Гонтер В.Э. и др. Асимметрия температурных зависимостей электросопротивления при мартенситных превращениях B2-B19' и B12-R-B19' в сплавах на основе TiNi // Известия вузов. Физика. – 2011. – № 5. – С. 50–56.
5. Клопотов А.А., Потекаев А.И., Кулагина В.В. и др. Влияние деформации на температурные области мартенситных превращений в сплавах на основе TiNi // Деформация и разрушение материалов. – 2011. – № 11. – С. 40–43.
6. Гонтер В.Э., Дамбаев Г.Ц., Сысолятин П.Г. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. – 486 с.
7. Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В. Природа и механизмы абразивного изнашивания материалов с памятью формы на примере никелида титана // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 108–112.
8. Хохлов В.А., Потекаев А.И., Галсанов С.В. Исследование триботехнических свойств никелида титана // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 112–116.

9. Михин Н.М. Внешние трение твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
10. Маслов Е.Н. Теория шлифования материалов. – М.: Машиностроение, 1974. – 320 с.
11. Хохлов В.А., Потехаев А.И., Галсанов С.В. Исследование поверхностей трения материалов с памятью формы на основе никелида титана // Технические науки: Труды I Междунар. научно-техн. конф. – Йошкар-Ола, 2012. – С. 83–85.
12. Chalen Y.H., Oxley P.L.B. Different regimes of friction and wear using asperity deformation models // Wear. – 1979. – V. 53. – P. 229–235.
13. Потехаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В. Структурно-фазовые состояния и свойства никелида титана при глубоком неоднородном пластическом деформировании // Известия вузов. Черная металлургия. – 2012. – № 3. – С. 61–63.

Поступила 28.09.2012 г.

УДК 669.295:539.62

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НИКЕЛИДА ТИТАНА, ИНИЦИИРОВАННЫХ ВЫСОКИМ ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ

В.А. Хохлов, А.И. Потехаев*, С.В. Галсанов

Томский государственный университет

*Сибирский физико-технический институт им. акад. В.Д. Кузнецова, г. Томск

E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Показаны условия возникновения гидростатического ядра давления при внедрении сферического индентора в пластические среды. Выявлено влияние гидростатики на структурно-фазовые состояния и прочностные свойства никелида титана.

Ключевые слова:

Память формы, никелид титана, пластическое течение, гидростатическое ядро.

Key words:

Shape memory, titanium nickelide, plastic current, hydrostatic kernel.

Введение

Никелид титана (TiNi) относится к классу материалов с памятью формы (ПФ), в которых в полях напряжений и деформаций инициируются фазовые превращения: исходная прочная пластичная аустенитная фаза А переходит частично или полностью в новую менее прочную пластичную мартенситную фазу М_д. Реализуется прямое А–М_д мартенситное превращение. При снятии нагрузки происходит обратное мартенситное превращение. Происходит полное или частичное обратное мартенситное превращение. Количество «недовозвращенного» мартенсита зависит от уровня внешней нагрузки, степени деформации, вида напряженно-деформированного состояния (НДС), состава сплава, внешней среды, условий нагружения и т. п.

В последнее время получены достаточно обширные результаты по структурно-фазовому состоянию (СФС) в условиях линейного и простейших плоских НДС [1, 2]. Показано, что А↔М_д переходы вызываются сдвиговой компонентой тензора напряжений и сдвиговыми деформациями. Но остается открытым вопрос о влиянии всестороннего равномерного сжатия (гидростатического давления) на СФС и свойства сформированной структуры, что, по-видимому, является следствием сложности технической реализации, контроля и исследования этого состояния.

Вместе с тем несомненна важность таких исследований как с фундаментальной точки зрения, так и в прикладном плане – например, в целях создания наноструктурированного состояния поверхностных слоев с особыми свойствами в задачах контактной механики, трения и поверхностного разрушения тел из материалов с ПФ.

В настоящей работе исследуется структурно-фазовое состояние и свойства никелида титана в условиях больших гидростатических давлений, создаваемых в поверхностном контактном слое при внедрении сферического штампа (индентора) в упруго-пластическое полупространство из никелида титана. Рассмотрим условия его образования с позиций контактной механики.

НДС при вдавливании сферического штампа в упруго-пластические среды

При вдавливании шарового индентора в упруго-пластическое полупространство образуется круговая площадка радиусом a , возрастающая с увеличением нагрузки P . В пределах упругости задача о размерах площадок контакта, распределения давлений и напряжений решена Герцем, Губером и др. [2]. Основные зависимости задачи Герца приведены ниже:

$$p = \frac{P_m}{a^2} (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

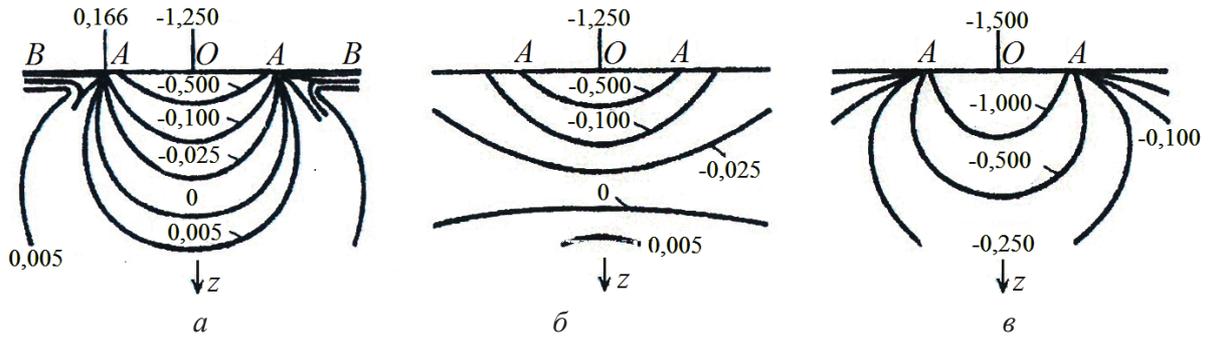


Рис. 1. Линии равных напряжений в плоскости осевого сечения: а) σ_1 , б) σ_2 , в) σ_3

$$a = (3PR / 4E)^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

$$p_0 = aE / R, \quad (3)$$

$$p_m = 3P / 2\pi a^2,$$

где p , p_0 , p_m – текущее, максимальное и среднее давления на площадке контакта; $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$ – приведенный радиус, R_1 и R_2 – радиусы кривизны индентора и TiNi, $E=E_1E_2/(E_1+E_2)$ – приведенный модуль упругости, E_1 и E_2 – модули упругости индентора и TiNi.

Из этих уравнений следует, что давление p на площадке контакта распределяется по параболическому (1) закону, имеет максимальное значение в центре и нулевое (3) на периферии.

Теория Герца позволяет рассматривать одно из контактирующих тел как упругое полупространство. Приняв в уравнениях (1–3) $R_1=\infty$ при $a \ll R_1$, приходим к задаче о внедрении жесткого сферического штампа (индентора) в упруго-пластическое полупространство. Для подобной задачи существует обширная экспериментально-теоретическая база, которая может быть использована с некоторыми интерпретациями и для материалов с термоупругими мартенситными превращениями.

Главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 являются радиальные σ_r , окружные σ_θ и осевые σ_z соответственно. Распределение их по глубине в плоскости осевого сечения показано на рис. 1 [3]. Цифры обозначают напряжения в долях p_0 . Здесь BB – поверхность полупространства; AOA – исходная состояние поверхности; AA – поверхность вдавливания.

Распределение максимальных касательных напряжений τ_m вдоль оси z в глубину материала показано на рис. 2, а, а на рис. 2, б – изолинии τ_m в плоскости осевого сечения. Здесь τ_m вычислялась как полуразность наибольших и наименьших главных напряжений. Из рис. 2, а видно, что наибольшее τ_m достигает максимума на глубине $z=0,48a$ и равно $\tau_m=0,465q_a$ [2].

Под площадкой контакта главные напряжения – сжимающие и близки между собой по величине. Поэтому в этой области возникают большие гидростатические давления. Вне зоны контакта вблизи поверхности напряженное состояние соответствует чистому сдвигу, поскольку здесь $\sigma_z=0$, а $\sigma_\theta=\sigma_r$.

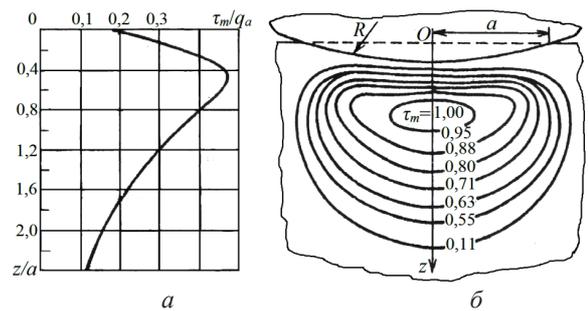


Рис. 2. Изменение максимальных касательных напряжений: а) зависимости напряжений от z ; б) линии равных касательных напряжений

Увеличение сжимающей нагрузки P приводит к развитию пластической деформации в подповерхностных слоях. Причем пластическое течение начинается с точки $\tau_m=\sigma_T/2=(\sigma_r-\sigma_z)/2$ (по критерию Треска), т. е. в точке с наибольшими значениями τ .

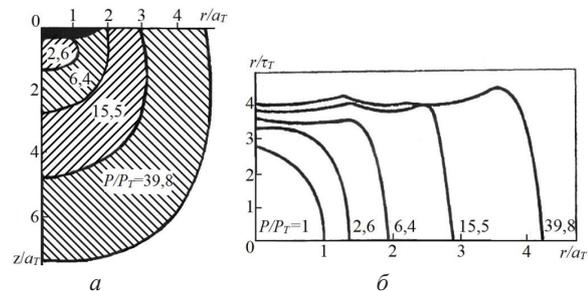


Рис. 3. Пластическая деформация под индентором: а) распределение контактного давления p ; б) развитие пластической зоны τ_m/q_a

Распространение пластической зоны показано на рис. 3 [3]. Здесь P_T , τ_T , a_T – нагрузка, приводящая к течению материала, соответствующие ей напряжение и радиус площадки контакта при $P/P_T=1$.

Из рис. 3, а видно, что пластическое течение приводит к выполаживанию распределения давлений p . Каждая линия соответствует значениям P/P_T . Линия $P/P_T=1$ – начало пластического течения. Распределение пластических зон для различных P/P_T показано на рис. 3, б.

Изучение развития пластической деформации позволило выявить ряд особенностей деформирования, установленных в [4, 5] и подтвержденных нами на TiNi экспериментально в [6, 7]. Суть их заключается в следующем:

- контуры пластической зоны приблизительно совпадают с линиями максимальных касательных напряжений (рис. 2);
- экспериментально установлено, что такое сходство возможно, если между индентором и пластически деформируемым полупространством имеется тонкое упругое включение в виде слоя;
- в центре контактной зоны существует тонкий поверхностный слой упругой деформации, окруженный пластическим материалом, который может сохраняться при снятии нагрузок;
- смещения под поверхностью имеют радиальную симметрию относительно точки O , а поверхности равных деформаций имеют примерную полусферическую форму.



Рис. 4. Модель упруго-пластического внедрения индентора

В рамках этих предположений создана модель, в которой поверхность контакта охватывается полусферическим «ядром» радиуса a , внутри которого развиваются гидростатические напряжения интенсивностью \bar{p}_i (рис. 4). Считается, что с наружной поверхности ядра напряжения и перемещения совпадают с такими же параметрами в неограниченном идеальном упруго-пластическом теле, в поле которых действует давление \bar{p}_i . Качественно аналогичная схема должна сохраняться и при снятии нагрузки, после упруго формовосстановления.

Разработанная модель пластического течения с гидростатическим ядром отслеживает всю деформированную область: с гидростатическим сжатием, пластическим деформированием, исходную область с упругой предысторией. Границы между областями теоретически четкие, а реально должны быть несколько размытые, что, однако, не мешает анализировать упруго-пластическую деформацию негерцевского контакта.

В нашем случае интерес представляет деформированная область с гидростатическим ядром и для сравнительного анализа – прилегающая к ней зона – область с исходным аустенитом.

Материалы и оборудование

Для исследования свойств по глубине зоны с остаточными деформациями использовался раз-

работанный авторами метод разрезных образцов, который заключался в следующем: образец цилиндрической формы разрезался вдоль оси z на две равные части, затем производилась полировка разрезанных поверхностей образца таким образом, чтобы после соединения обеих половинок в жесткой обойме между ними не было бы зазора.

Структурно-фазовое состояние и прочностные свойства изучались с использованием нанотвердомера «CSEM instruments». Исследовались микрообласти во всем деформированном пространстве: вдоль центральной оси z осесимметричного образца из никелида титана, а также вдоль других осей параллельных z и удаленных от нее на расстояниях $h=1,5;3;6$ мм. Анализ структуры и твердости проводился в зонах, удаленных от точки начального контакта сферы с плоскостью на $z=1,1...13,5$ мм.

В качестве индентора использовался закаленный шар диаметром 20 мм (сталь ШХ-15), испытываемый материал – сплав ТН-1К ($Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$). Образцы отжигались при температуре 800 °С. Характеристическая температура начала фазовых превращений $T_H=-80$ °С, пределы прочности – $\sigma_{bmin}=1000$ МПа, $\sigma_{bmax}=1500$ МПа. Нагрузка на индентор $P=50$ и 100 кН (давление $p_0=1300$ МПа). Внедрение индентора проводилось на машине ЦДМУ.

Результаты исследований

Показано, что в результате нагружения в материале образца образуются три зоны: область с белым слоем, с мартенситом деформации M_d и со смешанным А– M_d состоянием. Причем четкая граница между этими областями отсутствует – происходит плавный переход от одной области к другой.

Рассмотрим состояние и свойства первой зоны – белого слоя. Белые слои получались при трении и на классических материалах при тяжелых режимах работы [8], и на никелиде титана [9, 10]. В работе [11] показано, что при скольжении тел по идеально-пластическому полупространству средние нормальные напряжения на контакте равны напряжениям при внедрении без скольжения. Таким образом, образующиеся во время трения белые слои являются следствием начального внедрения и последующего давления при скольжении контртела и в меньшей степени – сдвиговыми напряжениями в тонком поверхностном слое.

Внешние характеристики этого слоя – плохая травимость в обычных реактивах и повышенная твердость. На рис. 5 показано изменение нанотвердости по глубине h от дна дорожек трения. Из рисунка видно, что твердость вблизи границы близка к исходной, затем повышается до значений, существенно превышающих исходную H_0 с последующим ее уменьшением. Подобная зависимость показана на рис. 6 для образцов из алюминия при высоких давлениях [11]. В обоих случаях аналогия изменения твердости позволяет считать единой природу таких изменений H_0 , в основе которой лежит гидростатическое воздействие.

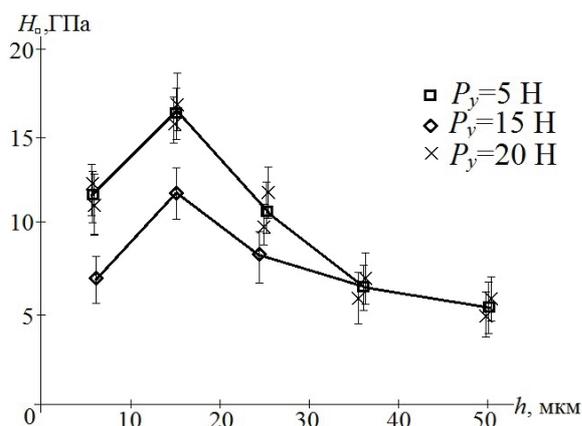


Рис. 5. Зависимость твердости H_0 от расстояния h от дна дорожки трения. Сферический индентор, $R=1,5$ мм; P_y – нагрузка на индентор твердомера

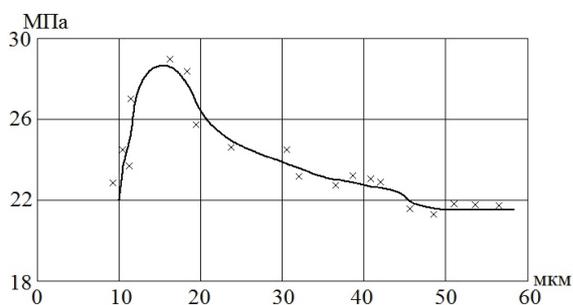


Рис. 6. Изменение микротвердости образца из алюминия при трении [11]

Обратимся к вопросу структурно-фазового состояния TiNi в гидростатическом ядре. Точно оце-

нить СФС в нем с использованием рентгеноструктурного анализа, электронномикроскопического и других методов сложно. Можно привести в первом приближении характеристику белого слоя, используя косвенные данные (литературные источники, результаты анализа микроструктуры, твердости, термического воздействия), а также теорию мартенситных превращений и эффект памяти формы.

Исследование микроструктуры деформированного материала показано на рис. 7. Здесь приведены фотографии микроструктуры TiNi в некоторых зонах подконтактной области, отражающей СФС после разгрузки и упругого восстановления материала. На рисунке видна область белого слоя и примыкающая к ней область со структурой мартенсита. Граница между ними размыта. Особенности этого слоя заключаются в непротравливаемости, повышенной прочности, цвете, в размерах, форме и месторасположении относительно границы, аналогичных тем же параметрам гидростатического ядра. Последовательный нагрев разгруженного образца вплоть до температур гомогенизирующего отжига ($500\text{ }^\circ\text{C}$) указывает на некоторые изменения в зонах с M_d - или A -состояниями путем реализации ПФ, но не дает видимых изменений ни в размерах и внешнем виде слоя (рис. 8), ни в прочностных характеристиках: зависимость H_0-h близка к первоначальной при $T=20\text{ }^\circ\text{C}$.

Анализ результатов

Важной особенностью белого слоя является его высокие пластические свойства и прочность. Они проявляются и при внедрении сферического индентора в условиях гидростатического давления, и при скольжении его с трением с образованием

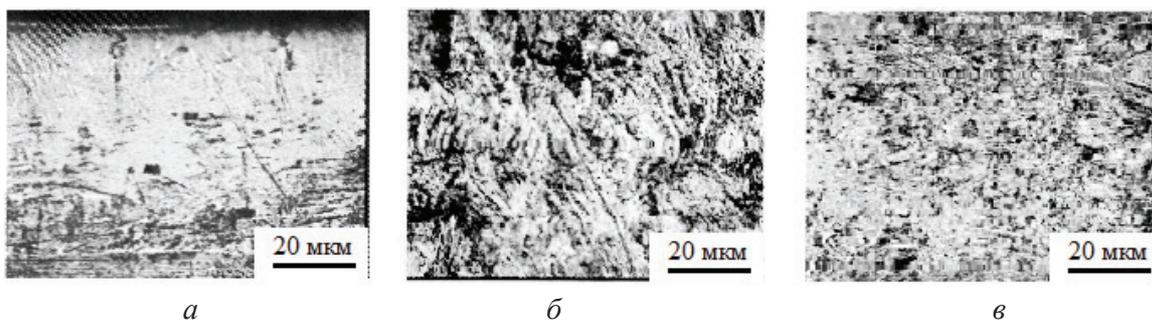


Рис. 7. Микроструктура сплава ТН-1К в направлении оси z : а) $z = 1,1$ мм; б) $z = 2,5$ мм; в) $z = 9,5$ мм

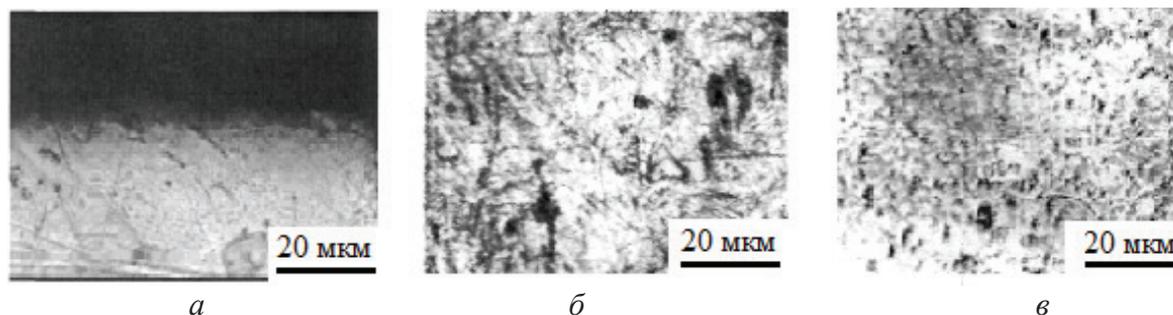


Рис. 8. Микроструктура сплава ТН-1К в направлении оси z после нагрева до $500\text{ }^\circ\text{C}$: а) $z = 1,1$ мм; б) $z = 2,5$ мм; в) $z = 9,5$ мм

фронтальных пластических волн, и в условиях многократных проходов СИ, когда поверхностные слои испытывают циклические сжатие и разгрузку с элементами растягивающих напряжений. Эти факты были установлены авторами на основе изучения микроструктуры слоя и физико-механического его состояния с точки зрения трещинообразования и поведения в условиях сложных НДС.

Вообще, любые твердофазные химические реакции сопровождаются повышением пластичности и снижением сопротивления деформированию [1]. Аномалии механических свойств проявляются не только в ходе самих превращений под нагрузкой, но и в связи с прошедшим ранее превращением. Существует несколько каналов воздействия фазовых превращений на пластичность, реализуемых в материалах с ПФ, в том числе и в никелиде титана. Это ориентирование зародышей новой фазы вдоль напряжений, появление микропластических деформаций в направлении силы из-за изменения объема фаз, активации направленного массопереноса за счет диффузионных процессов, инициированных полями напряжений, за счет перестройки блочной и дислокационной структуры с движением дефектов в сторону приложенных напряжений.

Таким образом, существует целый спектр причин повышения пластических свойств в полях напряжений и деформаций не только в новой М-фазе, но и в исходной аустенитной.

На основе проведенного анализа обширных экспериментальных результатов и литературных

источников делается вывод о том, что белый слой в TiNi представляет собой квазиравновесную аустенит-мартенситную систему, состоящую из интерметаллидов недовозвращенного мартенсита, не превращенного под влиянием гидростатического давления аустенита, вторичных фаз (Ti_2Ni , $TiNi_3$).

Влияние гидростатического давления здесь должно сказываться на протекании самих $A \leftrightarrow M$ реакций, отличных от реакций недеформированного материала или в условиях простейших НДС. На наш взгляд, эти процессы затормаживаются или исключаются совсем под действием гидростатики. Важным вкладом последней считаем образование высокодисперсного, наноразмерного состояния кристаллической структуры, обеспечивающего повышенную прочность и высокую пластичность.

Заключение

На основе рассмотрения классической задачи о внедрении жесткого сферического штампа в упруго-пластической среды выявлены условия формирования гидростатического ядра давления, прилегающего к границе контакта сферы с упруго-пластическим полупространством. Применительно к никелиду титана исследованы инициированные высоким гидростатическим сжатием прочностные свойства, структурно-фазовое состояние, представляющее собой квазиравновесную аустенит-мартенситную систему с высокодисперсным наноразмерным кристаллическим состоянием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 216 с.
2. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Механика контактного разрушения. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 222 с.
3. Lawn B.R., Wilshaw T.R. Indentation fracture principles and application // *J. Mater. Sci.* – 1975. – V. 10. – № 1. – P. 179–182.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. Show M.G., De Salvo G.J. A new approach to plasticity and its application to blunt two dimensional indenters // *Journal of Engineering for Industry.* – 1970. – V. 92. – № 2. – P. 469–479.
6. Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В. Структурно-фазовые состояния и свойства никелида титана при глубоком неоднородном пластическом деформировании // *Известия вузов. Черная металлургия.* – 2012. – № 3. – С. 61–63.
7. Хохлов В.А., Закусов А.С., Исаков И.В. Структурно-фазовое состояние и свойства материалов с памятью формы на основе никелида титана в полях остаточных деформаций // Актуальные проблемы современного материаловедения: Труды Всеросс. конф. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – С. 80–84.
8. Любарский И.М., Палатник С.Л. Металлофизика трения. – М.: Металлургия, 1976. – 176 с.
9. Хохлов В.А. Кинетическая нанотвердость и свойства пластически деформированного никелида титана // Современные проблемы машиностроения: Труды II Междунар. научно-техн. конф. – Томск, 2004. – С. 107–110.
10. Тарасов С.Ю. Исследование триботехнических свойств никелида титана // *Перспективные материалы.* – 1998. – № 5. – С. 24–30.
11. Михин Н.М. Внешнее трение твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

Поступила 28.09.2012 г.

УДК 539.21:539.42.214

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ НИКЕЛИДА ТИТАНА (ТН-10, ТН-20, ТН-1В)

М.И. Солдатов¹, В.Н. Ходоренко², В.Э. Гюнтер^{1,2}¹Томский государственный университет²НИИ медицинских материалов и имплантатов с памятью формы СФТИ при ТГУ, г. Томск

E-mail: hodor_val@mail.ru

Проведено исследование физико-механических свойств сплавов на основе никелида титана ТН-10, ТН-20, ТН-1В. Установлено, что величина деформации разрушения и значение напряжения разрушения каждого из сплавов определяются состоянием матрицы, в котором сплав находится при заданной температуре деформации, и вкладом мартенситных механизмов деформации, протекающих при нагрузке. Показано, что сформированная структура и величина пластической составляющей деформации сплавов оказывают существенное влияние на вид и характеристики излома.

Ключевые слова:

Мартенситное превращение, физико-механические свойства, предел прочности, поверхности разрушения.

Key words:

Martensitic transformation, physical-mechanical properties, limit of strength, fracture surface.

Введение

Поиск и разработка новых материалов для изготовления медицинских имплантатов постоянно находятся в центре внимания материаловедов. Потребность в изготовлении и разработке имплантатов из сплавов на основе никелида титана в последние годы достигло промышленных масштабов и требует всё более высокого уровня технологии производства и обработки материалов. Сплавы на основе никелида титана, проявляющие эффекты памяти формы и сверхэластичности, используются в различных областях медицины [1, 2]. В зависимости от решения конкретных задач, при использовании имплантатов из никелида титана нужно выбирать такой сплав, который характеризуется необходимым температурным интервалом формоизменения, заданной степенью восстановления формы, определенной величиной обратной деформации и необходимым уровнем прочностных свойств. К числу факторов, влияющих на изменение физико-механических свойств имплантатов, изготовленных из проволочных образцов сплавов на основе никелида титана, относятся сложная технология получения проволочных полуфабрикатов, при которой сплавы подвергаются воздействию больших степеней деформации и высоким температурам отжига, а также изменение состава сплава, связанное с увеличением или уменьшением концентрации никеля, титана и легирующих элементов.

Изменение фазовых границ при отклонении состава от области гомогенности системы TiNi приводит при избытке титана или никеля к появлению в исходной матрице вторичных фаз: обогащенных титаном (Ti₂Ni) и обогащенных по никелю (TiNi₃). Мартенситные превращения, обуславливающие эффекты памяти формы и сверхэластичности, характерны только для соединения TiNi, и выделение указанных фаз, сопровождающееся обеднением матрицы одним из компонентов, изменяет харак-

теристики и последовательность структурных превращений [1–3]. Более того, наличие в исходной B2-матрице фаз выделений Ti₂Ni, TiNi₃, различных по структуре, размеру и степени их распределения, оказывает существенное влияние на кинетику мартенситного превращения, морфологию мартенситной фазы и, как следствие, на изменение физико-механических свойств: предела текучести, прочностных и пластических характеристик сплавов на основе никелида титана.

Промышленные сплавы на основе никелида титана ТН-10, ТН-20, ТН-1В соответствуют по своим физико-механическим и гистерезисным свойствам поведению живых тканей организма и находятся в ряду наиболее перспективных медицинских материалов. Такие сплавы позволяют создавать функциональные имплантаты с различными величинами развиваемых усилий при эффектах памяти формы и высоким уровнем прочностных свойств при изменении формы и многократных механических воздействиях.

В этой связи исследование физико-механических и прочностных свойств сплавов на основе никелида титана ТН-10, ТН-20, ТН-1В в широком диапазоне температур является важной научной и практической задачей.

Материалы и методы

Состав исследованных сплавов на основе никелида титана ТН-10, ТН-20, ТН-1В (основу сплавов составляет Ti, Ni, Mo, Fe) приведен в табл. 1. Восстановление формы сплавов после деформации происходит в следующих интервалах: ТН-10 +(10...35) °С, ТН-20 +(25...55) °С, ТН-1В +(45...75) °С.

Проволочные образцы были получены путем ротационнойковки, волочения, протяжки через фильеры указанных сплавов и промежуточных отжигов при температурах 650...700 °С. Размеры исследуемых образцов составляли 1×60 мм.

Таблица 1. Состав сплавов на основе никелида титана, ат. %

| Сплав | Химические элементы | | | | | | |
|-------|---------------------|-------------|-----|-----------|-----------|-------------|--------|
| | Ni | Mo | Fe | Co | Cu | Al | Ti |
| ТН-10 | 50,0...51,5 | 0,50...1,50 | 0,5 | 0,2...0,3 | 0,1...0,2 | 0,05...0,10 | Баланс |
| ТН-20 | 49,0...50,5 | 0,50...1,25 | | | | | |
| ТН-1В | 48,0...49,5 | 0,50...1,00 | | | | | |

Испытания по определению температурной зависимости напряжения мартенситного сдвига проводили в условиях деформации растяжением в мартенситном состоянии с помощью стандартной установки, работающей в условиях деформации растяжением с последующим нагревом [1]. Определение величины критического напряжения и деформации разрушения для всех сплавов проводили в диапазоне температур $-196...+250$ °С, более подробно исследованы и проанализированы процессы при температурах $-196, 0, 25, 150$ °С. Изломы поверхностей разрушения образцов изучали методом растровой электронной микроскопии с использованием электронного микроскопа PHILIPS SEM 515 и микроанализатора EDAX ECON IV.

Результаты и их обсуждение

При анализе критических напряжений мартенситного сдвига в зависимости от температуры важным является понимание того, что не только состав сплава определяет многообразие механизмов проявления свойств, но и температурные интервалы деформации, степень деформации и условия эксперимента [4]. Для сплавов ТН-10, ТН-20, ТН-1В на температурной зависимости критических напряжений мартенситного сдвига, рис. 1, можно выделить несколько областей.

Для всех сплавов можно выделить низкотемпературную область $-50...196$ °С, которая характеризуется проявлением ферроэластичных свойств. Интервал температур, определяющий эту область, связан с тем, что все сплавы находятся ниже характеристической температуры конца прямого мартенситного перехода M_f и соответствуют мартенситному В19'-состоянию. Деформация в этом интервале температур осуществляется за счет процессов переориентации и двойникования структуры мартенситной фазы.

Область температур $-20...+50$ °С включает температуру начала прямого мартенситного перехода M_s . Для этой области характерно в основном двухфазное В2+В19' и предмартенситное состояние. Приложение нагрузки в этом интервале температур приводит к процессам перехода под действием напряжения В2-фазы в фазу В19' и процессам переориентации мартенситных кристаллов (мартенситных пластин) в соответствии с приложенным напряжением.

Высокотемпературная область ($+100...250$ °С) включает интервал температур выше критической температуры обратного мартенситного перехода A_f и ограничена температурой M_d – максимальной температурой, при которой возможно возникновение мартенсита под действием напряжения. Эта

область связана с появлением под действием нагрузки мартенсита напряжения в В2-фазе в условиях высокого уровня предела текучести исходной фазы. Величина напряжения, при котором появляется мартенситная фаза, определяется из уравнения Клапейрона–Клаузиуса [1, 2].

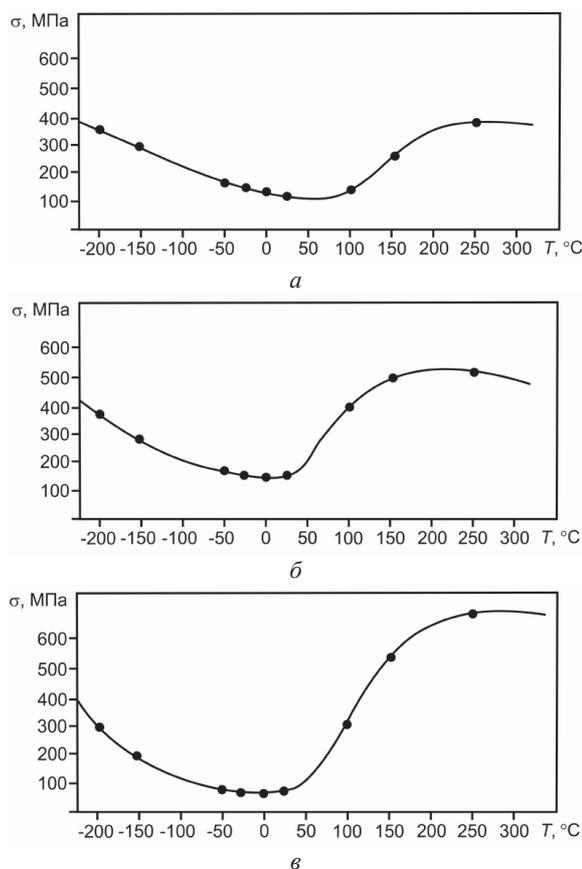


Рис. 1. Температурная зависимость напряжения мартенситного сдвига сплавов: а) ТН-1В; б) ТН-20; в) ТН-10

Наличие в сплавах ТН-10 и ТН-20 обогащенных по никелю мелкодисперсных когерентных частиц $TiNi_3$ приводит к упрочнению матрицы В2-фазы и повышению предела текучести в отличие от сплава ТН-1В, обогащенного по титану, где большая часть матрицы, насыщенная крупными частицами Ti_2Ni , приводит к снижению предела текучести сплава. Более того, частицы фаз выделений при деформации сплавов ТН-10, ТН-20, ТН-1В до разрушения в указанных температурных интервалах оказывают большое влияние на прочностные свойства сплавов.

Деформация сплавов на основе никелида титана, в которых реализуются мартенситные превра-

шения, складывается из упругой ε_y , мартенситной ε_m и пластической $\varepsilon_{пл}$ составляющих деформации ($\varepsilon_b = \varepsilon_y + \varepsilon_m + \varepsilon_{пл}$).

На рис. 2 представлены типичные зависимости «напряжение–деформация» $\sigma(\varepsilon)$ до разрушения сплавов ТН–10, ТН–20, ТН–1В. Кривые деформации в зависимости от многих факторов (структуры испытуемого сплава и температуры испытания) имеют различный вид. Отличия в величине напряжения и деформации разрушения свидетельствуют о различных механизмах упругой, мартенситной и пластической составляющих деформации при различных температурах [4]. Поскольку вклад упругой деформации незначителен и не превышает 0,2 %, то он не учитывается. Что касается вклада мартенситной составляющей деформации, то он не превышает для сплавов на основе никелида титана 10 %. Остальной вклад связан с пластической деформацией. Точка прерывания на кривой $\sigma(\varepsilon)$ характеризует максимальное значение напряжения разрушения и максимальную деформацию разрушения.

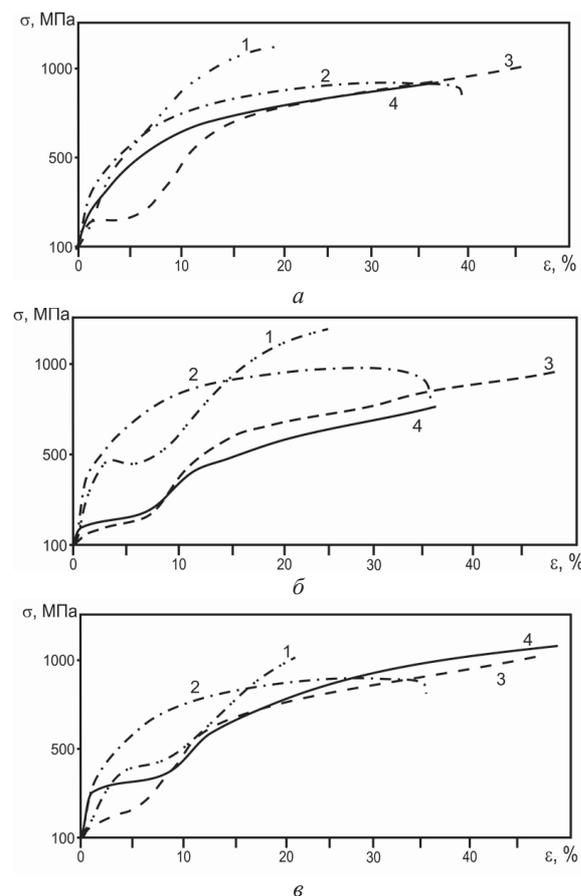


Рис. 2. Зависимость «напряжение–деформация» $\sigma(\varepsilon)$ для сплавов а) ТН–1В; б) ТН–20; в) ТН–10 при температурах: 1) –196; 2) 150; 3) 0; 4) 25 °С

Из анализа представленных температурных зависимостей напряжения мартенситного сдвига различных сплавов можно сделать вывод, что наличие в структуре исходной и мартенситной фазы частиц

выделений приводит как к появлению дополнительных источников внутренних напряжений, вызывающих фазовый переход и стимулирующих движение межфазной границы, так и дополнительных препятствий её движению. Развитие мартенситного превращения в сплаве ТН–10 возможно при гораздо меньших напряжениях, чем в сплавах ТН–20, ТН–1В, матрицы которых более насыщены фазами выделений, рис. 1. На начальном этапе деформации преодоление неоднородностей структуры в виде фаз выделений особенно сказывается в сплавах ТН–20, ТН–1В, где движение межфазных границ происходит при довольно высоких напряжениях по сравнению со сплавом ТН–10.

Минимальный уровень напряжения мартенситного сдвига для различных сплавов отличается не только по температуре, но и по величине напряжения, т. к. связаны с различными механизмами деформации сплавов, рис. 1. В критическом минимуме мартенситного сдвига сплавы ТН–20, ТН–1В находятся в двухфазном состоянии, а сплав ТН–10 имеет В2-структуру, соответствующую предмартенситному состоянию, когда при малейшей нагрузке возникает мартенсит напряжения, однородный по своей структуре и морфологии.

Таблица 2. Напряжения мартенситного сдвига сплавов на основе никелида титана σ , МПа

| Сплав | Температура, °С | | | |
|-------|-----------------|-----|-----|-----|
| | –196 | 0 | 25 | 150 |
| ТН–1В | 390 | 70 | 90 | 600 |
| ТН–20 | 400 | 150 | 120 | 510 |
| ТН–10 | 390 | 160 | 130 | 410 |

Деформация сплавов при температуре 150 °С связана с особой ролью пластической составляющей деформации. При деформации в таком состоянии релаксация напряжений осуществляется не столько путем возникновения мартенситной фазы, а в основном пластическим сдвигом. Появление мартенситной фазы в температурном интервале вплоть до температуры M_d происходит в соответствии с зависимостью Клапейрона–Клаузиуса при достаточно высоких напряжениях и составляет для сплавов ТН–10, ТН–20, ТН–1В 410...600 МПа, табл. 2.

Особенности фрактограмм поверхностей разрушения (рис. 3) определяются величиной пластической составляющей деформации, а также сформированной в процессе получения и перелола материала структурой сплавов. Как показано ранее, в матрице сплавов на основе никелида титана всегда присутствуют частицы, обогащенные по титану Ti_2Ni , и мелкодисперсные когерентные с матрицей частицы, обогащенные по никелю $TiNi_3$. Сформированная структура сплавов оказывает существенное влияние на характеристики разрушения. Крупные частицы достаточно хрупкие и не приспособлены к пластической деформации окружающей кристаллической решетки матрицы. Пустоты

и крупные чашки на поверхности излома являются следствием участия больших по размеру частиц уже при малых деформациях, до 3 %, в то время как окончательное разрушение происходит при деформациях, превышающих десятки процентов. Крупные включения не участвуют и при деформации в процессе разрушения, а лишь определяют место начала разрушения. Разрушение связано с участием более мелких частиц, размером 100...900 нм. При возникновении в окрестности таких частиц локальных зон пиковых напряжений они теряют сцепление с кристаллической решеткой, образуя микроскопические пустоты, которые растут за счет слияния с соседними и формируют в структуре исходной фазы микропоры [1–3, 5].

Исследования поверхностей разрушения показали, что при изменении температуры от 150 до 25 °С для всех сплавов характерно вязкое разрушение. Фрактограммы, соответствующие температуре 150 °С, характеризуются вязким разрушением с изломами «чашечного» типа с короткими стенками ячеек, рис. 3. На поверхностях изломов всех сплавов после разрушения видны ямки в широком

диапазоне размеров. При больших увеличениях на стенках более крупных ямок наблюдается большое количество мелких выделений.

Сравнительный анализ поверхностей излома при температурах 25 и 0 °С, рис. 3, показал идентичность поверхностной структуры. Для всех сплавов характерна беспорядочная ячеистая структура. Микрорельеф разрушения содержит довольно большое число мелкодисперсных выделений различного размера.

Деформация сплава в мартенситном состоянии при температуре –196 °С обусловлена не лавинообразным появлением мартенсита, а переориентацией уже существующего термического мартенсита, рис. 3. Наряду с этим происходит процесс двойникования структуры мартенситных кристаллов. Напряжение в этом случае превосходит значения напряжений для температур 0 и 25 °С. На поверхности излома видны характерные особенности смешанного вязко-хрупкого излома. Разрушение при температуре –196 °С проходит в виде скола вблизи границ мартенситных пластин, область которых в процессе растяжения образца пластически де-

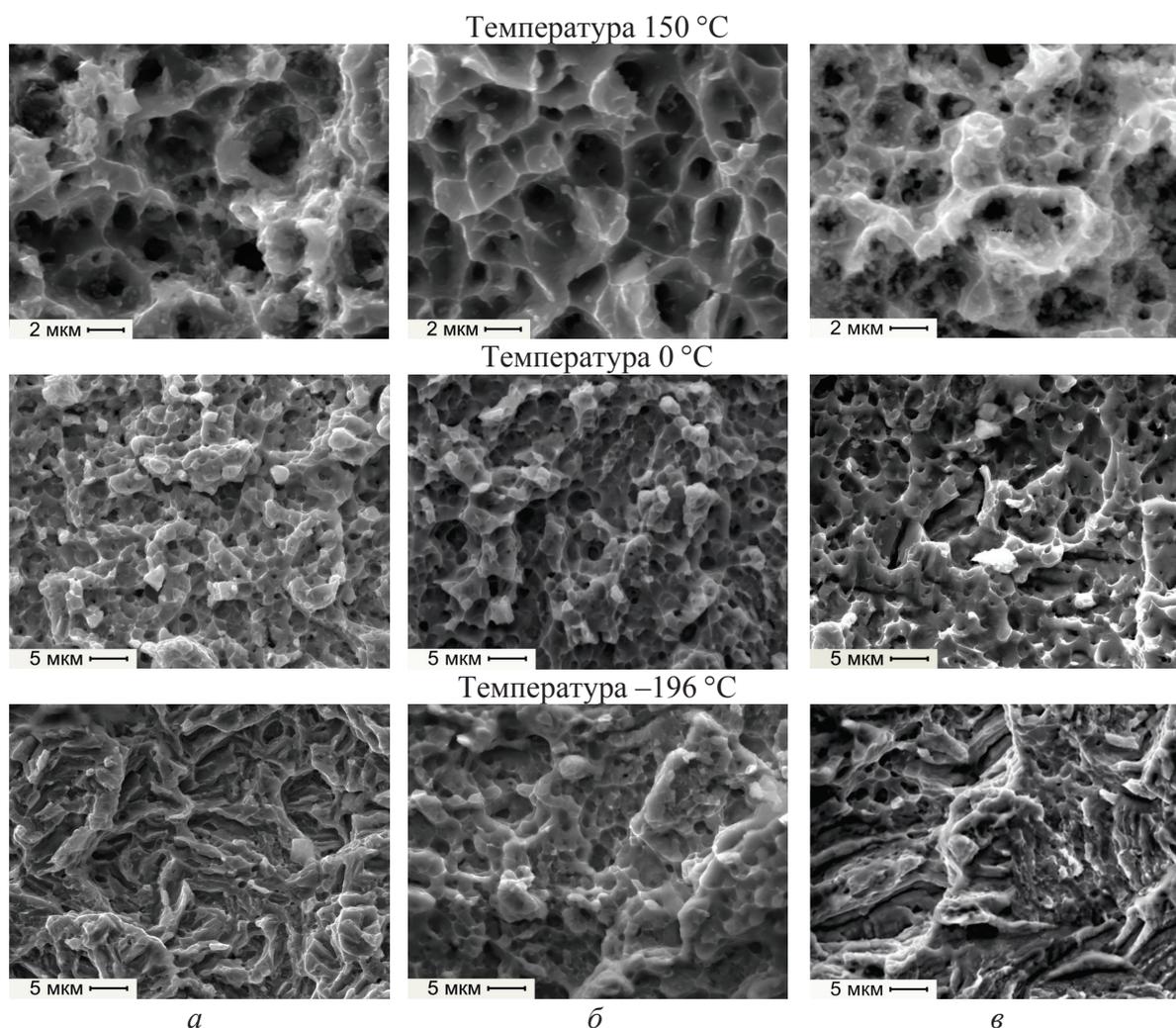


Рис. 3. Фрактограммы поверхностей излома сплавов: а) TH-1B; б) TH-20; в) TH-10

формируется в первую очередь. Для сплавов при этой температуре характерна пластическая деформация в 8...12 %.

Анализ температурных зависимостей максимальных значений напряжений разрушения и пластической деформации для всех трех сплавов показывает, что при смещении из области высоких температур к низким температурам наблюдается нелинейная зависимость снижения пластичности.

При температурах 0, 25 °С, когда сплавы ТН–1В и ТН–20 находятся в двухфазном состоянии В2+В19', а сплав ТН–10 в предмартенситном состоянии, приложение нагрузки вызывает проявление максимальной пластической деформации сплавов при достаточно высоких уровнях напряжений разрушения, табл. 3. Возникающий при нагрузке мартенсит напряжения релаксирует пиковые напряжения в В2-фазе путём мартенситной реакции и пластического сдвига, увеличивая деформационные возможности образца сплава, табл. 3.

Таблица 3. Величина деформации разрушения ε (%) и значение напряжения разрушения σ_b (МПа) сплавов на основе никелида титана

| Сплав | Температура, °С | | | | | | | |
|-------|-----------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | –196 | | 0 | | 25 | | 150 | |
| | ε | σ_b | ε | σ_b | ε | σ_b | ε | σ_b |
| ТН–1В | 20 | 1080 | 35 | 1020 | 45 | 740 | 40 | 760 |
| ТН–20 | 25 | 1040 | 35 | 1110 | 50 | 820 | 35 | 860 |
| ТН–10 | 20 | 950 | 45 | 1010 | 50 | 1110 | 35 | 950 |

Понижение температуры до –196 °С приводит к снижению пластических свойств, хотя уровень напряжения разрушения достаточно высок, табл. 3. При этой температуре сплавы находятся в полностью мартенситном состоянии. Вследствие того, что мартенсит имеет более низкие пластические свойства, чем исходная В2-фаза, деформирование сплавов в этом состоянии отвечает и более низкому уровню пластичности. Наличие в матричной фазе большого количества кристаллов мартенси-

тной фазы приводит к повышению величины напряжений разрушения для всех сплавов до уровня 950...1000 МПа.

Особую роль пластическая деформация играет при температуре 150 °С, когда критические напряжения возникновения мартенсита в сплавах и их пределы текучести близки. Даже при незначительной деформации сплава в таком состоянии релаксация пиковых напряжений осуществляется в основном пластическим сдвигом. Величина деформации в этом случае достигает 35...40 %, табл. 3.

Выводы

1. Установлено, что развитие мартенситного превращения в сплаве ТН–10 на основе никелида титана при температурах 0 и 25 °С происходит при меньших напряжениях, чем в сплавах ТН–20 и ТН–1В, что связано с формированием более однородной структуры сплава ТН–10. Это открывает перспективу использования обогащенных никелем сплавов при достаточно низких напряжениях мартенситного сдвига.
2. Показано, что существенное влияние на формирование особенностей поверхностей разрушения будут оказывать сформированная структура сплавов и величина пластической составляющей деформации.
3. Зависимость «напряжение–деформация» для всех сплавов ТН–10, ТН–20, ТН–1В при разных температурах характеризуется высоким уровнем пластичности сплавов. Величина деформации разрушения и значение напряжения разрушения каждого из сплавов определяется состоянием матрицы, в котором сплав находится при заданной температуре деформации, и вкладом мартенситных механизмов деформации, протекающих под нагрузкой.
4. Анализ поверхностей разрушения сплавов показал, что вид излома меняется от вязкого при высоких температурах до смешанного вязкохрупкого при более низких температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтер В.Э., Ходоренко В.Н., Чекалкин Т.Л. и др. Медицинские материалы с памятью формы. – Томск: Изд-во МИЦ, 2011. – 534 с.
2. Понтер В.Э., Котенко В.В., Миргазизов М.З. и др. Сплавы с памятью формы в медицине. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. – 208 с.
3. Ходоренко В.Н., Понтер В.Э., Солдатова М.И. Влияние состава сплава никелида титана на его структуру и формирование зернограничного ансамбля // Известия вузов. Сер. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 8. – С. 55–62.
4. Гуляев А.П. Металловедение. – М.: Металлургия, 1977. – 647 с.
5. Феллоуз Дж. Фрактография и атлас фрактограмм. – М.: Металлургия, 1982. – 488 с.

Поступила 06.06.2012 г.

УДК 541.64:547.759.32

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭФФЕКТА РЕБИНДЕРА В СИСТЕМЕ АЛЮМИНИЙ–ГАЛЛИЙ ПО БИНАРНОЙ СХЕМЕ

К.Ю. Сарычев, В.И. Мясникова, М.С. Волошина, С.В. Коновалов, В.Е. Громов

Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк

E-mail: gromov@physics.sibsiu.ru

Разработана методика реализации эффекта Ребиндера в системе алюминий–галлий по бинарной схеме. Процесс хрупкого разрушения алюминия проходит в два этапа: химическое взаимодействие, приводящее к появлению галлия на поверхности образца алюминия, классическое проявление жидкометаллической хрупкости в системе алюминий–галлий.

Ключевые слова:*Эффект Ребиндера, система алюминий–галлий, бинарная схема, хрупкость.***Key words:***Rehbinder effect, aluminum–gallium system, binary scheme, brittleness.*

Применение галлия в качестве жидкометаллического теплоносителя в первичном контуре атомных энергетических установок чрезвычайно перспективно благодаря исключительно широкому температурному диапазону существования его в жидкой фазе (от 30 до 2230 °С). Однако использование жидкого металла может пагубно отразиться на прочности конструкционных материалов, контактирующих с ним. Так, известно, что некоторые пластичные при обычных условиях испытаний металлы и сплавы разрушаются абсолютно хрупко при растяжении их в контакте с определенными жидкими металлами. Это явление – одно из проявлений эффекта Ребиндера, называется жидкометаллической хрупкостью [1, 2]. Установлено, что жидкий галлий дает исключительно резкий эффект охрупчивания для алюминия и его сплавов. При растяжении алюминиевых образцов на воздухе относительное удлинение до разрушения составляло 30 %, а при растяжении в контакте с жидким галлием – практически 0 %, при этом прочность падала в 30 раз.

Для объяснения эффекта Ребиндера применяют энергетический подход. В отличие от силовой модели разрушения, где считают, что разрушение происходит, когда напряжение в вершине трещины достигает предела прочности, в энергетическом подходе рассчитывается энергетический баланс разрушения, в котором важную роль играет энергия вновь образующихся поверхностей. С этой точки зрения разрушить тело – значит выполнить работу по компенсации этой избыточной поверхностной энергии. Поверхностная энергия уменьшается, если поверхность покрыть смачивающей её жидкостью. Чем более эффективно при смачивании жидкость снижает поверхностную энергию твердого тела, тем легче образовать в этом твердом теле новые поверхности, а значит, и разрушить его [3].

Для алюминия галлий является идеальной смачивающей жидкостью, наиболее эффективно снижающей поверхностную энергию, так как галлий – химический аналог алюминия. Эксперименты по охрупчиванию алюминия и его сплавов проводились и ранее, но при этом применялся уже гото-

вый жидкий галлий [4]. Однако работать с ним нерационально, поскольку он дефицитен, дорог, а в опытах используется большой избыток галлия – нанести его на образец тонким, контролируемой толщины слоем не удастся. Кроме того, более доступным и удобным в хранении является оксид галлия Ga_2O_3 . В нашей работе ставились задачи получения раствора галлия с использованием оксида, отработка метода выделения металлического галлия из полученного раствора, осаждение его на активной зоне образца и проведение механических испытаний.

Для приготовления раствора оксида галлия в качестве растворителя брали 40%-й водный раствор КОН. Однако при обычных условиях растворение происходило крайне вяло. Попытка получить 10%-й раствор Ga_2O_3 не удалась даже при двухнедельной выдержке оксида в растворе.

Эти сложности удалось преодолеть, проведя растворение при повышенных температурах. Однако прямой нагрев раствора опасен, так как при его закипании возможен выброс едкой щелочи на нагревательный элемент. По этой причине нагрев осуществляли в водяной бане при температуре 100 °С.

Следующей задачей было получение металлического галлия из раствора. Изначально нами была выбрана, казалось бы, классическая схема – электролиз. Были изготовлены электролитические ванны, отработаны режимы электролиза. Электролиз шел бурно уже при малых напряжениях, порядка 5...6 В. Наблюдалось бурное газовыделение, по-видимому, водорода, на катоде появлялся черный осадок. При снижении напряжения реакция шла менее бурно, однако она не прекращалась даже при уменьшении напряжения вплоть до нуля. При отсутствии напряжения восстановление галлия из раствора, очевидно, происходит за счет реакции замещения. Более активный алюминий вытесняет галлий из раствора.

Таким образом, в результате проведенного исследования были решены обе поставленные задачи: отработана методика получения достаточно концентрированного водно-щелочного раствора оксида галлия (состав которого следующий: 40 %

КОН в воде плюс 10 % вес Ga_2O_3); найден удобный и простой способ выделения металлического галлия из полученного раствора и осаждения его на поверхности образца.

Механические испытания проводились в режиме длительной прочности при постоянных растягивающих напряжениях. Для удобства подведения агрессивной среды к рабочей части была выбрана схема горизонтального расположения образца. В непосредственной близости к его поверхности располагали стеклянную подставку, на которую помещали тампон, смоченный охрупчивающим раствором, рабочая часть образца находилась в контакте с раствором (рис. 1). Образец – алюминиевая проволока диаметром 1 мм, покрытая лаком, удаленным только с рабочей части, длина которой составляла 5...7 мм. Образец закрепляли на установке, нагружали, затем подводили агрессивную среду и засекали время до разрушения. Зависимость времени до разрушения от нагрузки представлена на рис. 2.

Наблюдается резкая зависимость времени до разрушения от нагрузки при испытаниях в агрессивной среде: при напряжении более 10^7 Па разрушение происходит в течение 10 секунд, уменьшение напряжения до $0,3 \cdot 10^7$ Па приводит к увеличению времени до разрушения почти в десять раз, хотя при этом скорость химических процессов, необходимых для выработки охрупчивающего реагента, очевидно галлия, остается неизменной. Следует отметить, что в отсутствие агрессивной среды разрушающее напряжение этих образцов составляло $(4,1-4,4) \cdot 10^7$ Па, а при напряжении $4 \cdot 10^7$ Па разрушение не происходило более чем за 10 суток испытаний.

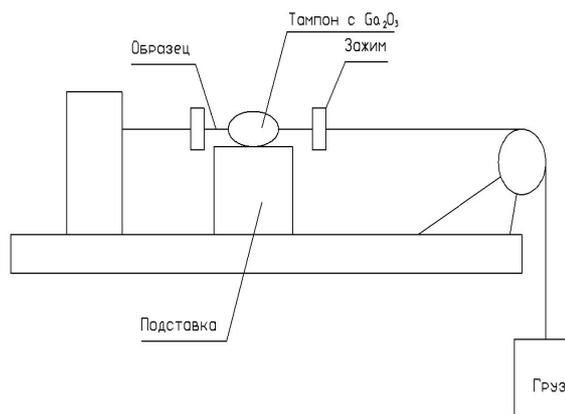


Рис. 1. Схема для установки для механических испытаний в агрессивной среде

Мы проверили, не является ли охрупчивающее действие результатом наличия щелочи КОН. Для этого провели испытания в среде 40 % КОН без растворенного оксида галлия. Испытания провели при напряжении немного меньше $4 \cdot 10^7$ Па. Разрушение не произошло за 10 суток, следовательно, причина охрупчивания – наличие солей галлия в растворе.

Была изучена микроструктура излома при испытаниях в охрупчивающем растворе. Излом оказался межзерненным, следов пластической деформации нет, шейка отсутствует – это типичный хрупкий излом.

При разбавлении раствора в два раза (20 % КОН + 5 % Ga_2O_3) обнаружен неожиданный эффект: охрупчивающее действие раствора непропорционально резко снижается. Возможно, это объясняется не только более вялым протеканием

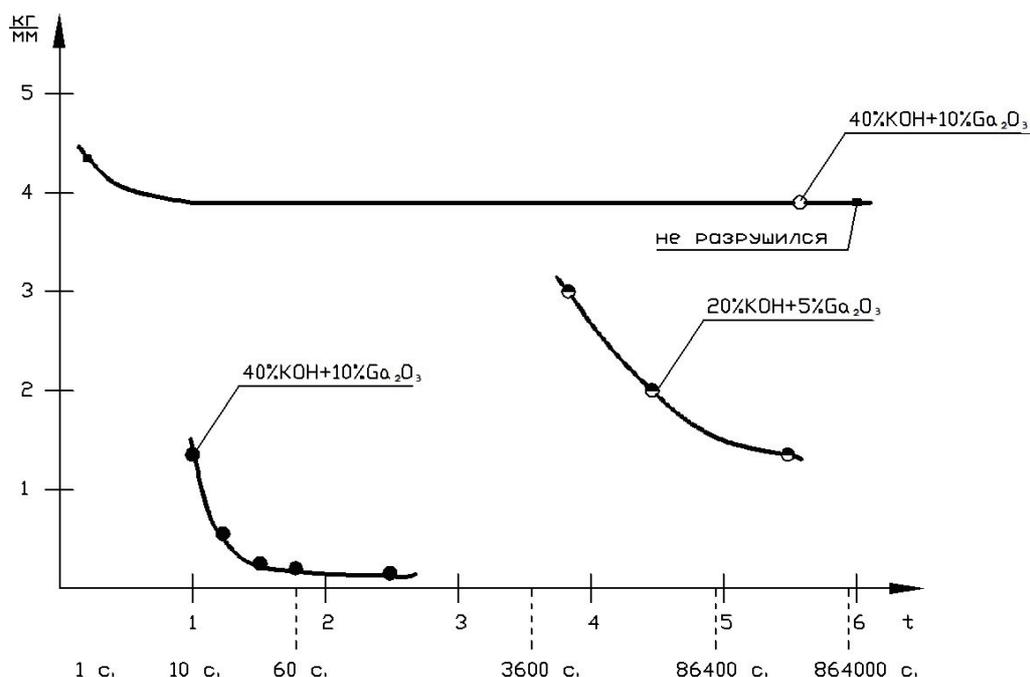


Рис. 2. Результаты механических испытаний. Логарифм времени до разрушения. ● – испытания в растворе 40 % КОН + 10 % Ga_2O_3 ; ○ – испытания в растворе 20 % КОН + 5 % Ga_2O_3 ; ○ – испытания в растворе 40 % КОН; ■ – испытания на воздухе

реакции осаждения металлического галлия из-за снижения концентрации раствора, но и растворением галлия в твердом алюминии, обеспечивающим отвод его с поверхности разрушения.

Таким образом, установлено, что водно-щелочной раствор галлия действительно вызывает крайне резкое охрупчивание алюминия. Хрупкость возникает в результате совместного действия раствора и растягивающих напряжений, что характерно для жидкометаллической хрупкости. Об этом же свидетельствует и характер излома образцов: межзеренный, камневидный. Полученные результаты позволяют предположить следующую схему разрушения: в результате реакции раствора с алюминием на поверхности последнего осаждаются галлий, который, в свою очередь, является причиной возникновения жидкометаллической хрупкости. Следовательно, эффект Ребиндера в этом случае реализуется по бинарной схеме, включающей два этапа:

1. Химическое взаимодействие, приводящее к появлению галлия на поверхности алюминия.
2. Охрупчивающее действие жидкого галлия на твердый алюминий, то есть возникновение классической жидкометаллической хрупкости.

Выводы

1. Получен водно-щелочной раствор, содержащий 10 % оксида галлия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перцов Н.В., Ребиндер П.А. О поверхностной активности жидких металлических покрытий и их влиянии на прочность металлов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123. – № 6. – С. 1068–1070.
2. Гликман Е.Э., Горюнов Ю.В., Демин В.М., Сарычев К.Ю. Роль структуры межфазной поверхности кристалл–расплав в проявлениях эффекта Ребиндера в металлах // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 3. – С. 645.

2. Отработана методика получения металлического галлия из жидкого раствора и его нанесения на поверхность алюминия.
3. Отработана схема механических испытаний образцов алюминия в агрессивной среде в режиме длительной прочности.
4. Показано резкое охрупчивающее действие раствора.
5. Доказано, что для хрупкого разрушения алюминия в этих условиях необходимо совместное действие охрупчивающего раствора и растягивающих напряжений, что является типичным для жидкометаллической хрупкости.
6. Излом носит межзеренный характер, что также типично для разрушения при жидкометаллической хрупкости.
7. Обнаружено, что снижение концентрации раствора в два раза приводит к непропорционально резкому ослаблению охрупчивающего эффекта.
8. Полученные результаты позволили предположить следующую схему разрушения под действием разработанного нами охрупчивающего раствора: в результате реакции раствора с алюминием на поверхность алюминия осаждаются галлий, являющийся причиной возникновения жидкометаллической хрупкости алюминия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (Соглашение № 14.740.11.1559).

3. Glickman E.E. Multiscale Phenomena in Plasticity / Eds. J. Lepinoux et al. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000. – P. 383–401.
4. Glickman E.E. Fast penetration of Ga in Al: liquid metal embrittlement near the threshold of grain boundary wetting // Zeitschrift für Metallkunde. – 2005. – V. 96. – № 10. – P. 1204–1210.

Поступила 10.09.2012 г.

АНОМАЛЬНО-ТЕРМОДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ ФАЗ ЦИАНИСТЫХ КРИСТАЛЛОВ. I. ЦИАНИД НАТРИЯ

В.Н. Беломестных, Е.П. Теслева

Юргинский технологический институт (филиал) ТПУ

E-mail: tesleva@mail.ru

Исследованы температурные зависимости анизотропных и изотропных акустических (скорости распространения упругих волн), размерных (упругие модули) и безразмерных (коэффициенты Пуассона) упругих характеристик моно- и поликристаллов цианида натрия в интервале 283,7...473,0 К.

Ключевые слова:

Цианид натрия, упругие свойства, скорости распространения упругих волн, упругие модули, коэффициент Пуассона.

Key words:

Sodium cyanide, elastic properties, elastic waves velocities, elastic modules, Poisson's ratio.

Введение

Нормальным в зависимости от температуры для большинства твердых тел считается уменьшение при повышении температуры по линейному закону и малая зависимость (или ее отсутствие) при низких температурах скоростей распространения упругих волн, упругих постоянных и упругих модулей [1, 2]. Всякое отклонение от указанных функциональных изменений принято трактовать как аномальное. В этом контексте результаты экспериментальных исследований температурных зависимостей постоянных жесткости $c_{ij}(T)$ монокристаллов цианидов щелочных металлов, выполненных в первую очередь Хауссюлем и др. [3–7], дают основание для подобной оценки. Особенности термоупругого поведения высокотемпературных разупорядоченных кубических фаз цианидов MeCN (Me=Na, K, Rb, Cs) сводятся к следующему:

- а) скорости распространения упругих волн увеличиваются с повышением температуры в значительных температурных интервалах;
- б) одна из двух сдвиговых постоянных (в NaCN постоянная жесткости c_{44}) стремится к нулю в случае приближения температуры к критическому значению T_c (T_c – температура структурного фазового перехода NaCN I→NaCN II, $T_c=283,7$ К [5], 288,1 К [8]) согласно зависимости $T_{44}=d(\log c_{44})/dT=1/(T \log T/T_0)$, где T – температура в К, а T_0 – специфическая постоянная (для NaCN $T_0=255,4$ К [5]);
- в) объемная сжимаемость и термическое расширение при изменении температуры демонстрируют типичные для стабильных твердых тел зависимости.

Теория размягчения постоянных жесткости и фононов в ионных молекулярных кристаллах на примере щелочных цианидов рассмотрена в [9]. Были предложены соотношения, описывающие перенормировку фононных частот из-за взаимодействия трансляционных степеней свободы с вращательными. Из соотношений следует, что при некоторых температурах постоянные жесткости c_{11} , c_{44} могут обращаться в нуль. В щелочных цианидах

при повышении температуры первой обращается в нуль постоянная c_{44} , в супероксидах – c_{11} . Это различие определяется соотношением между силами короткодействующего отталкивания и силой взаимодействия квадрупольного момента молекулы с флуктуирующим из-за наличия фононов градиентом электрического поля. На зависимость c_{11} , c_{44} от температуры влияют также ангармоничность и непосредственное взаимодействие молекул. Из условия $c_{44}=0$ для NaCN рассчитанная критическая температура сегнетоупругого перехода составила 337,5 К, что существенно превышает экспериментальное значение T_0 . Расхождение связывают с тем, что при расчете использовалось приближение среднего поля.

Сведения о значениях упругих модулей (модуля Юнга E , модуля сдвига G) в трех особых кристаллографических направлениях $\langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$, $\langle 111 \rangle$ кубической фазы ($T > T_c$) монокристалла NaCN, величины этих модулей поликристалла цианида натрия, а также анизотропные ($\sigma_{\langle hkl \rangle}$) и изотропные (σ) коэффициенты Пуассона данного представителя группы цианистых кристаллов в литературе отсутствуют. В настоящей работе определены и обсуждаются указанные упругие характеристики кубического NaCN, а также некоторые свойства цианида, связанные с его упругостью, в частности ангармонические.

Некоторые общие сведения о NaCN и других цианидах щелочных металлов

Изоморфные цианиды натрия, калия и рубидия при комнатной температуре имеют решетку KCN-типа, искаженный тип решетки каменной соли (NaCl, тип B_1 , пространственная группа $Fm-3m$), что формально невозможно, так как кристаллическая решетка данных веществ состоит из трех различных атомов (рис. 1) [10, 11]. Однако с понижением температуры структуры их решеток становятся менее симметричными (табл. 1), и тогда уже положения атомов углерода C и азота N можно различить: расстояние между ними равно 0,105 нм. В кубических фазах цианидов щелочных металлов ион

CN⁻ ведет себя, как если бы его симметрия была шаровой. Однако это только среднестатистически так за счет того, что жестко связанные («гантель») атомы С и N вращаются вокруг общего центра тяжести и таким образом имитируют шаровую симметрию.

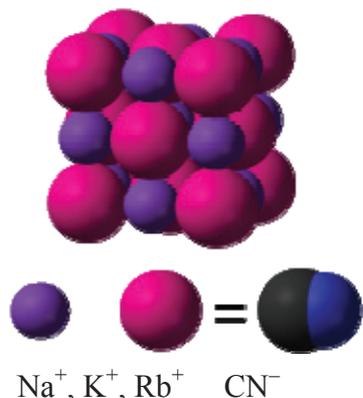


Рис. 1. Элементарная ячейка кубических фаз кристаллов KCN-типа: большие сферы – CN⁻, маленькие – Na⁺, K⁺, Rb⁺ [11]

Альтернативным вращательному механизму разупорядочения в решетках цианидов является ориентация ионов CN⁻ по ограниченному числу положений [12]. Приращение энтропии $\Delta S \approx R \ln 2$ при переходе III→II в солях NaCN и KCN вполне убедительно показывает, что в орторомбических формах II этих кристаллов ионы CN⁻ случайно распределены между двумя ориентациями. Из прираще-

ния энтропии при переходе NaCN II→NaCN I следует, что в результате происходит значительное дальнейшее ориентационное разупорядочение в высокотемпературной кубической фазе $\Delta S \approx R \ln 4$ и соответствует переходу к восьми ориентациям цианид-ионов. Анализ результатов теплоемкости, ядерного магнитного резонанса спектра неупругого рассеяния нейтронов в NaCN I показал, что барьеры переориентации ионов CN⁻ в кубической фазе сравнительно малы (8–12 кДж/моль) [12]. Довольно общим свойством разупорядоченных кубических форм цианидов щелочных металлов является то, что на движение ионов одного типа заметно влияет ориентационное движение ионов другого типа (цианид-ионов).

Результаты и их обсуждение

В основе настоящей работы лежат экспериментальные данные по постоянным жесткости c_{ij} монокристалла NaCN I в интервале 283,7...473,0 К, полученные ультразвуковым резонансным методом на частоте 15 МГц с предельной погрешностью для c_{11} , c_{44} и c_{12} соответственно 0,4, 0,8 и 1,0 % [5]. Эксперимент на более высоких частотах (порядка единиц-десяток гигагерц, метод бриллюэновского рассеяния) приводит к значениям c_{11} , c_{12} на 6...7 % ниже, а c_{44} – на 14 % для NaCN при 20 °С [13]. Этот факт для c_{44} проверялся и обсуждался в [14]: дисперсия c_{44} отсутствует, и потеря устойчивости решетки NaCN I при $T \rightarrow T_c$ из-за стремления к нулю модовой частоты поперечных акустических фононов сохраняется. Упругие аномалии при превраще-

Таблица 1. Термодинамические и структурные данные по цианидам щелочных металлов [12]

| Цианиды | III | | II | | I | |
|---------|---------------------------|--|---------------------------|--|---------------------------|--|
| | T_c (K), $\Delta S_c/R$ | | T_c (K), $\Delta S_c/R$ | | T_c (K), $\Delta S_c/R$ | |
| NaCN | 171,9; 0,61 (λ) | | 288,1; 1,41 (λ) | | NaCl | |
| | ? моноклинная | | орторомбическая | | | |
| KCN | 168,3; 1,01 (λ) | | 110,3; 0,695 (?F) | | NaCl | |
| | ? моноклинная | | орторомбическая | | | |
| RbCN | 193,1; 1,31 | | 110,3; 0,695 (?F) | | NaCl | |
| | | | ? моноклинная | | | |
| CsCN | 193,1; 1,31 | | 110,3; 0,695 (?F) | | CsCl | |
| | | | ромбоэдрическая | | | |

Примечание: T_c – температура перехода; ΔS_c – изменение энтропии; R – универсальная газовая постоянная; (λ) – плавный переход; (F) – резкий переход.

Таблица 2. Анизотропные скорости звука и параметры Грюнайзена монокристалла NaCN

| T, K | Направление в кристалле | | | | | | | | | | |
|-------|-------------------------|-------|----------|-------|----------|----------|------------|------------|-------|-------|----------|
| | <100> | | | <110> | | | | | | <111> | |
| | v_l | v_t | γ | v_l | v_{II} | v_{II} | γ_1 | γ_2 | v_l | v_t | γ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 283,7 | 3967 | 385 | 4,360 | 3731 | 385 | 1816 | 4,340 | 2,089 | 3396 | 1500 | 2,396 |
| 293,0 | 3981 | 454 | 4,310 | 3556 | 454 | 1846 | 4,263 | 1,873 | 3403 | 1530 | 2,340 |
| 313,0 | 4004 | 557 | 4,220 | 3569 | 557 | 1898 | 4,151 | 1,790 | 3412 | 1583 | 2,243 |
| 333,0 | 4020 | 645 | 4,133 | 3582 | 645 | 1936 | 4,043 | 1,733 | 3423 | 1624 | 2,171 |
| 353,0 | 4031 | 720 | 4,050 | 3592 | 720 | 1967 | 3,942 | 1,688 | 3433 | 1659 | 2,112 |
| 373,0 | 4040 | 793 | 3,964 | 3602 | 793 | 1994 | 3,838 | 1,650 | 3443 | 1691 | 2,060 |
| 393,0 | 4046 | 860 | 3,879 | 3612 | 860 | 2016 | 3,737 | 1,621 | 3455 | 1719 | 2,016 |
| 413,0 | 4049 | 920 | 3,797 | 3620 | 920 | 2033 | 3,641 | 1,599 | 3466 | 1743 | 1,981 |
| 433,0 | 4049 | 973 | 3,723 | 3626 | 973 | 2047 | 3,556 | 1,580 | 3474 | 1763 | 1,949 |
| 453,0 | 4045 | 1025 | 3,647 | 3630 | 1025 | 2059 | 3,469 | 1,563 | 3480 | 1782 | 1,920 |
| 473,0 | 4039 | 1073 | 3,572 | 3632 | 1073 | 2067 | 3,385 | 1,552 | 3486 | 1798 | 1,896 |

ниях типа ориентационного дипольного стекла в смешанных кристаллах $Na(CN)_xCl_{1-x}$ ($x < x_c \approx 0,65$) изучались в работе [15]. Упругость низкотемпературных форм чистого цианида натрия не исследована.

Все используемые в работе расчетные соотношения приведены в [15, 16]. Результаты настоящих исследований приведены в табл. 2–4 и на рис. 2.

Таблица 3. Фактор упругой анизотропии A, соотношение Коши Δ , модули всестороннего сжатия B, Юнга E и сдвига G монокристалла NaCN

| T, K | A | Δ | B | $E_{<100>}, E_{<110>}, E_{<111>}, G_{<100>}, G_{<110>}, G_{<111>}$ | | | | | |
|-------|-------|----------|------|--|------|------|------|------|------|
| | | | | ГПа | | | | | |
| 283,7 | 0,045 | 61,51 | 18,2 | 14,45 | 0,93 | 0,71 | 0,24 | 0,46 | 0,66 |
| 293,0 | 0,061 | 43,76 | 18,1 | 14,86 | 1,28 | 0,98 | 0,33 | 0,62 | 0,88 |
| 313,0 | 0,086 | 28,40 | 17,9 | 15,56 | 1,90 | 1,47 | 0,50 | 0,91 | 1,27 |
| 333,0 | 0,111 | 20,83 | 17,7 | 16,05 | 2,51 | 1,96 | 0,66 | 1,19 | 1,62 |
| 353,0 | 0,134 | 16,43 | 17,6 | 16,45 | 3,08 | 2,42 | 0,82 | 1,45 | 1,94 |
| 373,0 | 0,158 | 13,32 | 17,4 | 16,78 | 3,67 | 2,91 | 0,99 | 1,71 | 2,26 |
| 393,0 | 0,182 | 11,16 | 17,2 | 17,03 | 4,25 | 3,40 | 1,16 | 1,96 | 2,55 |
| 413,0 | 0,205 | 9,59 | 17,0 | 17,22 | 4,81 | 3,87 | 1,32 | 2,20 | 2,82 |
| 433,0 | 0,226 | 8,46 | 16,8 | 17,35 | 5,30 | 4,30 | 1,48 | 2,41 | 3,05 |
| 453,0 | 0,248 | 7,51 | 16,6 | 17,44 | 5,79 | 4,74 | 1,63 | 2,61 | 3,27 |
| 473,0 | 0,269 | 6,75 | 16,4 | 17,47 | 6,26 | 5,15 | 1,78 | 2,80 | 3,47 |

Табл. 2 содержит сведения об анизотропных скоростях распространения продольных (v_l), поперечных (v_t) упругих волн, параметрах Грюнайзена γ в направлениях <100>, <110>, <111> монокристалла NaCN в интервале от 283,7 до 473,0 К. За исключением продольной скорости звука в направлении гранной диагонали <110> все другие скорости распространения нелинейно увеличиваются с повышением температуры. Максимальную температурную зависимость демонстрирует скорость поперечной волны в направлении ребра куба (<100>, увеличение в 1,79 раза). Анизотропные параметры Грюнайзена по трем особым направлениям монокристалла NaCN с повышением температуры существенно снижаются, особенно $\gamma_{<110>}$ (на 26 %), что нетипично для ионных кристаллов, например для NaCl. При этом во всем исследованном диапазоне

температур между параметрами Грюнайзена сохраняется неравенство: $\gamma_{<110>} > \gamma_{<111>} > \gamma_{<100>} > \gamma_{<110>}$.

Фактор упругой анизотропии и соотношение Коши (табл. 3) свидетельствуют о том, что кристалл NaCN является сильно анизотропным объектом, в котором одновременно силы взаимодействия между ионами являются значительно нецентральными. Например, для NaCl при обычной температуре $A=0,72$ и $\Delta=1,02$ (близки к единице) [15]. Анизотропные модули Юнга $E_{<hkl>}$ и сдвига $G_{<hkl>}$ в противоположность модулю всестороннего сжатия увеличиваются с повышением температуры и между ними выполняются следующие неравенства: $E_{<100>} > E_{<110>} > E_{<111>}, G_{<100>} < G_{<110>} < G_{<111>}$.

Таблица 4. Плотность ρ , коэффициент термического расширения α , скорости звука, упругие модули, термодинамический γ_b и акустический γ_a параметры Грюнайзена поликристалла NaCN

| T | $\rho, 10^3$ | $\alpha, 10^{-6}$ | v_l | v_t | E | G | B/G | γ_a | γ_b |
|-------|--------------|-------------------|-------|-------|------|------|-------|------------|------------|
| | | | | | | | | | |
| 283,7 | 1,602 | 58 | 3527 | 908 | 3,87 | 1,32 | 13,75 | 3,62 | 1,10 |
| 293,0 | 1,599 | 58 | 3538 | 953 | 4,25 | 1,45 | 12,44 | 3,55 | 1,31 |
| 313,0 | 1,593 | 59 | 3555 | 1029 | 4,91 | 1,69 | 10,60 | 3,42 | 1,50 |
| 333,0 | 1,587 | 59 | 3572 | 1094 | 5,50 | 1,90 | 9,33 | 3,32 | 1,49 |
| 353,0 | 1,582 | 60 | 3586 | 1151 | 6,05 | 2,10 | 8,37 | 3,22 | 1,51 |
| 373,0 | 1,576 | 60 | 3600 | 1207 | 6,60 | 2,30 | 7,56 | 3,12 | – |
| 393,0 | 1,570 | 60 | 3614 | 1258 | 7,12 | 2,49 | 6,92 | 3,04 | – |
| 413,0 | 1,564 | 61 | 3627 | 1305 | 7,59 | 2,66 | 6,39 | 2,96 | – |
| 433,0 | 1,558 | 62 | 3635 | 1345 | 8,01 | 2,82 | 5,97 | 2,89 | – |
| 453,0 | 1,552 | 63 | 3642 | 1384 | 8,41 | 2,97 | 5,60 | 2,82 | – |
| 473,0 | 1,546 | 64 | 3647 | 1419 | 8,78 | 3,11 | 5,27 | 2,76 | – |

Упругие и некоторые другие характеристики поликристалла NaCN помещены в табл. 4 (заметим: для кубических решеток B моно- и поликристаллов совпадают). Здесь хотелось бы обратить внимание на два момента. Первое. Отношение модулей B/G в NaCN велико, особенно вблизи T_c . Такие значения B/G характерны для сверхпластичных материалов. Для сравнения приведем типичные значения B/G для пластичного золота (6,03), хрупкого алмаза (0,83) и находящегося на границе

хрупкости-пластичности NaCl (1,73). Второе. Плохое согласие между акустическим и термодинамическим параметрами Грюнайзена. Правда, теплоемкость NaCN измерена только в низкотемпературной области (5...345 К [8, 17]), и сравнение γ_a и γ_D приходится на небольшой перекрывающийся интервал температур, примыкающий к T_c , значение которой в двух методах регистрации расходится (см. введение).

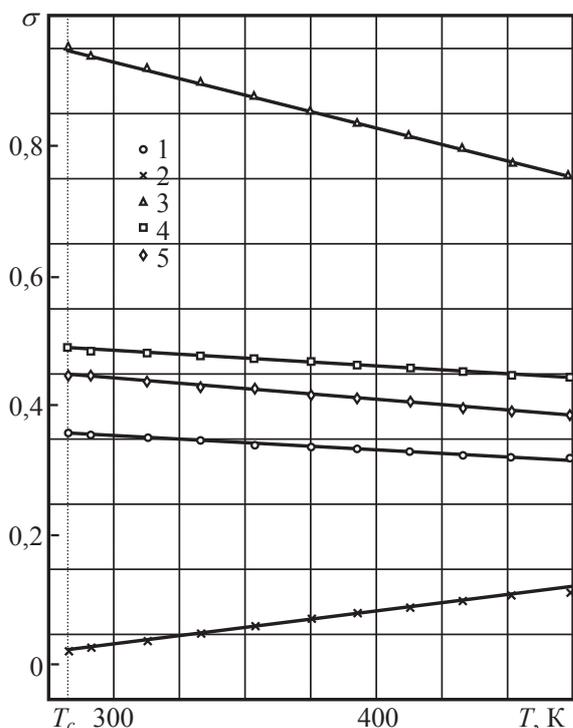


Рис. 2. Коэффициенты Пуассона моно- (1, 2, 3, 4) и поликристалла (5) NaCN в зависимости от температуры: 1 – $\sigma_{\langle 100,001 \rangle}$, 2 – $\sigma_{\langle 110,110 \rangle}$, 3 – $\sigma_{\langle 110,110 \rangle}$, 4 – $\sigma_{\langle 111,111 \rangle}$

Коэффициенты Пуассона моно- и поликристалла цианида натрия в зависимости от температуры представлены на рис. 3. Диаметрально противоположна продольно-поперечная деформация NaCN в направлении $\langle 110 \rangle$: $\sigma_{\langle 110,001 \rangle}$ минимален по значению и в функции от температуры имеет положи-

тельный наклон, $\sigma_{\langle 110,11-0 \rangle}$ максимален, вблизи T_c его значение стремится к единице, а $d\sigma_{\langle 110,110 \rangle}/dT < 0$. В точке перехода T_c в частично упорядоченную орторомбическую фазу NaCN II изотропный коэффициент Пуассона приближается к верхнему пределу 0,5 ($\sigma=0,454$), и при дальнейшем понижении температуры на зависимости $\sigma(T)$ очевиден излом. Все коэффициенты Пуассона кубической фазы кристалла NaCN I положительны в исследованном интервале температур и ожидаются таковыми вплоть до плавления ($T_{пл}=835$ К). Нулевого значения может достичь лишь коэффициент Пуассона $\sigma_{\langle 110,001 \rangle}$ в фазе NaCN II вблизи температуры 250 К (экстраполяция от T_c). Это значение температуры хорошо совпадает с экспериментально установленным параметром $T_0=255,4$ К для описания температурной зависимости сдвиговой постоянной жесткости в виде $c_{44}(T)=2,144(T-T_0)/T_0$ ГПа [5]. Присутствуют ли $\sigma_{\langle 110,001 \rangle}$ NaCN II отрицательные значения при $T < T_c$ и превратится ли ромбический цианид натрия таким образом в неаксиальный ауксетик, пока остается под вопросом.

Заключение

На основе сведений по постоянным жесткости исследованы температурные зависимости анизотропных и изотропных акустических и упругих характеристик моно- и поликристаллов цианида натрия в интервале 283,7...473,0 К. Установлено, что с ростом температуры наблюдается аномальное возрастание скоростей звука (кроме продольной скорости в направлении $\langle 110 \rangle$). Нетипичная температурная зависимость наблюдается для анизотропных параметров Грюнайзена – по трем особым направлениям с повышением температуры они существенно снижаются. Кристалл NaCN является сильно анизотропным объектом, в котором одновременно силы взаимодействия между ионами являются значительно нецентральными. Отношение модулей B/G в NaCN свидетельствует о сверхпластичности кристалла вблизи T_c . Температурные зависимости анизотропных модулей (Юнга, сдвига, всестороннего сжатия) и коэффициентов Пуассона линейны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беломестных В.Н. Физико-химическая акустика кристаллов. – Томск: Изд-во ТРОЦА, 1998. – 183 с.
2. Сорокин Б.П., Глушков Д.А., Александров К.С. К температурной зависимости упругих постоянных второго порядка кубических кристаллов // ФТТ. – 1999. – Т. 41. – № 2. – С. 235–240.
3. Haussühl S. Anomalous thermoelastic behaviour of cubic potassium cyanide // Solid State Communic. – 1973. – V. 13. – № 2. – P. 147–151.
4. Kasser W., Buchenau U., Haussühl S. Brillouin scattering in cubic potassium cyanide // Solid State Communic. – 1976. – V. 18. – № 3. – P. 287–289.
5. Haussühl S., Eckstein J., Recker K., Wallrafen F. Cubic sodium cyanide, another crystal with KCN-type anomalous thermoelastic behaviour // Acta Cryst. – 1977. – V. A33. – № 5. – P. 847–849.
6. Haussühl S. Temperature and pressure derivatives of the elastic constants of cubic rubidium cyanide // Solid State Communic. – 1979. – V. 2. – № 2. – P. 181–183.
7. Loidl A., Haussühl S., Kjems J.K. Elastic properties CsCN // Z. Phys. – 1983. – V. B50. – № 3. – P. 187–192.
8. Matsuo T., Suga H., Seki S. Thermodynamic properties and phase transitions of sodium cyanide crystal // Bull. Chem. Soc. Japan. – 1968. – V. 41. – № 3. – P. 583–593.
9. Sahu D., Mahanti S.D. Theory of elastic and phonon softening in ionic molecular solids. Applications to alkali cyanides // Phys. Rev. B: Condens. Matter. – 1982. – V. 26. – № 6. – P. 2981–3000.
10. Нараи-Сабо И. Неорганическая кристаллохимия / Пер. с венгерского под ред. академика Н.В. Белова. – Будапешт: Изд-во академии наук, 1969. – 504 с.
11. Stokes H.T., Decker D.L., Nelson H.M., Jorgensen J.D. Structure of potassium cyanide at low temperature and high pressure determi-

- ned by neutron diffraction // Phys. Rev. – 1993. – В 47 (17). – P. 11082–11092.
12. Парсонидж Н., Стейвли Л. Беспорядок в кристаллах: в 2 ч. Ч. 1 / пер. с англ. под ред. Г.Н. Жижины. – М.: Мир, 1982. – 434 с.
 13. Satija S.K., Wang C.H. Brillouin scattering of a sodium cyanide single crystal in its disordered phase // J. Chem. Phys. – 1977. – V. 66. – № 5. – P. 2221–2222.
 14. Rehwal W. Absence of dispersion in the elastic shear stiffness c_{44} of sodium cyanide // Phys. Letters. – 1982. – V. 87A. – № 5. – P. 245–247.
 15. Беломестных В.Н., Теслева Е.П. Ангармонические эффекты в твердых телах (акустические аспекты). – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 151 с.
 16. Беломестных В.Н., Теслева Е.П., Орлова К.Н. Упругие и акустические свойства двойного сплава Cu_2Au в интервале температур 4,2...725 К // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 126–130.
 17. Messer Ch.E., Ziegler W.T. III. Rotation of groups in ionic lattices. The heat capacities of sodium and potassium cyanides // J. Amer. Chem. Society. – 1941. – V. 63. – № 10. – P. 2703–2708.

Поступила 18.09.2012 г.

УДК 681.5.01

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОФИЛЬТРА С ВРАЩАЮЩИМСЯ ОСАДИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

Б.Р. Касимова, А.А. Баубек, А.К. Кусатаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
E-mail: zhubatcan@gmail.com

Разработана теоретическая математическая модель работы электрофильтра с вращающимся осадительным электродом. Было предложено применение осадительного электрода в виде вращающейся ленты для устранения негативных факторов, влияющих на работу электрофильтра, таких как удельное электрическое сопротивление и вторичный унос; рассчитана оптимальная скорость вращающейся ленты.

Ключевые слова:

Электрофильтр, коронный разряд, очистка дымовых газов, осадительный электрод, коронирующий электрод.

Key words:

Electric precipitator, corona charge, cleaning of stack gas, collecting electrode, wire plate.

В процессе очистки воздуха на промышленных предприятиях от взвешенных частиц пыли немаловажное внимание уделяется качеству очистки воздуха, содержанию вредных для здоровья человека веществ в очищенном воздухе, что напрямую зависит от эффективности работы фильтрующего устройства. Удельное электрическое сопротивление, вторичный унос – явления, негативно влияющие на эффективность работы электрофильтра.

Многие ученые всего мира на протяжении десятков лет исследуют процессы, происходящие в работе электрофильтра. В работе [1] В.Н. Ушов исследовал основные законы работы промышленных электрофильтров и вывел формулы процесса коронного разряда для частиц пыли очищаемого воздуха. Букелл (1996) и Лами (1997) [2, 3], используя формулы Эйлера–Лагранжа, разработали математическую модель трубчатого электрофильтра, работающего на постоянном напряжении. Выведенная учеными математическая модель полностью описывает работу электрофильтра, однако в полученной модели не были учтены такие негативные факты, как удельное электрическое сопротивление и вторичный унос.

В данной статье предлагается использование электрофильтра с вращающимися осадительными электродами для устранения удельного электриче-

ского сопротивления и вторичного уноса. Цель данной работы заключается в определении зависимости скорости вращающегося осадительного электрода от времени зарядки частиц, а также с использованием уравнения Эйлера–Лагранжа разработана математическая модель электрофильтра с вращающимся осадительным электродом.

Электрическая очистка газов от взвешенных частиц (пыли, тумана, дыма) основана на следующем принципе. В процессе ионизации газовых молекул электрическим разрядом происходит зарядка частиц, содержащихся в газе, а затем под действием электрического поля эти частицы осаждаются на электродах и таким образом выделяются из газового потока [4].

Для создания электрического поля, способного вызвать коронный разряд между электродами, последние должны быть присоединены к источнику постоянного тока высокого напряжения (высокой разности потенциалов). E_0 – критическая напряженность электрического поля (величина напряженности, при которой возникает корона), которая определяется по формуле (1):

$$E_0 = 31\delta \left(1 + \frac{0,308}{\sqrt{\delta r}} \right). \quad (1)$$

В среде воздуха при давлении, близком к атмосферному, для коронного разряда, при котором на коронирующий электрод подается отрицательное напряжение, и круглого провода можно принять:

$$\delta = \frac{3,92B}{273+t},$$

где B – барометрическое давление, t – температура, °С.

В процессе работы электрофильтра возникают такие проблемы, как вторичный унос, обратная корона, влияние удельного сопротивления осажденных частиц на эффективность работы электрофильтра. Для решения данных проблем группой ученых и магистрантов Евразийского национального университета им Л.Н. Гумилева под руководством Баубека А.А. было предложено выполнить электроды в виде непрерывно вращающейся ленты, опирающейся на валы и разделенной перегородкой на две части, причем одна часть связана с газоходом, а другая – со щеточным узлом, установленным снизу перегородки с возможностью контактирования с осадительным электродом, и бункером для приема пыли.

Физическая сущность работы предлагаемого электрофильтра заключается в том, что осадительный электрод выполнен в виде непрерывно вращающейся бесконечной ленты. Твердые частицы технологических газов, проходя через коронирующие электроды, приобретают электрический заряд и, подчиняясь закону электростатики, осаждаются в верхней части осадительного электрода.

В нижней части перегородки установлен щеточный механизм, который контактирует с осадительным электродом и счищает с него твердые частицы пыли. Таким образом, осадительный электрод очищается от твердых частиц, которые затем попадают в приемный бункер.

В результате проведенного теоретического анализа и из работы [5], согласно законам электрогазодинамики, было выявлено, что на эффективность улавливания и осаждение пылевидных частиц наибольшее влияние оказывают следующие силы: сила Кулона $F_{кл}$, аэродинамическая сила $F_{плд}$, сила тяжести F_g , сила индукции $F_{и}$, сила сопротивления F_c и в некоторой степени сила электрического ветра $F_{эл.в}$ (рисунок).

Значения короны зависят от этих точек. Процесс зарядки частиц и процесс их осаждения на осадительном электроде зависят от напряжения и тока. Для уменьшения влияния удельного электрического сопротивления, вторичного уноса необходимо, чтобы лента двигалась со скоростью, при которой частицы удаляются с поверхности электрода [6]. Время зарядки частицы определяется формулой

$$\tau = 16,7 \frac{S_n m_0}{z_{вх} \eta},$$

где зависимость между временем зарядки и скоростью вращающейся ленты выражается формулой

$$\tau = \frac{L}{v_1},$$

где L – длина электрофильтра.

Следовательно, оптимальная скорость вращающейся ленты электрофильтра рассчитывается по данной формуле:

$$v_1 = \frac{L}{16,7 S_n m_0 / V z_{вх} \eta},$$

где v_1 – скорость вращающейся ленты; L – длина электрофильтра; S_n – площадь осаждения поля, м²; V – количество газов, поступающих в поле, м³/с; $z_{вх}$ – запыленность на входе в поле, г/м³; η – степень очистки газов полем электрофильтра.

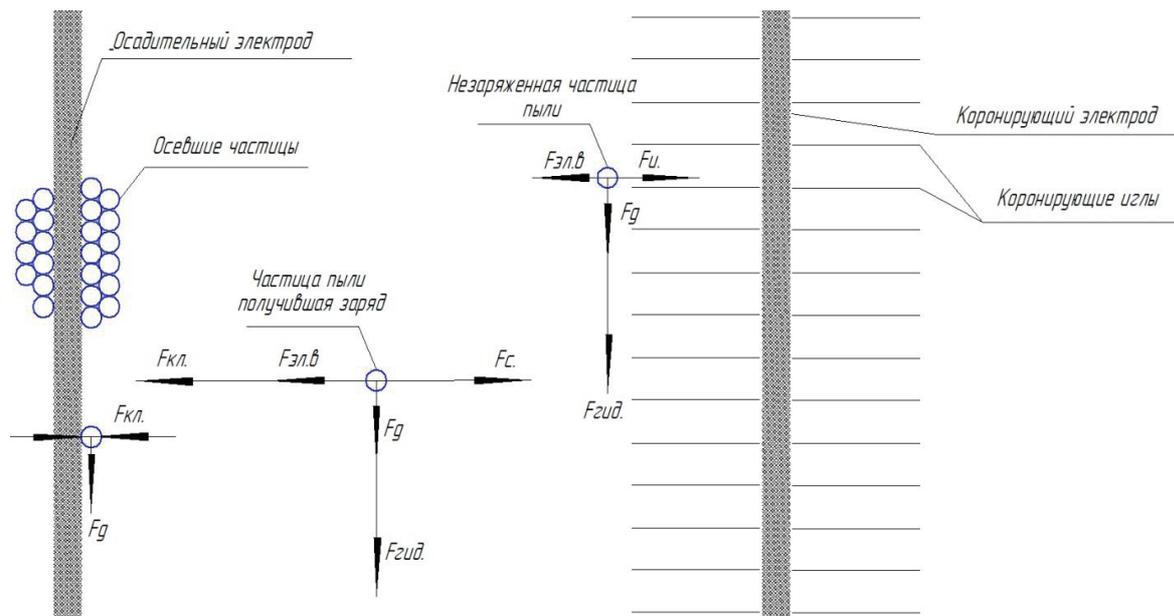


Рисунок. Силы, действующие на заряженную частицу

В общем случае частицы подвергаются совместному эффекту силы тяжести и электростатической силы, а также аэродинамической силы вследствие взаимодействия между газом и частицами вдоль их траекторий. Эти силы балансировки выравнивают инерцию частиц силами, действующими на частицу, и могут быть представлены в виде формулы (2):

$$\frac{d\vec{u}_{pi}}{dt} = \vec{F}_D(\vec{u}_i - \vec{u}_{pi}) + \frac{\vec{g}_i(\rho_p - \rho_f)}{\rho_p} + \vec{F}_x,$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i; i = x, y, z, \quad (2)$$

где ρ_p и $d\vec{u}_{pi}$ – плотность и скорость частиц; \vec{g}_i – ускорение силы тяжести, действующее в вертикальном направлении, которое заставляет частицу отклоняться в газе; \vec{F}_x относится к внешнему ускорению частицы, электростатическая сила:

$$F_x = \frac{Eq}{m_p},$$

где q и m_p означают электрический заряд и массу частицы.

$F_D(\vec{u}_i - \vec{u}_{pi})$ – сила сопротивления на единицу массы частицы, соответствующая относительной скорости частицы. Для мелких частиц используют закон сопротивления Стокса, определяемый как

$$F_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2 C_c(\lambda)},$$

где \vec{u} – скорость осаждения (скорость движения частицы); μ – вязкость воздуха; ρ_p – плотность частиц; d_p – диаметр частицы; C_c – поправочный коэффициент скольжения Гунингема.

Для сухого воздуха в атмосферных условиях C_c – фактор коррекции скольжения Гунингема для закона сопротивления Стокса и вычисляется как (3):

$$C_c(\lambda) = 1 + K_n \left[1,257 + 0,4 \exp\left(-\frac{1,1}{K_n}\right) \right],$$

$$K_n = \frac{2\lambda}{d_p}, \quad (3)$$

где K_n – номер Кнудса; λ – длина свободного пробега молекулы.

Длина свободного пробега зависит от коэффициента Больцмана ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К) и σ – коэффициента аккомодации газа:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi^2 P}.$$

Время пребывания газа в электрофилтре не превышает обычно десяти секунд. В течение этого времени пылинки, например, диаметром менее 20 мкм упадет под влиянием силы тяжести всего на несколько сантиметров. Таким образом, влияние этой силы на движение частицы в электрофилтре можно не учитывать. Пренебрегаем силой тяжести. Электрическая сила и сила сопро-

тивления воздуха рассматриваются как основные силы, действующие на частицы.

Полагаем, что частицы, осаждающиеся на осадительный электрод, удаляются, прежде чем они смогут разрядиться (так как пластина выполнена в виде непрерывно движущейся ленты).

С использованием данных, приведенных в таблице, были рассчитаны формулы (1), (2).

Таблица. Данные параметров электрофилтра

| Обозначение | Наименование | Значение |
|-------------|--|-----------------------|
| T | Температура | 150 °C |
| N | Число элементарных зарядов в 1 см ³ | 108 |
| e | Электростатический заряд электрона | 1,6·10 ⁻¹⁹ |
| r | Радиус коронирующего электрода | 1,25·10 ⁻³ |
| L | Длина пластины | 10 м |
| v_r | Скорость газа | 0,8 м/с |
| H | Расстояние между коронирующим и осадительным электродами | 0,14 м |
| μ | Вязкость воздуха | 2 (г/см·с) |

$$\lambda = 7,7 \cdot 10^{-6};$$

$$K_n = 0,15;$$

$$C_c = 1 + 0,15 \left[1,257 + 0,4 \exp\left(-\frac{1,1}{0,15}\right) \right] = 1,18;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} + 30,5 \cdot 10^2 v;$$

$$q = 3\pi d_p^2 \varepsilon_0 E.$$

Для пластинчатого электрофилтра напряженность электрического поля из работы [7] в любой точке x рассчитывается по следующей формуле:

$$E = \frac{U}{x};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} + 30,5 \cdot 10^2 v;$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

или

$$\ddot{x} = \frac{U^2}{x^2} \times 27,79 \cdot 10^{-24} + 30,5 \dot{x}.$$

Используя уравнение Коши

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \end{cases}$$

уравнение примет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{U^2}{x_1^2} 27,79 \cdot 10^{-24} + 30,5 x_2.$$

Линеаризуем функции U^2, x_{12} . Для линеаризации используем разложение в ряд Тейлора:

$$f(x_0) - \dot{f}(x_0)(x - x_0),$$

где x_0 – начальное состояние. Для U_0 берем критическое напряжение, которое вычисляется по формуле

$$U_0 = E_0 r \left(\frac{\pi H}{d} - \ln \frac{2\pi r}{d} \right).$$

Подставляя значения, находим:

$$E_0 = 683 \cdot 10^3,$$

$$U_0 = 5684 \text{ В},$$

$$U^2 \approx U_0^2 - 2U_0(U - U_0) \Big|_{U_0=5684} = 3,2 \cdot 10^6 - 113684U,$$

$$x_0 = 1,25 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x_0^2} + \frac{2}{x_0^3}(x - x_0) = 10^9 x - 0,6 \cdot 10^6.$$

Преобразим наше уравнение:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{U^2}{x_1^2} 27,79 \cdot 10^{-24} + 30,5 x_2 = 0,8 \cdot 10^{-9} x_1 - 0,5 \cdot 10^{-12} - 0,3 \cdot 10^{-9} U x_1 + 0,2 \cdot 10^{-12} U + 30,5 x_2.$$

В общем виде уравнения состояния имеют вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$y = Cx + Du.$$

Представим в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,8 \cdot 10^{-9} & 30,5 & 0,2 \cdot 10^{-12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ U \end{bmatrix} + (0,53 \cdot 10^{-12})u.$$

На выходе наблюдаем эффективность очистки воздуха. Эффективность очистки воздуха определяется по формуле:

$$\eta = 1 - e^{-\omega f};$$

$$f = \frac{L}{vH},$$

где L – длина электрофильтра; v – скорость потока газа; H – расстояние между коронирующим и осадительным электродом; ω – скорость частицы, причём

$$\frac{dx}{dt} = \omega.$$

Заменяем $\omega = x_2$. Разложим в ряд Фурье выражение $e^{-x_2 f}$. Начальное условие для скорости $x_{20} = 0$:

$$e^{-x_2 f} = e^{-x_{20} f} + f e^{-x_{20} f} (x_2 - x_{20}) \Big|_{x_{20}=0} = 1 + f x_2.$$

Подставляем найденное значение:

$$\eta = 1 - (1 + f x_2) = f x_2,$$

$$f = \frac{L}{vH} = \frac{10}{0,8 \cdot 0,13} = 83.$$

В итоге наша система описывается в виде уравнений состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$y = Cx + Du.$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,8 \cdot 10^{-9} & 30,5 & 0,2 \cdot 10^{-12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ U \end{bmatrix} + (0,53 \cdot 10^{-12})u;$$

$$y = (0 \quad 83 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ U \end{bmatrix}.$$

Выведенная математическая модель может быть использована для дальнейшего анализа работы электрофильтра в различных режимах.

Выводы

Показано, что наибольшее влияние на эффективность работы электрофильтра с вращающимися осадительными электродами оказывает скорость вращающейся ленты, напряжение на коронирующем электроде, напряженность электрического поля, скорость движения частиц от коронирующего электрода к осадительному. Выполнение осадительного электрода в виде бесконечно вращающейся ленты уменьшает влияние таких негативных факторов, как вторичный унос и удельное электрическое сопротивление заряженных частиц, на эффективность работы электрофильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушов В.Н. Очистка промышленных газов электрофильтрами // Химическая литература. – 1962. – С. 7.
2. Lami E., Mattachini F., Turri R., Tromboni A. Numerical Procedure for Computing the Voltage Current Characteristics in Electrostatic Precipitator Configurations // Electrostatics. – 1995. – № 34:385. – P. 399.
3. Buccella C. Computation of V-I Characteristics in Electrostatic Precipitators // Electrostatics. – 1996. – № 37:277. – P. 291.
4. Muhammad A. Modelling and simulation of an electrostatic precipitator. – Sweden: Science, 2011. – P. 10–12.
5. Niloofar F. Three-dimensional modeling of electrostatic precipitator using hybrid finite element-flux corrected transport technique. – Canada: Ontario, 2011. – P. 54–55.
6. Едмичев Д.А. Улучшение условий труда операторов зерноперерабатывающего оборудования совершенствованием технологии пылеудаления. – Красноярск, 2012. – 8 с.
7. Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Васильева О.В., Купцов А.М. Динамика изменения траектории заряженных частиц в электромагнитном поле в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – 48–52.

Поступила 04.06.2012 г.

УДК 621.892.1

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЯ ЧАСТИЧНО СИНТЕТИЧЕСКОГО МОТОРНОГО МАСЛА BIZOL DIZEL ULTRA 10W-40 CJ-4/SL

Б.И. Ковальский, Н.Н. Малышева, Е.В. Тарасов*, С.А. Дьяков*

Сибирский федеральный университет, Институт нефти и газа, г. Красноярск

*ООО «Магнат-РД», г. Красноярск

E-mail: labsm@mail.ru

Представлены результаты испытания всесезонного универсального моторного масла на термоокислительную стабильность и противоизносные свойства, предложены критерии противоизносных свойств и суммарной энергии, поглощенной маслом при термических и триботехнических испытаниях.

Ключевые слова:

Термоокислительная стабильность, летучесть, коэффициенты поглощения светового потока и относительной вязкости, диаметр пятна износа, электропроводность фрикционного контакта, критерий противоизносных свойств.

Key words:

Thermal-oxidative stability, volatility, absorption factors of light flux and relative viscosity, diameter of deterioration stain, conductance of frictional contact, criterion of antiwear properties.

Появление на российском рынке моторных масел иностранных фирм ставит задачу их идентификации на соответствие группам эксплуатационных свойств и классам вязкости. Для решения этой задачи разработана комплексная методика [1–4], позволяющая определить склонность масел к окислению при статической и циклически изменяющейся температурах, изменение вязкости и летучести, оценить влияние продуктов окисления на противоизносные свойства и установить интенсивность процессов, протекающих на фрикционном контакте.

Целью исследований является определение качества частично синтетического моторного масла Bizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL.

Методика исследования предусматривала термостатирование масла массой $100 \pm 0,1$ г в термостойком стеклянном стакане при температуре 180°C с перемешиванием стеклянной мешалкой с частотой вращения 300 об/мин в течение 8 ч. После каждых восьми часов испытания стакан с термостатированным маслом взвешивался на электронных весах (MW 1200) для определения массы испарившегося масла с точностью $\pm 0,1$ г, отбирались пробы масла для прямого фотометрирования при толщине фотометрируемого слоя 2 мм и определения коэффициента поглощения светового потока и вязкости. После измерения параметров отобранные пробы сливались в стеклянный стакан, который повторно взвешивался, после чего испытания продолжались до достижения значений коэффициента поглощения светового потока, равного $0,7-0,8$ ед.

С целью определения температур начала окислительных процессов и испарения моторное масло испытывалось по аналогичной методике, но температура изменялась циклически в диапазоне от 150 до 180°C (цикл повышения) и от 180 до 150°C (цикл понижения). Измерение вязкости, летучести и оптических свойств термостатированных

масел производилось через 8 ч испытания. Температура испытания поддерживалась автоматически и повышалась или понижалась в каждом цикле на 10°C .

Противоизносные свойства термостатированных проб масел определялись на трехшариковой машине трения со схемой трения «шар–цилиндр» при достижении коэффициента поглощения светового потока значений, равных $0,1; 0,2; 0,3-0,8$ ед. При отборе пробы масла массой 80 г для проведения испытаний на машине трения и измерения вязкости проба масла в стеклянном стакане доливалась до 100 ± 1 г.

Параметры трения составляли: нагрузка 13 Н; скорость скольжения $0,68$ м/с; температура масла в объеме 80°C ; время испытания 2 ч. Оценка противоизносных свойств производилась по среднеарифметическому значению диаметров пятен износа на трех шарах. В качестве образцов применялись шары диаметром 9,5 мм и обойма конусного подшипника диаметром 80 мм из стали ШХ15. Диаметры пятен износа измерялись на оптическом микроскопе «Альтами» MetIM.

Для исследования процессов, протекающих на фрикционном контакте, через один из шаров пропускался постоянный ток (100 мкА) от внешнего стабилизированного источника питания (3 В), устанавливаемый при статическом положении пар трения сопротивления, что позволяло определять изменения фрикционного контакта в зависимости от концентрации продуктов окисления.

На рис. 1 представлены графические зависимости показателей термоокислительной стабильности от времени окисления частично синтетического моторного масла Bizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL. Установлено, что зависимость коэффициента поглощения светового потока от времени окисления (рис. 1, а) имеет изгиб при коэффициенте $K_n=0,27$ ед. (37 ч) и описывается кусочно-линейной функцией, что указывает на образование двух

видов продуктов окисления с различной оптической плотностью, которые называются низко- и высокоэнергоемкие. За 64 ч испытания коэффициент поглощения светового потока достиг значения 0,78 ед.

Коэффициент относительной вязкости (рис. 1, б), определяемый отношением вязкости окисленного масла к вязкости товарного, увеличивается прямо пропорционально времени окисления и за 64 ч составил 1,09, т. е. вязкость увеличилась на 9 %. Однако в первые 16 ч испытания вязкость уменьшилась на 2 %, что может объясняться температурной

деструкцией вязкостной присадки. В целом продукты окисления увеличивают вязкость.

Летучесть масла G при термостатировании в течение 48 ч увеличивается по линейной зависимости и за 64 ч испытания составила 11 г. Точка пересечения зависимости $G=f(t)$ (рис. 1, в) с осью ординат определяет концентрацию легких фракций и воды в исследуемом масле.

Интенсивность процессов окисления и испарения масла при термостатировании оценивалась изменениями их скоростей за 8 ч (рис. 2). Установлено, что в течение 56 ч изменения скоростей оки-

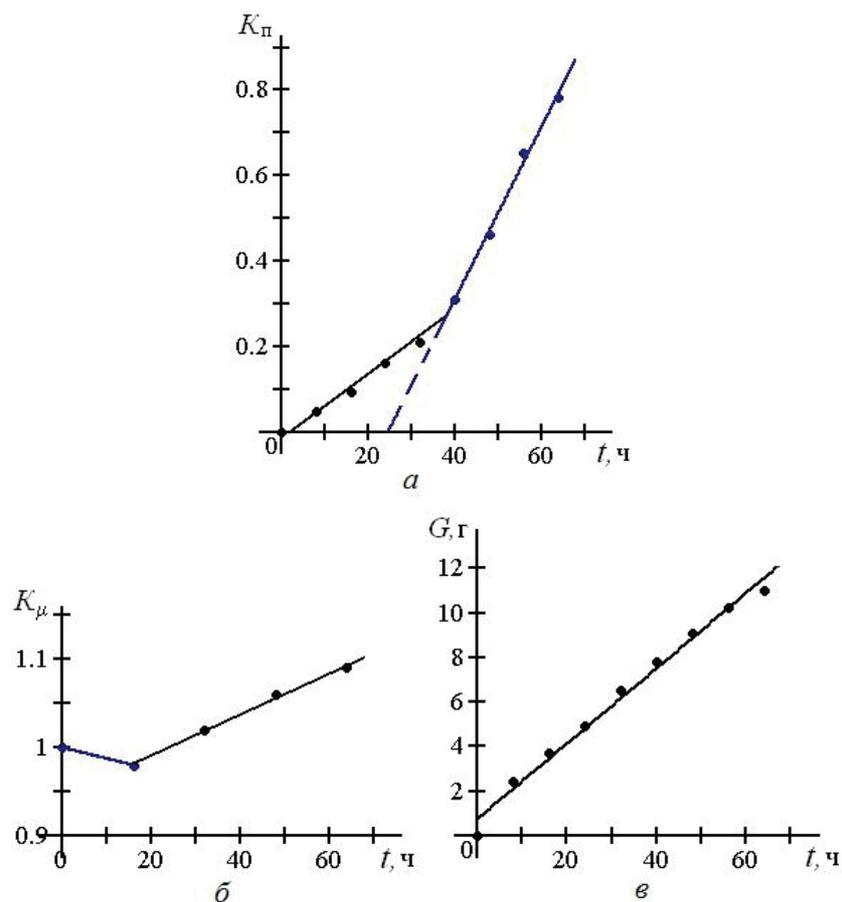


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения светового потока K_n (а), относительной вязкости K_μ (б) и летучести G (в) от времени испытания частично синтетического моторного масла Bizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL

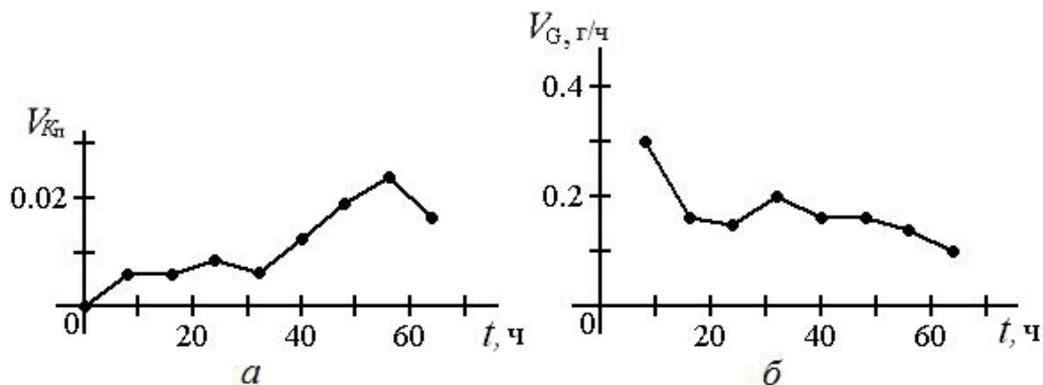


Рис. 2. Зависимости скорости окисления (а) и летучести (б) от времени испытания (усл. обозн. см. на рис. 1)

сления и испарения находятся в противофазах, т. е. происходит перераспределение избыточной тепловой энергии между продуктами окисления и испарения, что характеризует процесс самоорганизации, протекающий в смазочном масле при его термостатировании. Однако после 32 ч испытания скорость окисления масла преобладает над скоростью испарения, что вызвано образованием более энергоемких продуктов окисления, вызывающих изгиб зависимости $K_{II}=f(t)$ (рис. 1).

Интенсивность процессов самоорганизации предложено оценивать коэффициентом интенсивности K_c :

$$K_c = V_{Kn} / V_G, \text{ г}^{-1}.$$

Зависимость коэффициента K_c от времени окисления представлена на рис. 3. Показано, что интенсивность процессов самоорганизации значительно возрастает после 32 ч испытания, когда в масле образуются более энергоемкие продукты окисления.

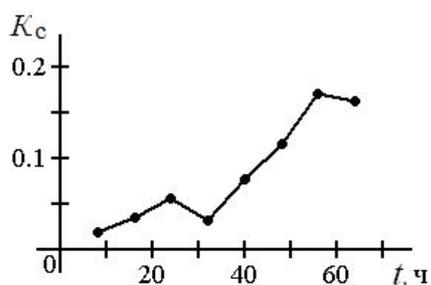


Рис. 3. Зависимость коэффициента интенсивности процессов самоорганизации, протекающих в частично синтетическом моторном масле, от времени его окисления при температуре 180 °С

Результаты испытания моторного масла Vizol Dizel Ultra 10W-40 CJ-4/SL при циклическом изменении температуры представлены на рис. 4. Масло выдержало неполных четыре цикла повышения температуры от 150 до 180 °С и три цикла понижения температуры от 180 до 150 °С, а время испыта-

ния составило 168 ч. Установлено, что в циклах понижения температуры испытания окислительные процессы стабилизируются при температурах 150 и 160 °С, а процесс испарения масла замедляется (рис. 4, б). За 168 ч испытания коэффициент поглощения светового потока составил 0,8 ед., а летучесть – 14,7 г (14,7 %).

Для определения температур начала окисления и испарения масла при циклическом изменении температуры построены зависимости скоростей изменения коэффициента V_{Kn} и летучести V_G (рис. 5). Показано, что скорость окислительных процессов при температурах 150...160 °С равна нулю или приобретает отрицательные значения, поэтому при температуре 160 °С начинаются процессы окисления.

Скорость испарения масла (рис. 5, б) при 150 °С имеет минимальное значение (0,025 г/ч), поэтому температурой начала испарения масла является температура ниже 150 °С.

Температуры начала окислительных процессов и испарения являются показателями, характеризующими температурную область работоспособности масла, и рекомендуются для обоснования группы эксплуатационных свойств при их классификации.

Интенсивность процессов самоорганизации при циклическом изменении температуры испытания, выраженная коэффициентом K_c , как отношение скорости окисления к скорости испарения (рис. 6), характеризуется уменьшением в циклах понижения температуры, причем в циклах 4 и 6 понижения температуры интенсивность процессов приобретает отрицательные значения за счет коагуляции продуктов окисления, вызывающих дисперсию светового потока и создающих эффект осветления окисленного масла. Согласно данным рис. 6 интенсивность процессов самоорганизации увеличивается при температуре 180 °С с увеличением времени испытания за счет повышения концентрации более энергоемких продуктов окисления.

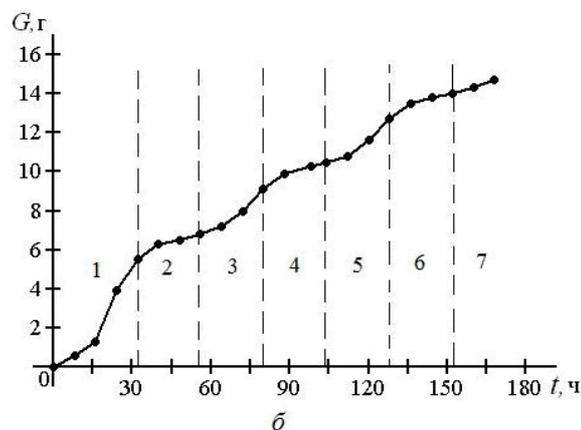
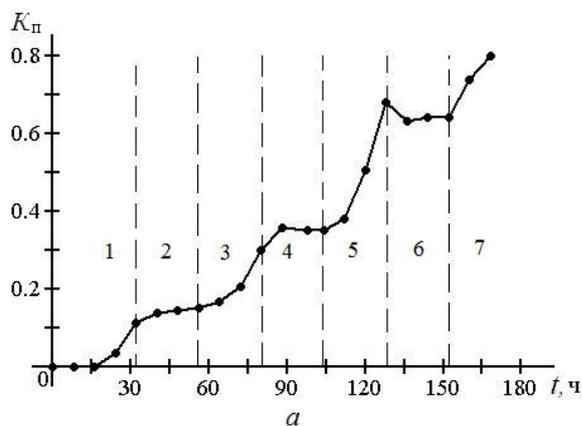


Рис. 4. Зависимость коэффициента поглощения светового потока (а) и летучести (б) от времени испытания частично синтетического моторного масла при циклическом изменении температуры: 1, 3, 5, 7 – циклы повышения температуры от 150 до 180 °С; 2, 4, 6 – циклы понижения температуры от 180 до 150 °С

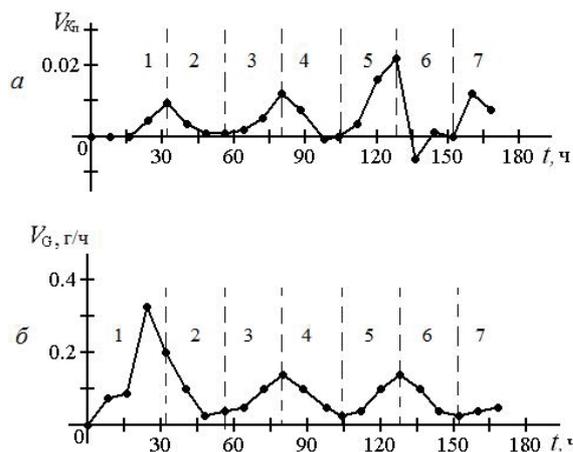


Рис. 5. Зависимости скоростей окисления $V_{\text{ок}}$ (а) и летучести V_G (б) от времени окисления частично синтетического моторного масла при циклическом изменении температуры окисления в диапазоне от 140 до 180 °С (усл. обозн. см. на рис. 4)

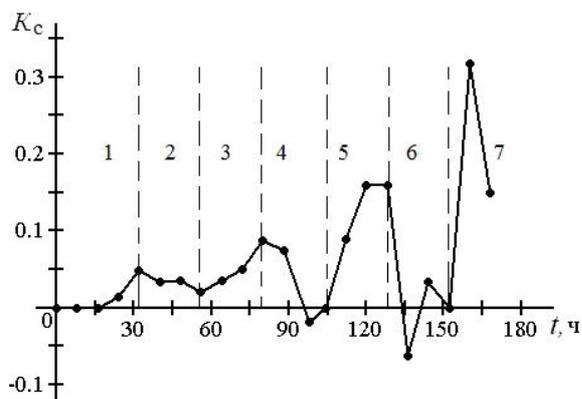


Рис. 6. Зависимость коэффициента интенсивности процессов самоорганизации, протекающих в частично синтетическом моторном масле, от времени окисления при циклически изменяющейся температуре в диапазоне от 150 до 180 °С (усл. обозн. см. на рис. 4)

Влияние продуктов окисления на противоизносные свойства масла представлено зависимостью диаметра пятна износа U от коэффициента поглощения светового потока $K_{\text{п}}$ (рис. 7, а). Показано, что противоизносные свойства моторного масла изменяются в пределах от 0,32 до 0,26 мм, причем значительные изменения наступают при коэффициенте $K_{\text{п}}=0,25$, т. е. когда образуются более энергоемкие продукты окисления. В этой связи предложен критерий противоизносных свойств Π (рис. 7, б), определяемый эмпирическим выражением:

$$\Pi = K_{\text{п}} / U. \quad (1)$$

Данный критерий характеризует концентрацию продуктов окисления на номинальной площади фрикционного контакта и описывается линейным уравнением вида

$$\Pi = 3,5 K_{\text{п}},$$

где 3,5 – коэффициент, характеризующий скорость изменения критерия Π .

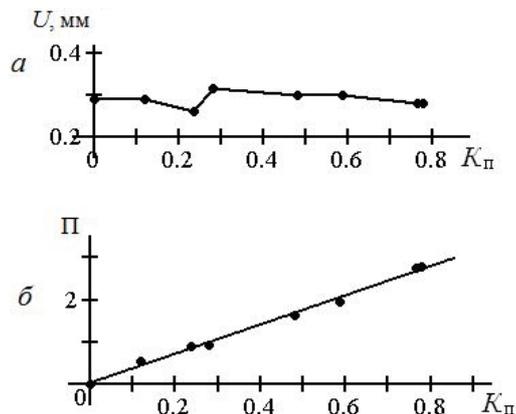


Рис. 7. Зависимость диаметра пятна износа (а) и критерия противоизносных свойств Π (б) от коэффициента поглощения светового потока частично синтетического моторного масла

Предложенный критерий рекомендуется использовать при классификации моторных масел по группам эксплуатационных свойств и контроле их противоизносных свойств без испытания на машине трения при их производстве. В этом случае используют формулу (1) и принимают график (рис. 7, б) за эталонную зависимость

$$U = K_{\text{п}} / \Pi.$$

Для контроля противоизносных свойств достаточно термостатировать масло при температуре 180 °С в течение 20...30 ч, определить коэффициент $K_{\text{п}}$ и диаметр пятна износа.

Механические процессы, протекающие на фрикционном контакте, оценивались коэффициентом электропроводности фрикционного контакта K_f и временем его формирования $t_{\text{фнк}}$, определяемыми из диаграмм записи тока (рис. 8), протекающего через фрикционный контакт от внешнего стабилизированного источника питания (3 В). Из представленных диаграмм видно, что ток уменьшается до определенного значения, а затем стабилизируется на определенной величине, зависящей от концентрации продуктов окисления. Коэффициент электропроводности K_f определялся отношением тока, протекающего через фрикционный контакт к заданному току (100 мкА), устанавливаемого при статическом положении шара и цилиндра и при наступлении стабилизации, т. е. установившегося изнашивания, а время формирования фрикционного контакта определялось по времени наступления стабилизации тока.

При термостатировании и триботехнических испытаниях смазочный материал избыточную тепловую энергию сбрасывает в виде продуктов окисления, испарения и формирования защитных граничных слоев на поверхностях трения. Поэтому в работе предложен критерий условной энергии Q_c , поглощенной смазочным материалом при термостатировании и триботехнических испытаниях, определяемый суммой коэффициента термоокислительной стабильности и параметра износа. Зависимость данного критерия от коэффициента по-

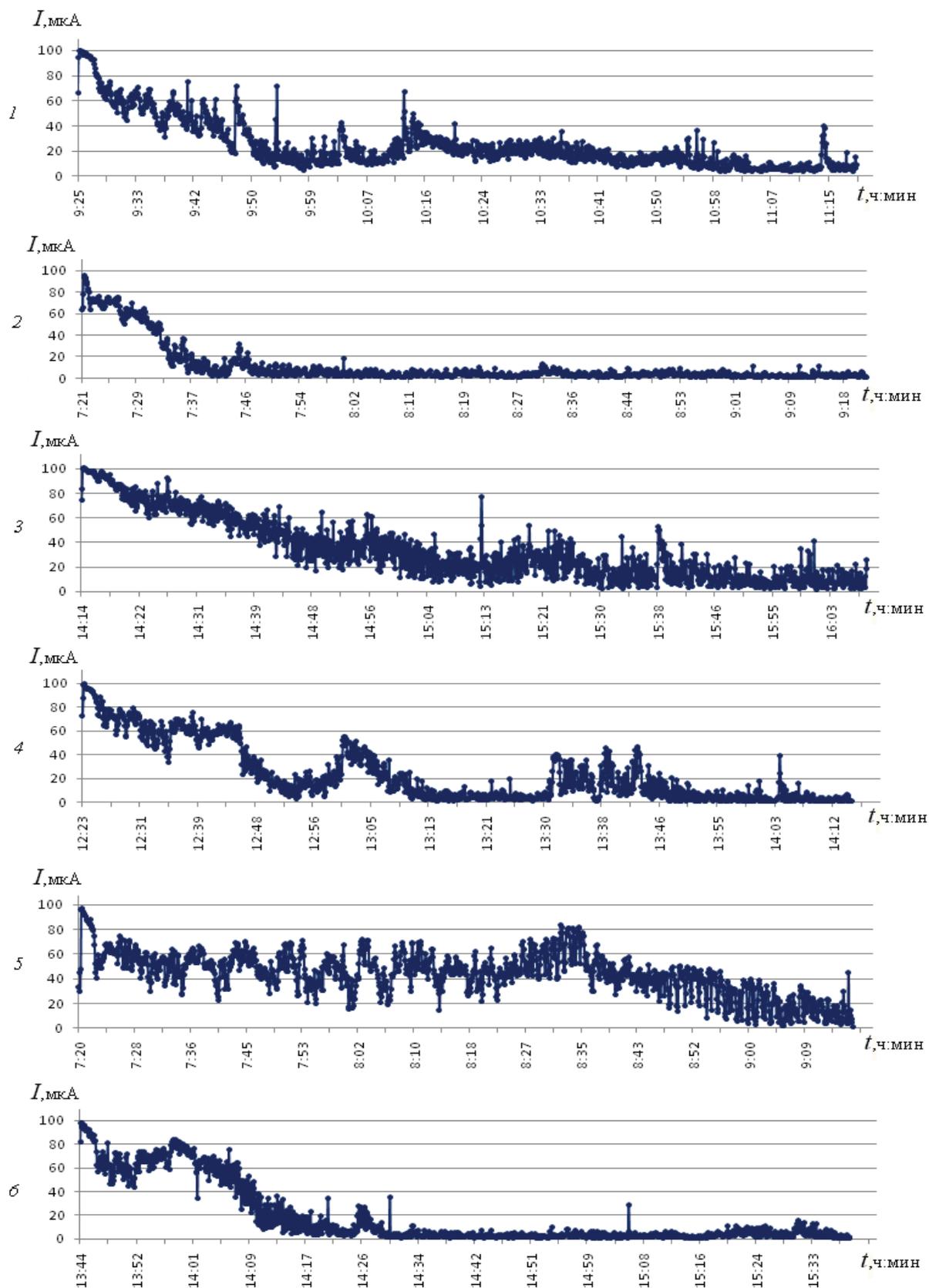


Рис. 8. Диаграммы записи тока, протекающего через фрикционный контакт, при разных концентрациях продуктов окисления частично синтетического моторного масла. Значения K_n : 1) товарное масло; 2) 0,237; 3) 0,280; 4) 0,480; 5) 0,587; 6) 0,780

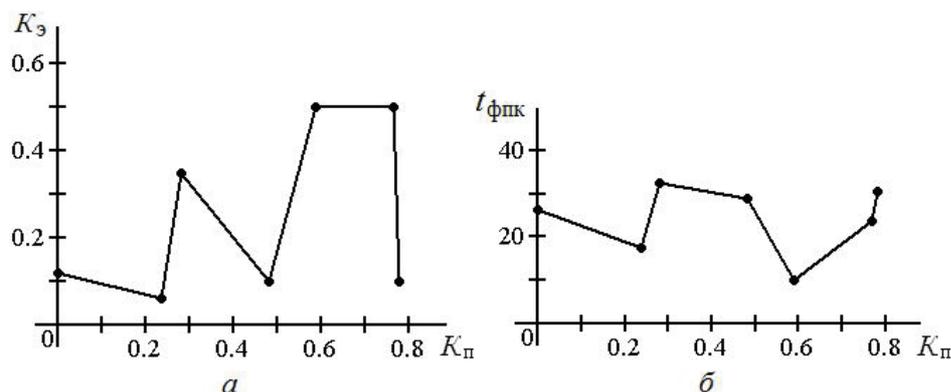


Рис. 9. Зависимость коэффициента электропроводности фрикционного контакта $K_э$ (а) и времени его формирования $t_{фпк}$ (б) от концентрации продуктов окисления частично синтетического моторного масла

глощения светового потока представлена на рис. 10 и описывается линейным уравнением вида

$$Q_y = 0,284 + 1,053 K_п,$$

где 0,284 – коэффициент, характеризующий поглощенную энергию маслом при триботехнических испытаниях; 1,053 – коэффициент, характеризующий скорость изменения критерия Q_y ; $K_п$ – коэффициент поглощения светового потока.

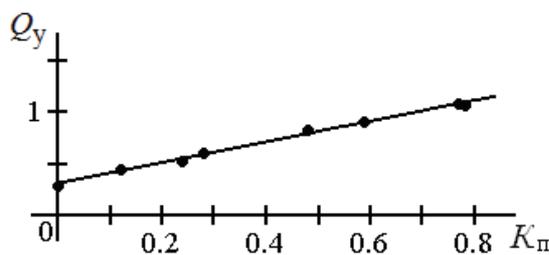


Рис. 10. Зависимость критерия условной энергии, поглощенной смазочным материалом при термостатировании и триботехнических испытаниях частично синтетического моторного масла

Данный критерий принят за условно безразмерную величину и учитывает склонность масла к окислению, испарению, влияние продуктов окисления на его противоизносные свойства и рекомендуется для применения при классификации

моторных масел по группам эксплуатационных свойств.

Выводы

1. Применение фотометрического метода позволяет установить два вида продуктов окисления при термостатировании частично синтетического масла при статической температуре 180 °С, определить изменение вязкости, летучести и интенсивность процессов самоорганизации.
2. Термостатирование масел по циклам повышения и понижения температуры позволяет установить температуры начала процессов окисления и испарения, определить температурную область работоспособности и совершенствовать систему классификации по группам эксплуатационных свойств.
3. Предложены критерии оценки противоизносных свойств, которые позволяют охарактеризовать концентрацию продуктов окисления на номинальной площади фрикционного контакта и условную тепловую энергию, поглощенную смазочным маслом при термостатировании и триботехнических испытаниях, а также более точно классифицировать масла по группам эксплуатационных свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальский Б.И., Безбородов Ю.Н., Фельдман Л.А., Малышева Н.Н. Термоокислительная стабильность трансмиссионных масел. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – 150 с.
2. Способ определения термоокислительной стабильности смазочных материалов: пат. 2408886 РФ; заявл. 09.11.2009; опубл. 10.01.2011, Бюл. № 1.

3. Способ определения смазывающей способности масел: пат. 2419791 РФ; заявл. 09.03.2010; опубл. 27.05.2011, Бюл. № 15.
4. Устройство для испытания трущихся материалов и масел: пат. 2428677 РФ; заявл. 17.05.2010; опубл. 10.09.2011, Бюл. № 25.

Поступила: 11.05.2012 г.

УДК 621.892.28

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ МОТОРНОГО МАСЛА ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ДВИГАТЕЛЯ

В.И. Верещагин, Б.И. Ковальский, М.М. Рунда

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: labsm@mail.ru

Приведены данные по изменению оптических свойств, вязкости, концентрации растворимых и нерастворимых продуктов старения и противоизносных свойств синтетического моторного масла Mobil 1 0W-40 SN/CF при эксплуатации двигателя.

Ключевые слова:

Коэффициент поглощения светового потока, относительная вязкость, критерий противоизносных свойств, растворимые и нерастворимые продукты старения масла.

Key words:

Absorption factor of light stream, relative viscosity, criterion of antiwear properties, soluble and insoluble oil aging products.

Появление на российском рынке высококачественных смазочных материалов иностранных и отечественных производителей ставит задачу повышения эффективности их использования. Одним из направлений решения этой задачи является увеличение ресурса. Поэтому целью настоящей работы является обоснование возможности увеличения ресурса моторных масел путём осуществления контроля за их состоянием в процессе эксплуатации двигателя.

Исследованию подвергалось всесезонное универсальное синтетическое моторное масло Mobil 1 0W-40 SN/CF, предназначенное для бензиновых и дизельных двигателей. Методика изложена в работах [1, 2] и предусматривает использование следующих средств контроля: фотометра – для прямого фотометрирования и определения коэффициента поглощения светового потока; малообъёмного вискозиметра; центрифуги с частотой вращения ротора 8000 об/мин – для определения состава продуктов старения масла; трёхшариковой машины трения [3] со схемой трения «шар–цилиндр» – для определения противоизносных свойств работающих масел.

Методика предусматривала отбор проб масел из прогретого двигателя массой 30 г с помощью шприца. Часть пробы масла после тщательного перемешивания подвергалась прямому фотометрированию при толщине фотометрируемого слоя 0,15 мм. Вторая часть пробы массой 9 г подвергалась центрифугированию в течение 1 ч, после чего отцентрифугированная проба подвергалась повторному фотометрированию, причём проба отбиралась с верхнего слоя. Это позволило определить концентрацию растворимых продуктов старения, а по разности между коэффициентами поглощения светового потока до и после центрифугирования определялась концентрация нерастворимых продуктов старения. Третья часть пробы масла массой 9 г использовалась для определения кинематической вязкости. Остальная проба использовалась для определения противоизносных свойств на машине трения. Параметры трения составляли: нагрузка 13 Н, скорость скольжения 0,68 м/с, темпе-

ратура масла в объёме 80 °С, время испытания 2 часа. Температура масла в процессе испытания поддерживалась автоматически с помощью терморегулятора ТР 101. Противоизносные свойства оценивались по среднеарифметическому значению диаметров пятен износа на трёх шарах.

Согласно инструкции по эксплуатации регламентируемые сроки замены масел составляют 10000 км пробега. Для исследования влияния ресурса масла на его основные свойства пробег автомобиля увеличен до 15000 км.

Зависимость коэффициента поглощения светового потока от пробега автомобиля представлена на рис. 1.

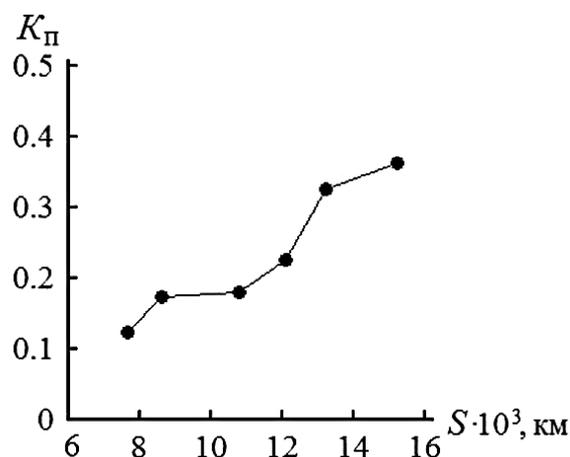


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения светового потока от пробега автомобиля

Установлено, что после отработки нормативного срока (10 тыс. км) коэффициент поглощения светового потока составил 0,18 ед., а после пробега 15,2 тыс. км он составил 0,36 ед., причём в диапазоне пробега от 8,6 до 10,8 тыс. км значение коэффициента поглощения светового потока K_p практически стабилизируется. Увеличение коэффициента K_p наблюдается после 12 тыс. км пробега, что объясняется уменьшением производительности системы фильтрации и увеличением концентрации

растворимых продуктов старения, поэтому необходимо исследовать состав продуктов старения с помощью центрифугирования проб работающих масел с последующим фотометрированием.

На рис. 2 представлены зависимости концентрации растворимых $K_{пр}$ и нерастворимых продуктов $K_{пн}$ старения от пробега автомобиля. Показано, что концентрация растворимых продуктов старения после 8,6 тыс. км растёт, а концентрация нерастворимых продуктов колеблется от 0,02 до 0,17 ед., причём в диапазоне пробега от 8,6 до 12,2 тыс. км концентрация нерастворимых продуктов изменяется от 0,11 до 0,09 ед. При сравнении зависимостей на рис. 1 и 2 видно, что основное влияние на коэффициент $K_{п}$ (рис. 1) оказывают нерастворимые продукты старения. Колебания значений концентрации нерастворимых продуктов старения вызваны периодическим преобразованием растворимых продуктов старения в нерастворимые. Этот период характеризуется увеличением концентрации нерастворимых продуктов и наблюдается за время пробега автомобиля от 7,6 до 8,6 и от 12,2 до 13,2 тыс. км, однако после уменьшения скорости преобразования за счёт уменьшения концентрации растворимых продуктов система фильтрации уменьшает концентрацию нерастворимых продуктов (период от 8,6 до 12,2 и от 13,2 до 15,2 тыс. км).

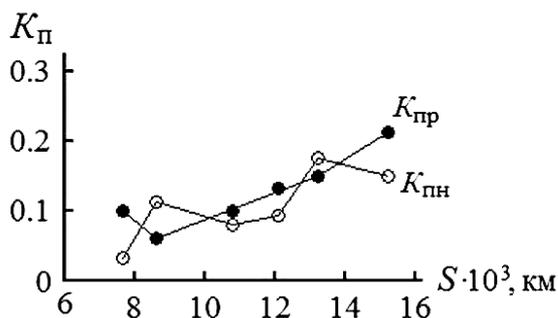


Рис. 2. Зависимости концентрации растворимых $K_{пр}$ и нерастворимых продуктов $K_{пн}$ старения от пробега автомобиля

Изменение вязкости работавшего масла (рис. 3) оценивалось коэффициентом относительной вязкости K_v , определяемым отношением вязкости работавшего масла к вязкости товарного (рис. 3). Установлено, что вязкость работавшего масла за время пробега 15,2 тыс. км увеличилась на 16 % (допускается 35 %), поэтому по данному показателю данное масло имеет значительный резерв.

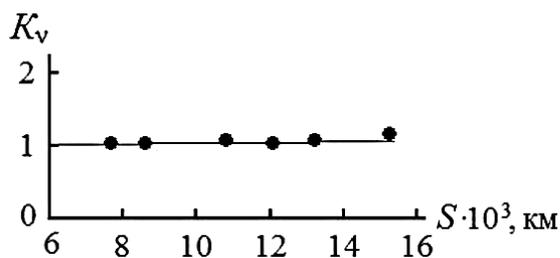


Рис. 3. Зависимость коэффициента относительной вязкости K_v от пробега автомобиля

Противоизносные свойства работающего масла (рис. 4) за весь период эксплуатации двигателя характеризуются двумя участками. На первом участке (пробег 7,6 тыс. км) противоизносные свойства понижаются по сравнению с товарным маслом (точка на ординате), а затем повышаются, и после пробега от 13,0 тыс. км они превышают противоизносные свойства товарного масла. Повышение противоизносных свойств наступает в период повышения концентрации растворимых продуктов старения (см. рис. 2), поэтому концентрация и состав продуктов старения в масле определяют противоизносные свойства работающих масел.

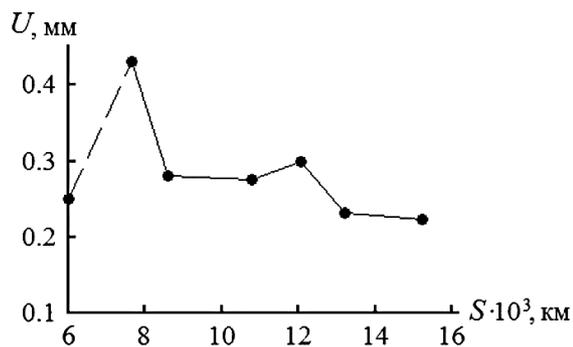


Рис. 4. Зависимость параметра износа от пробега автомобиля

На рис. 5 представлена зависимость параметра износа U от концентрации общих продуктов старения, выраженных коэффициентом $K_{п}$. Показано, что при значениях коэффициента $K_{п} > 0,12$ ед. противоизносные свойства работающего масла повышаются, т. е. по данному параметру масло Mobil 1 0W-40 SN/CF имеет запас ресурса. Кроме того, замена масла произошла, когда противоизносные свойства его превышали товарное масло.

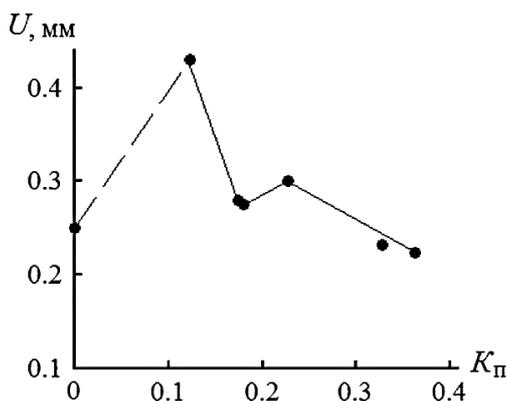


Рис. 5. Зависимость параметра износа U от коэффициента поглощения светового потока при старении синтетического моторного масла Mobil 1 0W-40 SN/CF

В этой связи предложен критерий оценки противоизносных свойств Π , определяемый отношением коэффициента $K_{п}$ к диаметру пятна износа и характеризующий условную концентрацию продуктов старения на номинальной площади фрикционного контакта, зависимость которого от коэффициента $K_{п}$ представлена на рис. 6.

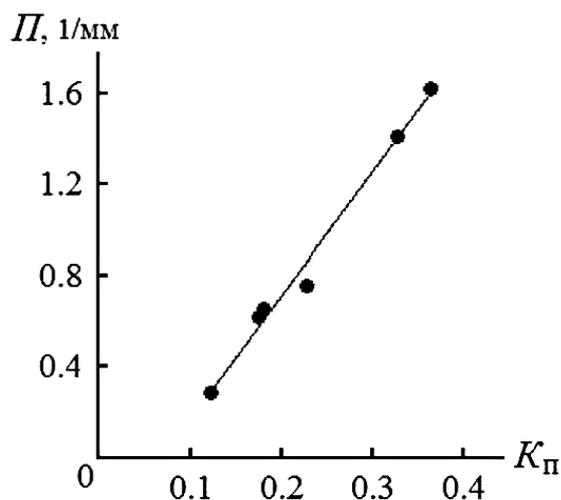


Рис. 6. Зависимость критерия противоизносных свойств от коэффициента поглощения светового потока при старении синтетического моторного масла Mobil 10W-40 SN/CF

Установлена линейная зависимость между этими показателями, описываемая уравнением вида

$$P = \alpha K_{\Pi} - b,$$

где α – коэффициент, характеризующий скорость изменения критерия P ; b – начальное значение критерия P при замене масла в картере двигателя.

Регрессионное уравнение зависимости $P=f(K_{\Pi})$ имеет вид

$$P = 5,25 K_{\Pi} - 0,29.$$

Данное уравнение можно использовать для прогнозирования противоизносных свойств рабо-

тающего масла Mobil 1 0W-40 SN/CF без испытания на противоизносные свойства на машине трения. Для этого достаточно найти коэффициент поглощения светового потока, с помощью графика (рис. 6) определить критерий и по нему определить параметр износа $U = K_{\Pi}/P$.

Выводы

1. Проведённые испытания показали, что применение таких средств контроля состояния работающих моторных масел, как фотометр, вискозиметр, центрифуга и трёхшариковая машина трения позволяет осуществлять текущий контроль состояния моторных масел в период эксплуатации двигателей и замену масел по фактическому состоянию, обеспечивать эффективное их использование и повысить надёжность двигателей.
2. Применение критерия противоизносных свойств позволяет прогнозировать противоизносные свойства моторных масел без испытания на изнашивание при условии определения эталонных зависимостей $P=f(K_{\Pi})$ для каждого смазочного материала.
3. Проведённые испытания синтетического масла Mobil 1 0W-40 SN/CF показали, что оно не отработало свой потенциальный ресурс даже при увеличении нормативного пробега в 1,5 раза. При наборе статистических данных с применением предложенных средств контроля возникает возможность установления и обоснования предельного состояния для каждого смазочного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методика оценки ресурса моторных масел / В.И. Верещагин, Б.И. Ковальский, А.С. Попов // Вестник КрасГАУ. – 2007. – Вып. 6. – С. 169–174.
2. Методика исследования противоизносных свойств товарных моторных масел и механохимических процессов при граничном трении скольжения / Б.И. Ковальский, Ю.Н. Безбородов

и др. // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 2. – С. 42–46.

3. Устройство для испытания трущихся материалов и масел: пат. 2428677 РФ; опубл. 10.09.2011, Бюл. № 25.

Поступила 04.05.2012 г.

УДК 544.733.422:519.87

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ АЭРОЗОЛЕЙ ПРИ УЛЬТРАЗВУКОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

О.Б. Кудряшова, А.А. Антонникова

Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск

E-mail: olgakudr@inbox.ru

Математическая модель основана на уравнении Смолуховского, описывающем динамику изменения функции распределения частиц аэрозолей по размерам с учетом ультразвукового воздействия, испарения (для жидкокапельных аэрозолей) и осаждения. Проведено исследование асимптотического поведения функции вероятности столкновений частиц аэрозоля от частоты ультразвука.

Ключевые слова:

Аэрозоль, распределение по размерам, ультразвуковое воздействие, испарение, коагуляция, осаждение.

Key words:

Aerosol, size distribution, ultrasonic influence, evaporation, coagulation, sedimentation.

Процессу ультразвуковой (УЗ) коагуляции аэрозолей посвящено много работ. Многие авторы рассматривают процессы взаимодействия частиц теоретически, но результаты эксперимента, тем не менее, описываются эмпирическими формулами.

В работах [1, 2] приводятся математические модели, использующие балансовый подход Смолуховского в сочетании с выкладками ортокинетической и гидродинамической гипотез взаимодействия частиц. При этом проведено сравнение с экспериментом по оптимальным частотам и амплитудам звукового воздействия. Однако полученные выражения не наглядны, не позволяют проследить асимптотические закономерности, и для прогнозирования процессов коагуляции аэрозолей приходится либо проводить численный эксперимент, либо пользоваться более наглядными, но не обоснованными физически интерполяционными формулами, описывающими физический эксперимент.

В работе предложены выражения для кинетики коагуляции в зависимости от основных параметров воздействия, свойств аэрозоля и среды: частоты и амплитуды звуковых колебаний, концентрации и дисперсного состава исходного аэрозоля, вязкости и температуры среды, физико-химических параметров материала частиц.

Рассмотрим трансформацию распределения частиц в произвольном облаке по размерам с течением времени t . Следуя [3–5], запишем балансовое уравнение (интегральный вариант уравнения Смолуховского), описывающее изменение со временем функции распределения частиц по размерам:

$$\frac{\partial f(D, t)}{\partial t} = I_1 + I_2 + I_3, \quad (1)$$

где I_1 описывает убыль частиц с диаметром D за единицу времени в единице объема за счет столкновения капли диаметра D с любой каплей диаметра D_1 :

$$I_1 = -f(D, t) \int_0^{D_{кр}(t)} K(D, D_1) f(D_1, t) dD_1,$$

где $K(D, D_1)$ – вероятность столкновений частиц;

$$D_{кр} = \sqrt{\frac{9\eta H}{2g\rho_c t}}; \quad H – \text{верхняя граница облака}; \quad g –$$

ускорение свободного падения; η – динамическая вязкость среды; ρ_c – плотность частицы. Все частицы, масса которых превышает критическое значение $D_{кр}(t)$, выпадают из облака и не принимают дальнейшего участия в коагуляции; спектр частиц на каждый момент времени t будет обретен справа за счет седиментации крупных частиц, причем, постепенно эта граница будет смещаться в сторону все более малых частиц.

Член I_2 описывает возникновение частиц диаметра D за счет столкновения капель с диаметрами D_1 и $D-D_1$:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^D K(D-D_1, D_1) f(D_1, t) f(D-D_1, t) dD_1.$$

Жидкие капли испаряются тем быстрее, чем меньше их размер, за счет кривизны поверхности. Член I_3 описывает уменьшение массы частиц за счет их испарения с учетом уравнения Кельвина для капиллярного эффекта:

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{dm}{dt} f(D) \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{2\pi D_f M (p_{drop} - p_{pl}) f(D)}{RT} \right],$$

где m – масса капли; D_f – коэффициент диффузии; M – молекулярная масса жидкой капли; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; p_{drop} и p_{pl} – парциальное давление над каплей и плоской поверхностью.

Член уравнения I_3 имеет смысл для жидкокапельных аэрозолей, состоящих из микронных и субмикронных капель, испарение для которых существенно из-за кривизны их поверхности, причем при невысокой влажности окружающей среды ($p_{drop} \gg p_{pl}$).

Начальные условия для уравнения (1): при $t=t_0$, $f(D, t_0) = f_0(D)$ – начальное распределение частиц

по размерам. Для описания функции распределения частиц по размерам обычно применяют гамма-распределение: $f_i(D) = aD^\alpha \exp(-bD)$, где b, α – параметры распределения; a – нормировочный коэффициент. В качестве характерного размера данного распределения можно выбрать модальный диаметр $D_0 = \alpha/b$.

Относительная концентрация аэрозоля уменьшается по сравнению с начальной n_0 за счет испарения и седиментации, и на момент времени t это уменьшение составит:

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \int_0^t \left(\int_0^{D_{sp}(t)/D_0} I_3 dx + \int_{D_{sp}(t)/D_0}^{\infty} f(D, t) dx \right) dt. \quad (2)$$

Важным вопросом является определение вероятности столкновений частиц; чем она выше, тем быстрее произойдет коагуляция и осаждение аэрозоля. В отсутствие какого-либо воздействия эта величина обуславливается броуновским движением [3]. В работе [4] вероятность столкновений частиц аэрозоля без дополнительного воздействия считалась пропорциональной сумме масс частиц:

$$K(D, D_1) = \frac{k_b n_0}{\nu} (D^3 + D_1^3), \quad (3)$$

где k_b – коэффициент пропорциональности; ν – кинематический коэффициент вязкости среды.

В условиях ультразвукового воздействия повышается вероятность столкновений частиц. В выражение (3) должны войти параметры, характеризующие ультразвуковое воздействие, прежде всего амплитуда и частота излучения.

Согласно [6], коагуляцию можно рассматривать как образование агрегатов в звуковом поле в результате взаимодействия частиц, вызванного акустическими течениями вокруг них в звуковом поле. Следуя этой работе, рассчитаем число встреч частиц в звуковом поле, полагая, что частицы встретятся в том случае, если линия тока потока, возникающего около одной из частиц и увлекающего вторую, пройдет в «трубке» диаметром, равным двум диаметрам частицы $2D$. Число встреч на единицу длины выделенной частицы за единицу времени равно $N = dS n_0 U_0$, где dS – площадка, ограниченная линиями тока; U_0 – скорость движения частиц. При невысоких уровнях звукового давления в [6] получено, что число встреч пропорционально диаметру частиц, квадрату скорости их движения (которая, в свою очередь, определяется амплитудой звуковых колебаний), концентрации частиц, коэффициенту обтекания $k_{обр}$, и обратно пропорционально вязкости среды:

$$N \approx \frac{U_0^2 n_0 k_{обр}^2 (D^3 + D_1^3)}{\nu}. \quad (4)$$

Взвешенная в газе частица под действием сил звукового поля вовлекается в колебательное движение («ортокинетическая» гипотеза). В зависимости от свойств среды, размеров и плотности частицы она может увлекаться средой лучше или хуже,

что определяется коэффициентом увлечения $k_{увл}$ – отношение амплитуды скорости взвешенной частицы к амплитуде скорости частицы газа. Считая, что между частицей и средой действует сила Стокса, получим формулу для коэффициента увлечения в виде [7]:

$$k_{увл} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad (5)$$

где ω – частота акустического воздействия; $\tau = \rho_p D^2 / 18 \eta$ – время релаксации частицы; η – динамический коэффициент вязкости среды. Анализ этого выражения показывает, что амплитуда колебания частицы тем больше отличается от амплитуды колебания окружающей среды, чем больше размер и плотность частицы, чем выше частота звука и меньше вязкость.

Учитывая выражение для коэффициента увлечения частицы в звуковом поле (4), можно считать, что частица увлекается звуковым полем, повышая вероятность столкновений с фиксированной частицей в $k_{увл}^2 k_a (1 - k_{увл})^2$ раз, где k_a – коэффициент пропорциональности. Тогда вероятность столкновений частиц с диаметрами D и D_1 пропорциональна $N (1 - k_{увл})^2$, или, с учетом (2)–(5):

$$K(D, D_1) = \frac{k_b n_0}{\nu} (D^3 + D_1^3) \left(1 + k_a U_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right)^2 \right). \quad (6)$$

Анализируя выражение (6), заметим, что:

- при отсутствии акустического поля ($k_a U_0^2 = 0$) вероятность столкновений сводится к броуновской (3);
- с повышением амплитуды воздействия (а значит, скорости U_0) вероятность повышается;
- акустическое воздействие с относительно низкими частотами ($\omega^2 \tau^2 \ll 1$) неэффективно ($k_{увл} \rightarrow 1, (1 - k_{увл}) \rightarrow 0$);
- существует оптимальная частота воздействия ($\omega^2 \tau^2 \gg 1$), наиболее эффективная с точки зрения коагуляции аэрозолей ($k_{увл} \rightarrow 0, (1 - k_{увл}) \rightarrow 1$).

Такое поведение функции (6) соответствует экспериментальным и теоретическим данным [1, 2, 4]. Пользуясь выражением (6), найдем предельно низкие (неэффективные) и оптимальные частоты ультразвукового воздействия:

$$\omega_{\min} = \frac{1}{\tau} \left[1 / \left(1 - \frac{\sigma(\sqrt{k_b n_0 D_0^3})}{U_0 \sqrt{k_a}} \right)^2 - 1 \right], \quad (7)$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{\sigma(1)} - 1 \right]. \quad (8)$$

Обозначим повышение вероятности столкновений частиц при ультразвуковом воздействии через

$$K: K_1 = \left(1 + k_a U_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right)^2 \right).$$

Поведение по-

вышающего коагуляционного коэффициента в зависимости от частоты иллюстрирует рис. 1 (водный аэрозоль, $k_a U_0^2=1$).

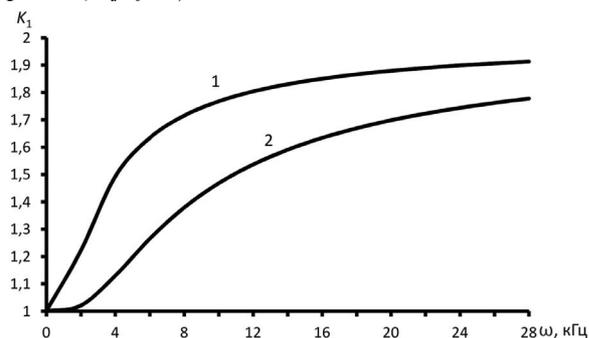


Рис. 1. Зависимость коэффициента K_1 от частоты УЗ-воздействия для водного аэрозоля: 1) $D=5$ мкм; 2) $D=1$ мкм

Расчет для водного аэрозоля минимальной и оптимальной частот воздействия по формулам (7) и (8) приведен на рис. 2.

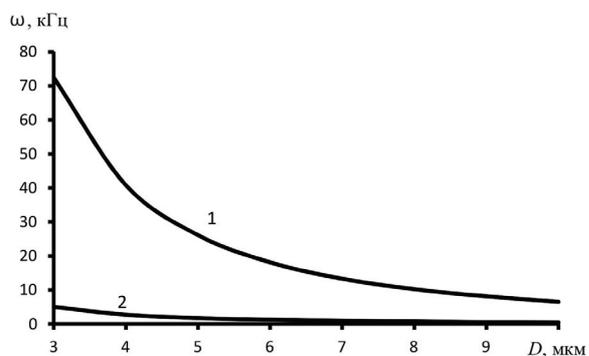


Рис. 2. Оптимальная (1) и минимальная частота (2) для водного аэрозоля

Рис. 3 иллюстрирует уменьшение массы субмикронного аэрозоля во времени в процессе коагуляции и испарения под действием ультразвука и без УЗ-воздействия. Параметры начального распределения частиц аэрозоля по размерам: $b=1$, $\alpha=0,1$. Неиспаряющийся аэрозоль (кривая 1) коагулирует и осаждаётся медленно; ультразвуковое воздействие существенно ускоряет этот процесс. ($(\omega\tau)^2=2$, кривая 2). Быстро испаряющийся субмикронный водный аэрозоль теряет массу в результате испарения (кривая 3); ультразвуковое воздействие ещё увеличивает скорость убыли массы аэрозоля (кривая 4). Эти расчеты соответствуют многочисленным экспериментальным данным, в том числе полученным авторами ранее [4]. В опытах, результаты которых приведены в работе [4], время полного осаждения аэрозоля (мука, вода) уменьшалось при УЗ-воздействии в 1,5–2,0 раза.

Начальный спектр распределения частиц по размерам претерпевает деформацию в течение времени. На рис. 4 приведено массовое распределение частиц по размерам для водного аэрозоля в начальный момент времени (кривая 1) и через 1 минуту при УЗ-воздействии для неиспаряемого (кривая 3) и испаряемого водного аэрозоля (кривая 2). Массовая

функция распределения по размерам $g(D)$ связана со счетной соотношением $g(D)=m/m_{10}f(D)$, где m_{10} – среднеарифметическая масса частиц:

$$m_{10} = \int_0^{\infty} mf(D)dD, \quad m - \text{масса частицы диаметра } D.$$

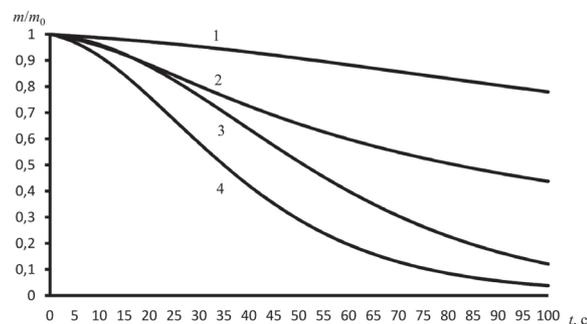


Рис. 3. Зависимость относительной массы аэрозоля от времени: 1) без испарения и без УЗ-воздействия; 2) без испарения, с УЗ-воздействием; 3) с испарением (вода), без УЗ-воздействия; 4) с испарением и с УЗ-воздействием

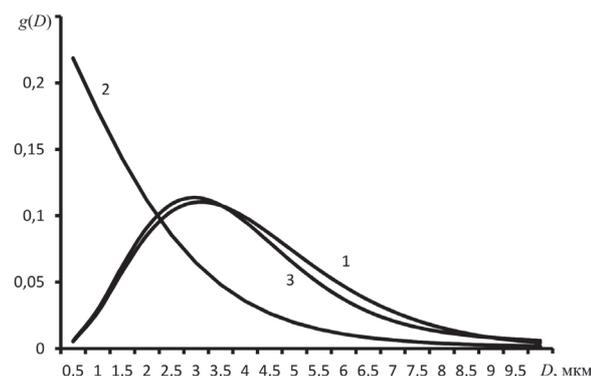


Рис. 4. Массовое распределение частиц по размерам при УЗ-воздействии: 1) начальный момент времени; 2) и 3) неиспаряемый аэрозоль через 1 мин

Спектр распределения неиспаряемого аэрозоля за этот промежуток времени практически не изменился; водяные капли из-за быстрого испарения сильно уменьшились в размерах, сместив максимум функции распределения в область $\sim 10^{-7}$ микрона. Качественный вид кривой 2, рис. 4, подтвержден в экспериментах по динамическим измерениям функции распределения субмикронных частиц водного аэрозоля [8]; количественное расхождение теоретических и экспериментальных результатов по средним диаметрам и концентрации частиц не превысило 20 %, что говорит об адекватности предлагаемой модели.

Выводы

На основе модели коагуляции аэрозоля под действием ультразвука в виде варианта интегрального уравнения Смолуховского, со стоком (испарение) и обрезанием спектра (осаждение), получе-

ны зависимости эффективности осаждения от частоты ультразвука. Показано, что для каждого характерного размера частиц аэрозоля существует оптимальная и минимальная частота акустического воздействия. Ультразвук с частотой ниже минимальной для аэрозоля с данным характерным размером частиц никак не влияет на скорость коагуляции и осаждения; повышение частоты ультразвука выше оптимальной не приводит к изменению эффективности осаждения.

С помощью численных расчетов получены зависимости относительной массы аэрозоля и массового распределения частиц по размерам от времени для испаряющихся, неиспаряющихся аэрозолей при ультразвуковом воздействии и без него. Испарение и ультразвуковое воздействие (с частотой, большей, чем минимальная для аэрозолей с данным размером частиц) оказывают существенное влияние на уменьшение концентрации частиц аэрозолей. Расчеты нашли качественное экспериментальное подтверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хмелев В.Н., Шалунова К.В., Цыганок С.Н., Барсуков Р.В., Сливин А.Н., Шалунов А.В. Ультразвуковая коагуляция аэрозолей. – Бийск: АлтГТУ, 2010. – 228 с.
2. Хмелев В.Н., Шалунов А.В., Гольх Р.Н., Шалунова К.В. Теоретическое исследование процесса акустической коагуляции газодисперсных систем // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП-2010): Матер. VII Всеросс. научно-техн. конф. – Бийск, 6–7 октября 2010 г. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2010. – С. 222–227.
3. Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 284 с.
4. Антонникова А.А., Кудряшова О.Б., Хмелев М.В., Шалунов А.В. Исследование эффективности применения ультразвуковых колебаний для осаждения мелкодисперсных аэрозолей // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 6. – С. 96–99.
5. Кудряшова О.Б. Математическая модель эволюции жидкокапельных аэрозолей // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 129–133.
6. Розенберг Л.Д. Физические основы ультразвуковой технологии. – М.: Наука, 1970. – 689 с.
7. Денисов А.С., Подольский А.А., Турбаров В.И. Об увлечении аэрозольных частиц в звуковом поле при числах Рейнольдса ≤ 1 // Акустический журнал. – 1965. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 146–155.
8. Титов С.С. Турбидиметрический высокоселективный метод и быстродействующий измерительный комплекс определения параметров нестационарных многофазных сред: дис. ... канд. техн. наук. – Бийск, 2011. – 153 с.

Поступила 10.04.2012 г.

УДК 669:539.67

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ТЕПЛОГО ИСТОЧНИКА В ОЧАГЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Г.А. Куриленко

Новосибирский государственный технический университет
E-mail: teormech@ngs.ru

Показано, как по тепловому полю образца при его поэтапном ступенчатом циклическом нагружении с возрастающей амплитудой напряжений можно определять мощность теплового источника, который как бы функционирует в очаге развития усталостной повреждаемости. По кинетике этой мощности оказалось возможным неразрушающим образом прогнозировать некоторые характеристики усталостного процесса, в частности индивидуальный предел выносливости испытываемого объекта.

Ключевые слова:

Температурное поле, амплитудное напряжение, мощность теплового источника, предел выносливости.

Key words:

Temperature field, peak stress, capacity of thermal source, endurance limit.

1. Методика эксперимента

В рамках развития термографического подхода при исследовании усталостной повреждаемости были проведены испытания трубчатого образца при его продольных циклических колебаниях. Посередине рабочей части образца на его наружной поверхности делалась риска (концентратор напряжений) глубиной 0,05 мм.

Схема испытания приведена на рис. 1, а. Образец 1 верхним концом жестко крепится к неподвижной массе 2. К нижнему концу прикрепленна масса 3, на внешнем торце которой закреплены плотно стянутые листы из трансформаторной стали. Обмотки электромагнита 4 запитаны от шкафа управления. При подаче питания на обмотки в образце возбуждаются продольные колебания. Регулируя частоту питающего напряжения, колебательную систему вводят в резонансный режим. Регулировкой силы тока устанавливают необходимую амплитуду колебаний.

Осуществляется поэтапная циклическая наработка образца со ступенчато возрастающей от этапа к этапу амплитудой колебаний. Продолжительность наработки на каждом этапе незначительна и составляет 3 % от базового числа циклов при напряжениях ниже предполагаемого предела выносливости или от расчетной долговечности образца при напряжениях выше предела выносливости.

Эксперимент показал, что через некоторый момент времени t_0 температурное поле образца практически стабилизируется. Это поле фиксировалось с помощью тепловизора «Рубин», имеющего чувствительность 0,01 °С при выключенном механизме сканирования. На полученных температурных кривых выделяется зона повышенного тепловыделения в районе риски – очаг зарождения и развития усталостных повреждений (см. рис. 1, б, в).

2. Расчетные формулы

Поставим задачу: по температурному полю $T=T(t,x)$ при колебаниях образца со стационарной амплитудой напряжений σ_a определить мощность $q_1^*=q_1^*(t,\sigma_a)$, выделяющуюся в районе концентратора напряжений, и удельную мощность $q_2=q_2(t,\sigma_a)$, выделяющуюся в остальной части образца (рис. 1, б).

Для элемента образца составим уравнение теплопроводности с учетом отдачи тепла конвекцией с его поверхности (излучением из-за его малости пренебрегаем) [1]:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_2 - r(T - T_0). \quad (1)$$

Здесь ρ , C_v , λ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала образца; T_0 – температура окружающего воздуха; $r = \alpha \pi D/A$, где α – местный коэффициент теплоотдачи конвекцией; D , A – наружный диаметр и площадь сечения образца. В выражении (1) предполагается постоянство температуры по толщине трубки вследствие ее тонкостенности.

Поскольку при $t \geq t_0$ процесс является квазистационарным, то можно принять $\partial T / \partial t \approx 0$. В этом случае уравнение (1) упрощается:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - r \frac{T}{\lambda} = -r \frac{T_0}{\lambda} - \frac{q_2}{\lambda}. \quad (2)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2):

$$T = C_1 \exp\left(x \sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right) + C_2 \exp\left(-x \sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right) + T_0 + \frac{q_2}{r}.$$

После нахождения констант интегрирования из граничных условий:

- при $x=0$, $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_1}{(\lambda A)}$, (здесь $q_1 = \frac{q_1^*}{2}$);

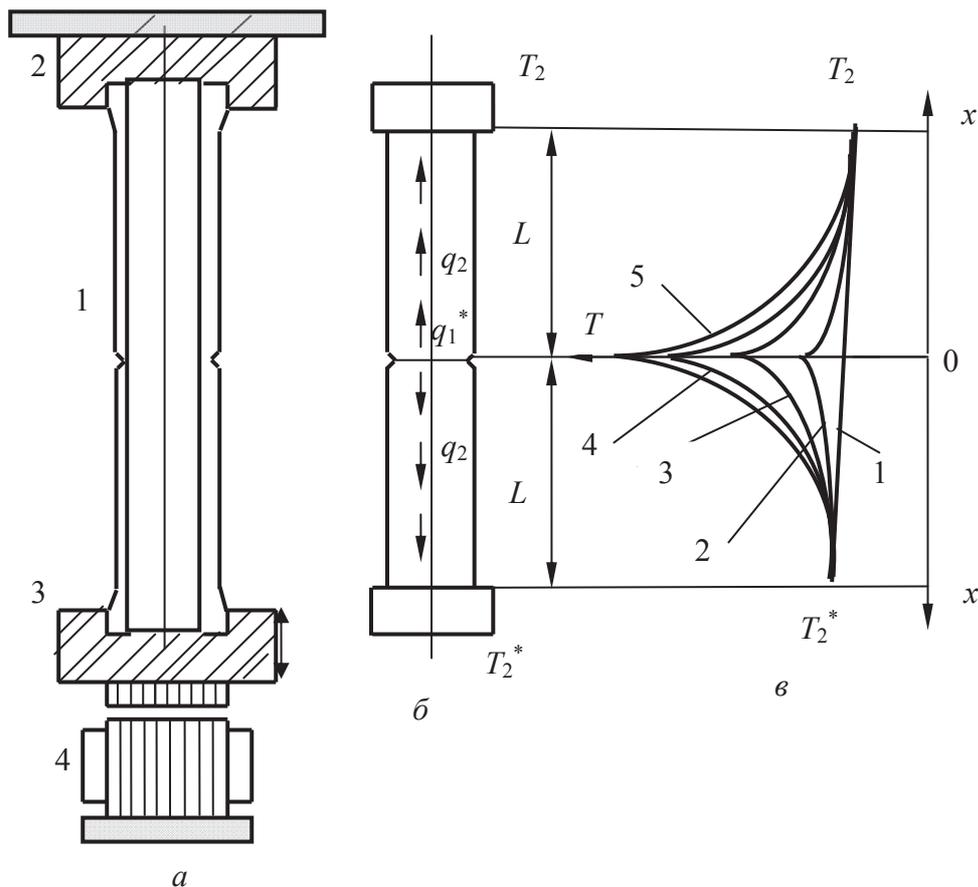


Рис. 1. Схема проведения эксперимента

- при $x=L$, $T=T_{2m}$ (T_{2m} – средняя температура на концах образца) получаем закон распределения температуры вдоль оси образца:

$$T = T_{2m}X + \left(T_0 + \frac{q_2}{r}\right)(1-X) + \frac{q_1}{A\sqrt{r\lambda}} \left[X \exp\left(L\sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right) - \exp\left(x\sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right) \right]. \quad (3)$$

Здесь $X = \frac{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right)}{\operatorname{ch}\left(L\sqrt{\frac{r}{\lambda}}\right)}$.

3. Результаты эксперимента

На рис. 1, б, представлены пять экспериментальных кривых по результатам испытаний одного образца. Для определения величин q_1^* и q_2 следует обработать эти кривые с учетом распределения температуры по выражению (3). Каждая температурная кривая соответствует определенному уровню σ_a . Чем выше σ_a , тем резче возрастает температура в районе концентратора напряжений ($x=0$).

Расчет ведем по шести точкам на левой и правой ветвях температурных кривых. Их координаты:

$x_1=0$; $x_2=7,8$; $x_3=15,8$; $x_4=23,7$; $x_5=31,6$; $x_6=40$ мм. Асимметрия левых и правых ветвей температурных кривых объясняется тем обстоятельством, что нижняя масса 3 имеет более высокую температуру, чем верхняя, т. к. она, несмотря на ее охлаждение, нагревается от электромагнита: $T_2^* - T_2 = 1$ °С. Поэтому возникает небольшой дополнительный тепловой поток от нижней массы к верхней, который, используя принцип суперпозиции, можно исключить из расчетов. Для этого температуры симметричных расчетных точек усредняются и в уравнении (3)

$$T_{2m} = \frac{T_2 + T_2^*}{2}.$$

Обработка температурных кривых проводилась по методу наименьших квадратов [2]. В таблице представлены исходные данные для обработки, взятые по кривой 5 из рис. 1, в.

После определения коэффициентов нормальных уравнений последние принимают вид:

$$6q_1 + 7,64 \cdot 10^{-6}q_2 = 0,402;$$

$$7,64 \cdot 10^{-6}q_1 + 10,8 \cdot 10^{-12}q_2 = 0,513 \cdot 10^{-6}.$$

Из решения этой системы находились q_1 и q_2 . Затем определялись веса этих величин и средние квадратические ошибки на единицу веса при определенной доверительной вероятности p . Оказалось, что q_1^* практически не зависит от того, в какой мо-

Таблица. Обработка результатов эксперимента

| Номер точки | $x, \text{ м}$ | $T, \text{ К}$ | Условные уравнения (на основе фор.(3)) | Канонический вид условных ур. | Канонич. вид нормальных ур. |
|-------------|----------------|----------------|--|------------------------------------|---|
| 1 | 0 | 295,98 | $q_1+0,68 \cdot 10^{-6} q_2=0,067$ | $a q_1+b q_2=l_k$ ($i=j=k=6$) | $[aa]q_1+[ab]q_2=[a];$ $[ba]q_1+[bb]q_2=[b]$ |
| 2 | 0,0079 | 295,60 | $q_1+0,88 \cdot 10^{-6} q_2=0,066$ | | |
| 3 | 0,0158 | 295,30 | $q_1+1,11 \cdot 10^{-6} q_2=0,065$ | | |
| 4 | 0,0237 | 295,11 | $q_1+1,34 \cdot 10^{-6} q_2=0,069$ | | |
| 5 | 0,0316 | 294,89 | $q_1+1,53 \cdot 10^{-6} q_2=0,066$ | | |
| 6 | 0,0400 | 294,66 | $q_1+2,10 \cdot 10^{-6} q_2=0,069$ | | |

мент времени (при $t \geq t_0$) на соответствующем этапе нагружения велся расчет, а зависит только от σ_a , т. е. $q_1^* = q_1(\sigma_a)$.

В результате получилось:

при $p=0,68$ $q_1^*=0,06170,002$ (Вт), $q_2=8501500$ (Вт/м³);
при $p=0,95$ $q_1^*=0,06170,004$ (Вт), $q_2=8503000$ (Вт/м³).

Низкая точность расчета q_2 вполне закономерна и вызвана двумя обстоятельствами. Во-первых, эта величина очень маленькая по сравнению с q_1 (если их привести к одной размерности, то с учетом объема всей регулярной части образца $V=2AL=1,58 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$, $q_2^*=q_2 \cdot V=0,001$ Вт, т. е. $q_1^* \gg q_2^*$). Во-вторых, q_2 при обработке кривых по методу наименьших квадратов определяется как разность двух очень близких по значению величин, поэтому даже небольшие погрешности, связанные с их расчетом, многократно возрастают при расчете q_2 .

Но практический интерес представляет только мощность q_1^* , выделяющаяся в зоне концентратора напряжений, т. к. именно эта мощность ответственна за процесс накопления усталостной повреждаемости. Величина q_1^* подсчитана с удовлетворительной точностью.

Расчет выполнен при: $\rho=7800$ кг/м³, $\alpha=23,2$ Вт/(м²К), $c_v=662$ Дж/(кг·К), $\lambda=38$ Вт/(м·К), $D=18,3$ мм, $A=33,4$ мм², $L=47,5$ мм.

4. Выводы

1. Результаты работы показали практическую возможность использования теплового метода для исследования процесса накопления и развития

усталостной повреждаемости (по мощности теплового источника q_1^* в очаге повреждаемости) [3].

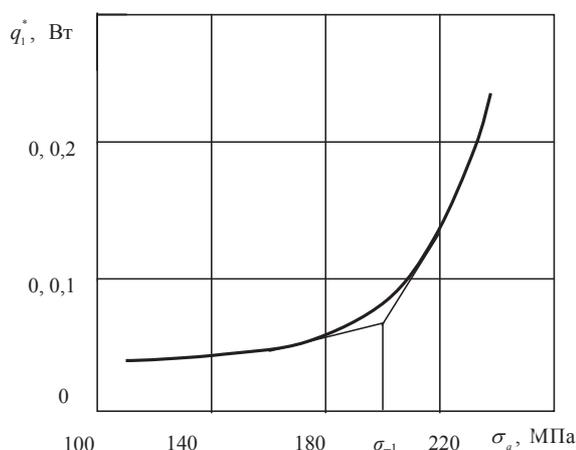


Рис. 2. Кривая $q_1^*=q_1^*(\sigma_a)$, полученная по результатам испытания образца из стали Ст. 45 на шести уровнях амплитудных напряжений σ_a

2. По кинетике q_1^* в зависимости от уровня амплитудных напряжений σ_a оказалось возможным неразрушающим образом определять индивидуальные пределы выносливости σ_{-1} испытанных образцов.

Из рис. 2 видно, что кривая $q_1^*=q_1^*(\sigma_a)$ в районе предела выносливости σ_{-1} имеет характерный излом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник машиностроителя / под ред. Н.С. Ачеркана. – М.: Машиностроение, 1960. – Т. 2. – 740 с.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.

3. Kurilenko G.A. Predicting crack resistance by infrared thermography // Proceedings of Quantitative Infrared Thermography Conference QIRT 96. – Stuttgart, 1997. – P. 91–95.

Поступила 13.12.2012 г.

УДК 621.45.042:532.592.2:544.772

РАСПЫЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СЖАТЫМ ВОЗДУХОМ

Н.В. Коровина, О.Б. Кудряшова, Б.И. Ворожцов, Э.Р. Шрагер

Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск

E-mail: olgakudr@inbox.ru

Предложена физико-математическая модель импульсного распылителя, работающего от источника сжатого газа. Показана роль кавитации в процессе распыления. Приведен ряд результатов параметрических исследований модели, устанавливающих зависимости дисперсности аэрозоля, угла распыла и массового расхода жидкости от безразмерных параметров, характеризующих геометрические свойства распылителя. Физико-математическая модель позволяет подбирать характеристики распылителя с целью получения аэрозольных сред с заранее заданными параметрами.

Ключевые слова:

Аэрозоль, дисперсность, импульсное воздействие, кавитация, барботирование.

Key words:

Aerosol, dispersion, pulse influence, cavitation, bubling.

Существующие методы создания аэрозолей не всегда удовлетворяют предъявляемым к ним требованиям по дисперсности и времени генерации. Во многих практически важных приложениях требуется быстро, в течение нескольких секунд, создать облако аэрозоля с характерным размером капель 1...10 мкм или меньше микрона. Например, тушение пожара в замкнутом пространстве (телекоммуникационные шкафы, кабины, узкие коридоры, лифты), дезинфекция помещений, осаждение дыма и пыли, ингаляция в медицине и ветеринарии и т. п. требуют быстрой генерации аэрозольного облака с развитой поверхностью капель, что позволяет им наиболее полно взаимодействовать со средой. Развитие традиционных способов распыления жидкостей, видимо, достигло своего технологического предела по скорости создания и степени дисперсности аэрозолей, что определяет актуальность развития новых подходов к решению данной проблемы. Разработка импульсного распылителя позволит удовлетворить требованиям автономности и портативности генераторов аэрозолей, что также бывает важно в критических ситуациях. Как было показано в работах [1–3], где рассматривалась модель импульсного распылителя, использующего энергию ВЭМ, развитие ударно-акустической кавитации в такой модели ведет к уменьшению размеров получаемых частиц по сравнению с теми, которые можно наблюдать при использовании обычных способов распыления, основанных на аэродинамическом разрушении капель. Мелкодисперсный аэрозоль успешно получается и с применением ультразвуковых распылителей, что также основано на эффекте кавитации; однако время получения облака аэрозоля импульсным методом меньше в сотни раз.

Таким образом, импульсный метод распыления уже известен и хорошо себя зарекомендовал, но на небольших объемах распыляемой жидкости. Из соображений безопасности нельзя применять ВЭМ для распыления объемов жидкости, измеряемых литрами и кубометрами. Необходимо разработать более технологичный способ распыления

жидкости, основанный на тех же принципах, что и распылитель «взрывного» типа, с аналогичными характеристиками дисперсности и времени генерации облака. В работе предложена новая конструкция и физико-математическая модель такого распылителя.

Рассмотрим вариант конструктивной схемы распылителя, когда сжатый газ используется не только для создания ударного импульса, но и для раскрутки жидкости по принципу центробежной форсунки. В этом случае результирующую конструкцию можно отнести к классу комбинированного устройства, в котором заложены принципы как центробежной, так и пневматической форсунки импульсного типа.

Распылитель (рис. 1) состоит из компрессионной камеры 1, емкости с распыляемой жидкостью 2, емкости которой ограничены мембранами 3. Площадь поперечного сечения конструкции – S , высота емкости с жидкостью – L . Через отверстия 4 тангенциально поступает газ под давлением p . Выброс жидкости происходит из отверстия 5. Предсопловой блок имеет воздушный зазор b объемом $V_{пnb}$.

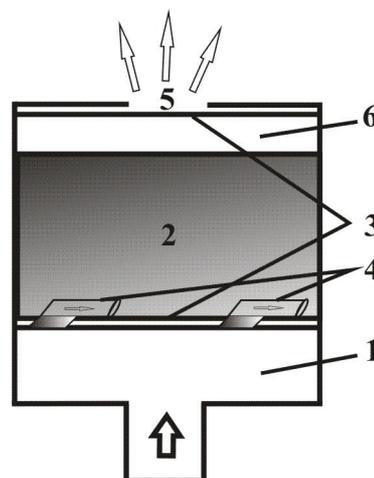


Рис. 1. Схема ударно-волнового распылителя (сжатый воздух)

Сжатый газ, проходя через объем жидкости, раскручивает ее, барботирует и накапливается в предсопловом объеме b . Частично газ растворяется в жидкости, образуя зародыши кавитации – сжатые под давлением микропузырьки. При достижении заранее заданного давления p_{cr} происходит разрыв верхней мембраны. При этом происходит «вскипание» смеси – расширение пузырьков. Разгоняясь от перепада давления, жидкогазовая смесь двинется к сопловому торцу и, достигнув сопловой крышки, ударится об нее. Резкое повышение давления (гидроудар) формирует ударную волну навстречу потоку, доходит до основания, отражается и при определенных условиях обеспечивает кавитацию жидкости. Как будет показано ниже, импульс давления необходим для развития в жидкости ударно-волновой кавитации, что, в свою очередь, требуется для обеспечения более высокой дисперсности получаемого аэрозоля.

Чтобы оценить (в стационарном приближении) амплитуду ударной волны, возникающей при гидроударе, используем уравнение неразрывности на сечении сопла: $Su = S_n u_n$, где u – скорость движения газожидкостной смеси внутри конструкции; S_n – площадь отверстия распылителя; и уравнение Бернулли (без учета сжимаемости кавитированной жидкости, что справедливо для низких концентраций газа):

$$p + \frac{k\rho_l}{2} u^2 = p_a + \frac{k\rho_l}{2} u_n^2,$$

где p_a – давление во внешней среде. Тогда скорость, с которой смесь ударяется о сопловую торцевую поверхность, определяется выражением

$$u = \sqrt{\frac{2(p - p_a)}{k\rho_l((S/S_n)^2 - 1)}}. \quad (1)$$

Скорость после истечения из сопла определится выражением

$$u_n = \frac{S}{S_n} \sqrt{\frac{2(p - p_a)}{k\rho_l((S/S_n)^2 - 1)}}. \quad (2)$$

Тогда в соответствии с формулой Жуковского амплитуда давления в результате гидроудара составит: $p_m = \rho_{mix} c u_n^2$, где c – скорость звука; ρ_{mix} – плотность газожидкостной смеси, $\rho_{mix} = k\rho_l$, где k – коэффициент, характеризующий изменение плотности жидкости. Можно определить величину этого коэффициента, оценив количество растворенного в жидкости газа, которое в соответствии с законом Генри пропорционально парциальному давлению газа над жидкостью. Так, для воздуха под давлением 8,5 МПа растворенный газ изменит плотность жидкости в $k=0,82$ раза. При таком значении коэффициента k концентрация растворенного газа (порядка 10^{-4} для воды при указанном давлении) достаточно мала, чтобы жидкость можно было считать несжимаемой.

Ударная волна в относительно плоском слое жидкости испытывает ряд отражений с постепенным затуханием. Если время истечения жидкости будет

много больше времени прохождения волны, установятся резонансные акустические колебания с длиной волны $\lambda=2L$ и частотой $\omega = \frac{\pi c}{L}$. Интенсив-

ность звукового поля за время прохождения волны составит: $I = \frac{Qc}{LS}$, где Q – энергия ударного воздей-

ствия, равная энергии, запасенной в сжатом газе в предсопловом объеме: $Q = i/2 V_{pnb} p_{cr}$, где i – число степеней свободы молекулы газа (для трехатомного газа советуют принять $i=7$ [4]). С другой стороны, интенсивность волнового поля $I = \frac{\rho_l Z_m^2 \omega^2 c}{2}$. Отсюда

получаем выражение для амплитуды смещения частиц в звуковой волне:

$$Z_m = \sqrt{\frac{2Qc}{L\rho_l S \omega^2 c}}.$$

Получим безразмерный параметр

$$W_o = \frac{Z_m}{L} = \frac{1}{\pi c} \sqrt{\frac{2Q}{M_l}},$$

характеризующий эффективность процессов кавитации, – величина плоского разрыва по отношению к высоте столбика жидкости. Этот параметр определяется прежде всего величиной энергии сжатого газа по отношению к массе жидкости: чем больше это отношение, тем выше эффективность кавитации. Если данный параметр мал, то процессами ударно-волновой кавитации в задаче можно пренебречь.

Следующая за волной сжатия плоская волна разрежения с амплитудой Z_m порождает плоский разрыв с эффективной толщиной $Z_{ef} = Z_m/\sqrt{2}$ [5]. Фаза сжатия приводит к преобразованию плоского разрыва в ансамбль шарообразных пузырьков диаметра D_b , заполненных водяными парами и ранее растворенными в воде газами. При равномерном наполнении жидкости такими пузырьками можно выделить элемент, частично заполненный водой, частично – газами и парами воды; его плотность составит $k\rho_l$, $D_b = (1-k)Z_{ef}$. Тогда, с учетом (1), получим выражение для диаметра пузырька:

$$D_b = \frac{L(1-k)}{\pi c} \sqrt{\frac{Q}{M_l}}.$$

Газожидкостная смесь, представляющая собой водяной каркас с распределенными в нем кавитационными пузырьками, под действием давления сжатого газа вырывается через отверстие. В предположении, что в момент истечения кавитированной жидкости каждый пузырек, находящийся под давлением p , раздуется до атмосферного и в этот момент разорвется на капли диаметром, равным толщине водяного слоя, в работе [1] получена оценка диаметра капель:

$$D_d = \frac{D_b}{2} \left[\sqrt[3]{\frac{k}{1-k} + \left(\frac{p_m}{p_a}\right)^{1/\gamma}} - \left(\frac{p_m}{p_a}\right)^{1/3\gamma} \right]. \quad (3)$$

Проведем оценки величин времени, характеризующих процесс. Время прохождения волны по слою жидкости толщиной L составит: $t_w=L/c$, где c – скорость звука в кавитированной жидкости. Время истечения можно оценить как $t_{ex}=L/u_n$, где u_n – скорость истечения, определяемая по формуле (2). Тогда для воды (если скорость звука не меняется в кавитированной жидкости) отношение времени прохождения волны ко времени истечения: $t_w/t_{ex}=u_n/c \approx 0,03 \pm 0,1 \ll 1$ при рассматриваемых уровнях давлений (порядка 1...5 МПа). Таким образом, в процессе истечения жидкости из сопла конструкции в ее толщине успевают развиться акустические колебания, вызывающие кавитацию, причем таких колебаний пройдет не менее 10. В этом случае устанавливается стационарный режим истечения. Поскольку жидкость движется, как показано в [7], схлопывания кавитационных пузырьков не происходит, и они разрывают сплошность жидкости, способствуя в дальнейшем образованию более мелких капель аэрозоля, чем при распылении некавитированной жидкости. Более подробно этот вопрос будет обсужден ниже.

Для описания первой стадии процесса рассмотрим истечение газа из камеры I через небольшое отверстие при поддержании в резервуаре постоянного давления. Будем считать, что размеры резервуара настолько велики по сравнению с размерами выходного отверстия, что можно полностью пренебречь скоростью движения газа внутри резервуара, и, следовательно, давление и плотность газа внутри резервуара будут иметь значения p , ρ . Давление во внешней среде обозначим через p_a . Скорость истечения газа можно определять по формуле [6]:

$$v_g = \frac{1}{\rho S_1} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p \rho \left[\left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}$$

где γ – показатель адиабаты истекающего газа.

Из закона сохранения импульса находим тангенциальную скорость движения жидкости:

$$v_m = \frac{\rho}{\rho_l} v_g, \quad (4)$$

где ρ_l – плотность жидкости.

В рассматриваемой конструкции импульсного распылителя происходит раскручивание жидкости, как в центробежной форсунке. Отличие от принципа центробежной форсунки заключается в том, что в отверстия 4 (рис. 1) втекает не жидкость, а сжатый газ, передавая импульс движения жидкости и раскручивая ее. Теория центробежной форсунки была разработана Г.Н. Абрамовичем и развита (с учетом сил трения) Л.А. Клячко. Поскольку в емкости с жидкостью создаются все условия, соответствующие классической центробежной форсунке, считая скорость «втекания» жидкости по формуле (4), пренебрегая сжимаемостью кавитированной жидкости, воспользуемся этой теорией для приближенного описания процессов истече-

ния из форсунки, оценки основных эксплуатационных характеристик устройства в зависимости от параметров конструкции.

Необходимо рассчитать геометрический комплекс A (Абрамович Г.Н.):

$$A = \frac{(R - r_{in})r_n}{nr_{in}^2} = \left(\sqrt{\frac{S}{S_{in}}} - 1 \right) \sqrt{\frac{S_n}{S_{in}}} \frac{1}{n},$$

где R – радиус емкости с жидкостью; r_{in} – радиус входного отверстия; r_n – радиус сопла; S_{in} – площадь входных отверстий. Эквивалент геометрического комплекса, учитывающий вязкость (Клячко Л.А.):

$$A_e = \frac{A}{1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R^2}{r_e^2} - A \right)} = \frac{A}{1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{S}{S_{in}} - A \right)},$$

где $r_e = \sqrt{\frac{S_{in}}{\pi}}$ – эквивалентный радиус отверстий;

$\lambda = \frac{1,05}{Re^{0,3}}$ – коэффициент трения, критерий Рей-

нольдса $Re = \frac{2u_n r_{in}}{\nu}$ относится к жидкости в камере

закрытки; ν – кинематическая вязкость.

В центре сечения факела распыла возникает воздушный вихрь с давлением, равным давлению окружающей среды. Коэффициент живого сечения, характеризующий степень заполнения жидкостью факела распыла, обозначим ε . Теория Абрамовича–Клячко позволяет рассчитать коэффициент живого сечения, зная значение геометрического комплекса A_e , путем решения трансцендентного уравнения:

$$A_e = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^3 / 2}}.$$

Угол факела распыла рассчитывается по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(1 - \varepsilon) \sqrt{8}}{(1 + \sqrt{1 - \varepsilon}) \sqrt{\varepsilon}}.$$

Объемный расход G и коаксиальная составляющая выходной скорости потока u_z рассчитываются в соответствии со следующими со-

отношениями: $G = \pi r_{in}^2 n u_m = \pi r_n^2 u_z \varepsilon$, отсюда $u_z = \frac{S_{in}}{S_n} \frac{u_{in}}{\varepsilon}$.

Время истечения можно оценить исходя из значе-

ния объемного расхода: $\int_0^{t_{ex}} G(t) dt = M_l / \rho_l$.

Таким образом, имея в качестве исходных данных геометрические характеристики форсунки L , $S(R)$, $S_{in}(r_{in}, n)$, $S_n(r_n)$, а также импульс давления p_m , мы получаем объемный расход жидкости, время истечения, угол распыла.

Определению дисперсности аэрозолей, полученных с помощью центробежных форсунок, посвящено множество работ ([6] и ссылки там же). В работе [8] получена полуэмпирическая формула для широкого

ряда центробежных распылителей в диапазоне параметров: $A=1,72-9,51$; $\Pi_1=8(10^{-6}-10^{-2})$; $Re=800-25\ 000$. Опытные данные обобщены формулой:

$$\frac{r}{r_n} = 47,8 A^{-0,6} Re^{-0,7} \Pi_1^{-0,1}, \quad (5)$$

где r – радиус капли; число Рейнольдса относится к исходящему потоку; параметр Π_1 характеризует соотношение инерционных и вязкостных сил в жидкости:

$$\Pi_1 = \frac{\mu_i^2}{2r_n \rho_i \sigma}, \quad \mu_i - \text{кинематическая вязкость};$$

σ – поверхностное натяжение жидкости. Эта зависимость является наиболее общей среди подобных [6], учитывающих влияние большого числа входных параметров. Следует прежде всего отметить, что все подобные зависимости дают величины радиуса получаемых капель порядка 100 мкм и более, притом чем выше скорость потока (а следовательно, и Re), тем выше дисперсность получаемого аэрозоля. Это соответствует аэродинамическому механизму разрушения струй жидкости и разделения их на капли [9]. Оценки размеров капель аэрозоля по «кавитационному» механизму (3) дают для наших условий приблизительно на порядок более высокую дисперсность, чем полученные из рассмотрения аэродинамического механизма образования капель (5).

На рис. 2 приведены результаты расчета зависимости радиуса образующихся капель аэрозоля по кавитационному механизму и по аэродинамическому, в зависимости от Wo . Практическое следствие данных модельных расчетов таково: чтобы получить высокодисперсный аэрозоль (радиус капель около 1...10 мкм), необходимо создать условия для кавитации ($Wo > 0,01$), но не допускать слишком большого импульсного воздействия на жидкость $Wo \sim 0,08...0,09$.

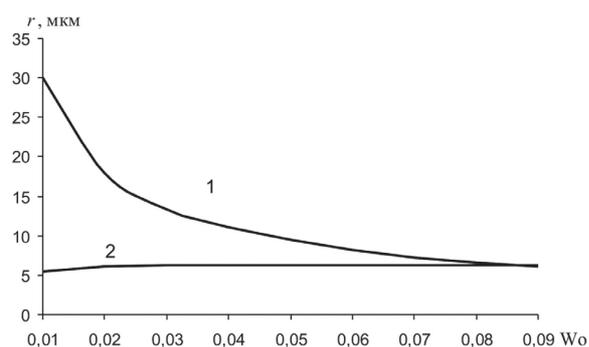


Рис. 2. Зависимость радиуса капель аэрозоля, соответствующая аэродинамическому (1) и кавитационному механизму (2)

Проведем параметрические исследования предложенной модели. Для этого выделим следующие безразмерные геометрические параметры, характеризующие процесс распыления: S/S_{in} – отношение площади сечения емкости с жидкостью к площади входных отверстий; S/S_n – отношение площади сечения емкости с жидкостью к площади сечения со-

пла; параметр Абрамовича A , являющийся комбинацией вышеуказанных параметров и количества входных отверстий n (9).

На рис. 3 приведена зависимость угла распыла от указанных безразмерных параметров. Из расчетов видно, что параметр Абрамовича (кривая 3) и параметр S/S_{in} (кривая 1), характеризующий отношение площади емкости с жидкостью к площади входных отверстий, существенно увеличивают угол распыла: с ростом этих параметров угол факела распыла можно увеличить до 60° и выше.

Из трех перечисленных геометрических параметров лишь S/S_{in} оказывает влияние на объемный расход жидкости: с увеличением данного параметра (относительным уменьшением площади входных отверстий) объемный расход падает.

Проведем расчет для следующих параметров распылителя, изображенного на рис. 1: площадь поперечного сечения $S=0,0064\text{ м}^2$, вода общей массой 300 г, сжатый воздух под давлением $p=85\text{ атм}$, $V_{pnb}=50\text{ см}^3$. Давление в ударной волне составит $p_{pnb}=300\text{ атм}$, давление в втекающего в воду сжатого воздуха 1920 м/с, скорость потока воды – 250 м/с, угол факела распыла – 70° , скорость истечения воды из отверстия распылителя – 20 м/с, время истечения 53 с. Экспериментальные данные: угол распыла 65° , скорость истечения 25 м/с, время истечения 50 с. Величина параметра $Wo=0,014$, характерный радиус капель $r=6\text{ мкм}$ (в расчете по аэродинамическому механизму (5) $r=23,5\text{ мкм}$).

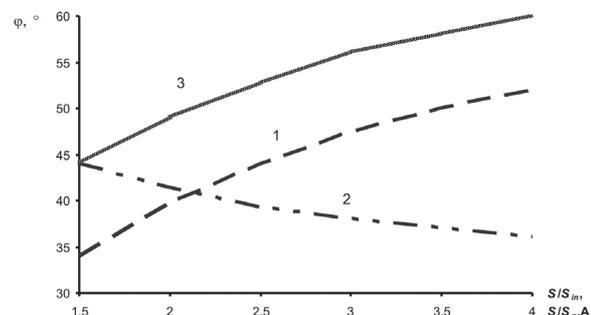


Рис. 3. Зависимость угла распыла ϕ от параметров S/S_{in} (1), S/S_n (2), A (3)

Пропорции конструкции играют большую роль в управлении дисперсностью аэрозоля. Если, оставляя объем компрессионной камеры и распыляемой жидкости постоянными, менять высоту столбика жидкости (и, соответственно, площадь S), то радиус капель, рассчитанный по (3), будет меняться линейно от 2,7 мкм при $L=3\text{ см}$ до 13,1 мкм при $L=10\text{ см}$.

Выводы

Предложена новая конструкция и физико-математическая модель центробежной пневматической форсунки при импульсном воздействии сжатого газа. На основе предложенной модели получены выражения для расчета основных определяющих параметров распыления от входных параметров форсунки; имея в качестве исходных данных

геометрические характеристики форсунки L , S , S_m , S_n , мы получаем объемный расход жидкости, время истечения, угол распыла и дисперсность получаемого аэрозоля.

Показано, что для обеспечения более высокой дисперсности аэрозоля необходимо обеспечить импульсный характер воздействия на жидкость;

предложен безразмерный критерий Wo , характеризующий определяющий механизм диспергирования. Расчеты нашли качественное экспериментальное подтверждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 12-08-90810-мол_рф_нр).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудряшова О.Б., Ворожцов Б.И. Математическая модель взрывной генерации жидкокапельных аэрозолей // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 77–81.
2. Кудряшова О.Б., Ворожцов Б.И., Муравлев Е.В., Ишматов А.Н., Павленко А.А. Ударно-волновая генерация высокодисперсных жидкокапельных аэрозолей // Ползуновский вестник. – 2010. – № 4–1. – С. 95–100.
3. Ворожцов Б.И., Кудряшова О.Б., Ишматов А.Н., Ахмадеев И.Р., Сакович Г.В. Взрывная генерация высокодисперсных жидкокапельных аэрозолей и их эволюция // ИФЖ. – 2010. – Т. 83. – № 6. – С. 1084–2004.
4. Витман Л.А., Кацнельсон Б.Д., Палеев И.И. Распыливание жидкости форсунками / ред. С.С. Кутателадзе – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 264 с.
5. Кириллин В.А. и др. Техническая термодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 417 с.
6. Физическая энциклопедия / Д.М. Алексеев, А.М. Балдин, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов, Б.К. Вайнштейн, С.В. Вонсовский, А.В. Гапонов-Грегов, С.С. Герштейн, И.И. Гуревич, А.А. Гусев, М.А. Ельяшевич, М.Е. Жаботинский, Д.Н. Зубарев, Б.Б. Кадомцев, И.С. Шапиро, Д.В. Ширков / под общ. ред. А.М. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1988–1998.
7. Кедринский В.К. Газодинамика взрыва: эксперимент и модели. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 435 с.
8. Блох А.Г., Кичкина Е.С. Распыливание жидкого топлива механическими форсунками центробежного типа // Сб. Вопросы аэродинамики и теплопередачи в котельноотопительных процессах. – М.: Госэнергоиздат, 1958. – С. 132–140.
9. Пажи Д.Г., Ламм Э.Л. Распыливающие устройства в химической промышленности. – М.: Химия, 1975. – 200 с.

Поступила 28.06.2012 г.

УДК 674.815-41

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДРЕВЕСНЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ОРИЕНТИРОВАНИИ

С.М. Плотников, М.С. Лурье

Сибирский государственный технологический университет, г. Красноярск

E-mail: smplotnikov@rambler.ru

Представлены результаты моделирования ориентирования плоских древесных частиц, используемых при изготовлении плит из крупноразмерной стружки. Получены зависимости времени падения и скорости разворота частиц от их параметров и высоты падения, позволяющие минимизировать угол укладки частиц в стружечном ковре.

Ключевые слова:

Плоская частица, имитационная модель, время падения, импульс вращения, коэффициент аэродинамического сопротивления.

Key words:

Flat particle, simulation model, fall time, momentum of rotation, drag coefficient.

Современная технология изготовления плит из крупноразмерной ориентированной стружки (Oriented Strand Board – OSB) предусматривает их ориентирование при формировании стружечного ковра, который в дальнейшем подвергается горячему прессованию. Благодаря укладке частиц наружных слоев брикета в продольном, а внутренних – в поперечном направлении возможно значительное повышение прочности на изгиб изготавливаемых плит. Причем чем меньше угол разброса частиц, тем выше прочность готовой плиты, которая приближается к прочности исходной древеси-

ны. Ориентирование частиц является одной из основных операций в технологическом процессе изготовления OSB, что требует ее подробного изучения с целью совершенствования ориентирующих устройств.

Зная динамику движения древесной частицы, в частности изменение скорости и времени падения и разворота от ориентирующего органа до укладки в стружечный ковер, можно так подобрать действующий на частицу вращающий импульс, что она будет уложена в ковер с наименьшим углом отклонения. Это позволит значительно улучшить ос-

новой механической показатель OSB – прочность на статический изгиб.

Рассмотрим поступательное и вращательное движения частицы раздельно.

Без учета вращательного движения на частицу, свободно падающую в воздушной среде, действуют сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха F_b . Дифференциальное уравнение поступательного движения частицы имеет вид:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - F_b, \quad (1)$$

где m – масса частицы, кг; s – путь, проделанный частицей, м; $g=9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

С учетом силы F_b , которая зависит от скорости движения частицы относительно воздуха, уравнение (1) принимает вид:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - C_x S_d \rho_b \frac{V^2}{2}, \quad (2)$$

где C_x – коэффициент аэродинамического (лобового) сопротивления частицы; S_d – площадь проекции поперечного сечения частицы на плоскость, перпендикулярную направлению ее движения, м^2 ; $\rho_b=1,29 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздушной среды при нормальных условиях; V – скорость поступательного движения при падении частицы, м/с .

Масса частицы зависит от ее размеров и удельной плотности материала:

$$m=BLh\rho_q, \quad (3)$$

где B – ширина частицы; L – длина частицы; h – толщина частицы; ρ_q – плотность материала частицы ($400\dots700$), кг/м^3 .

Площадь S_d при плоскопараллельном падении частицы определяется по формуле: $S_d=BL$.

Для определения скорости V по уравнению (2) необходимо знать величину коэффициента аэродинамического сопротивления C_x . В [1] значения C_x при малых числах Рейнольдса Re имеют большой разброс и недостоверны, т. к. получены на основании малого числа экспериментов. Коэффициент C_x нелинейно зависит от числа Re . Последнее, в свою очередь, зависит от скорости частицы V . Исключение из расчетов значений C_x возможно за счет моделирования аэродинамических процессов, возникающих при падении частицы в воздушной среде.

Расчет падения частицы с учетом ее аэродинамики заключался в определении зависимости силы торможения частицы F_b от времени ее падения численным моделированием в программе Comsol Multiphysics 3.5 [2]. Получаемые значения силы F в виде аппроксимирующего выражения вводились в S -модель падения частицы, созданную в программе MatLab/Simulink. При этом скорость и время падения частицы определялись с учетом силы аэродинамического торможения в воздухе. Таким образом, необходимость использования нелинейной зависимости коэффициента C_x от числа Рейнольдса отпадает.

Программа Comsol Multiphysics использует обобщенную версию уравнений Навье–Стокса, чтобы учесть переменную вязкость. Уравнения имеют вид:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla[\eta(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \rho(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}$$

$$\text{и } \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

где η – динамическая вязкость, $\text{Па}\cdot\text{с}$; \mathbf{u} – векторное поле скоростей; p – давление, Па ; \mathbf{F} – объемная плотность силы, действующей на среду, в том числе и сила тяжести, Н/м^3 .

Первое уравнение – это уравнение переноса количества движения, а второе – уравнение неразрывности потока для несжимаемой жидкости.

Поскольку длина частицы в десятки раз больше ее поперечных размеров, то для сокращения машинного времени моделирования решалась плоская задача. При этом мы пренебрегаем аэродинамическим сопротивлением на концах частицы – это приводит к погрешности величины не более 2...3 %, что вполне допустимо при таких расчетах.

Важной особенностью движения частиц в устройствах ориентирования является ламинарный характер обтекания частиц воздушной средой. Так, для характерных размеров частиц длиной до 150 мм, шириной до 30 мм, толщиной до 1 мм [3] при их свободном падении или вращении со скоростями вращательного движения в пределах от 1 до 8 рад/с число Рейнольдса, характеризующее обтекание частиц потоком, составляет от 10 до 800, что соответствует ламинарному режиму.

Ламинарный режим движения однородных сред и их взаимодействие с обтекаемыми телами хорошо подчиняется численным методам расчета, поэтому для определения коэффициента аэродинамического сопротивления частиц был применен численный эксперимент. Он заключается в следующих шагах:

- производится расчет стационарного процесса движения частицы в потоке воздуха при нормальных условиях методом численного моделирования с помощью программы Comsol Multiphysics 3.5. Для того чтобы при 2D-моделировании учесть длину частицы, при постпроцессорной обработке результатов определялась погонная суммарная сила F/l , действующая на обтекаемое тело, в противоположном движению частицы направлению;
- по рассчитанному значению погонной силы определяется коэффициент аэродинамического сопротивления частицы;
- результаты, полученные для частиц близкой формы, усредняются;
- усредненные результаты аппроксимируются аналитическими выражениями, которые будут пригодны для дальнейших расчетов.

Сила взаимодействия потока с обтекаемым им телом описывается формулой [4]:

$$\frac{F}{l} = C_x \rho_b B \frac{V^2}{2}.$$

Тогда коэффициент аэродинамического сопротивления может быть найден:

$$C_x = \frac{\left(\frac{F}{L}\right)}{\rho_B B \frac{V^2}{2}} = \frac{2\left(\frac{F}{L}\right)}{\rho_B B V^2}. \quad (5)$$

В качестве примера на рис. 1 показана картина обтекания частицы (без учета ее вращения) через 0,2 с после начала движения.

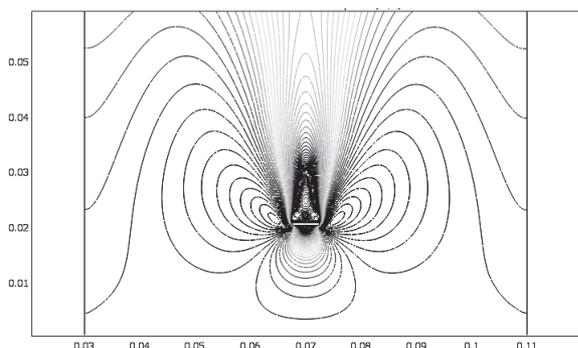


Рис. 1. Поле скоростей через 0,2 с после начала падения

По результатам моделирования падения частицы получена зависимость силы сопротивления воздуха F_B от числа Рейнольдса, аппроксимируя которую с помощью пакета Curve Fitting программы MatLab, получим выражение (коэффициент корреляции $R=0,99991$):

$$F_B = \frac{BL}{B_0 L_0} \times$$

$$\times (0,0007845 Re^2 + 0,0001813 Re + 4,05 \cdot 10^{-5}),$$

где $B_0=0,002$ м – средняя ширина частицы; $L_0=0,1$ м – средняя длина частицы.

Имитационная модель для данной задачи составлена в пакете Simulink. Выражение (4) в модели рассчитывает блок Fcn2. Схема модели представлена на рис. 2, некоторые результаты моделирования – на рис. 3.

В результате моделирования установлено, что время падения частицы T_0 зависит от ее толщины и плотности и не зависит от длины и ширины частицы, т. к. при увеличении этих величин во столько же раз возрастает площадь сечения частицы и, соответственно, растет сила аэродинамического торможения.

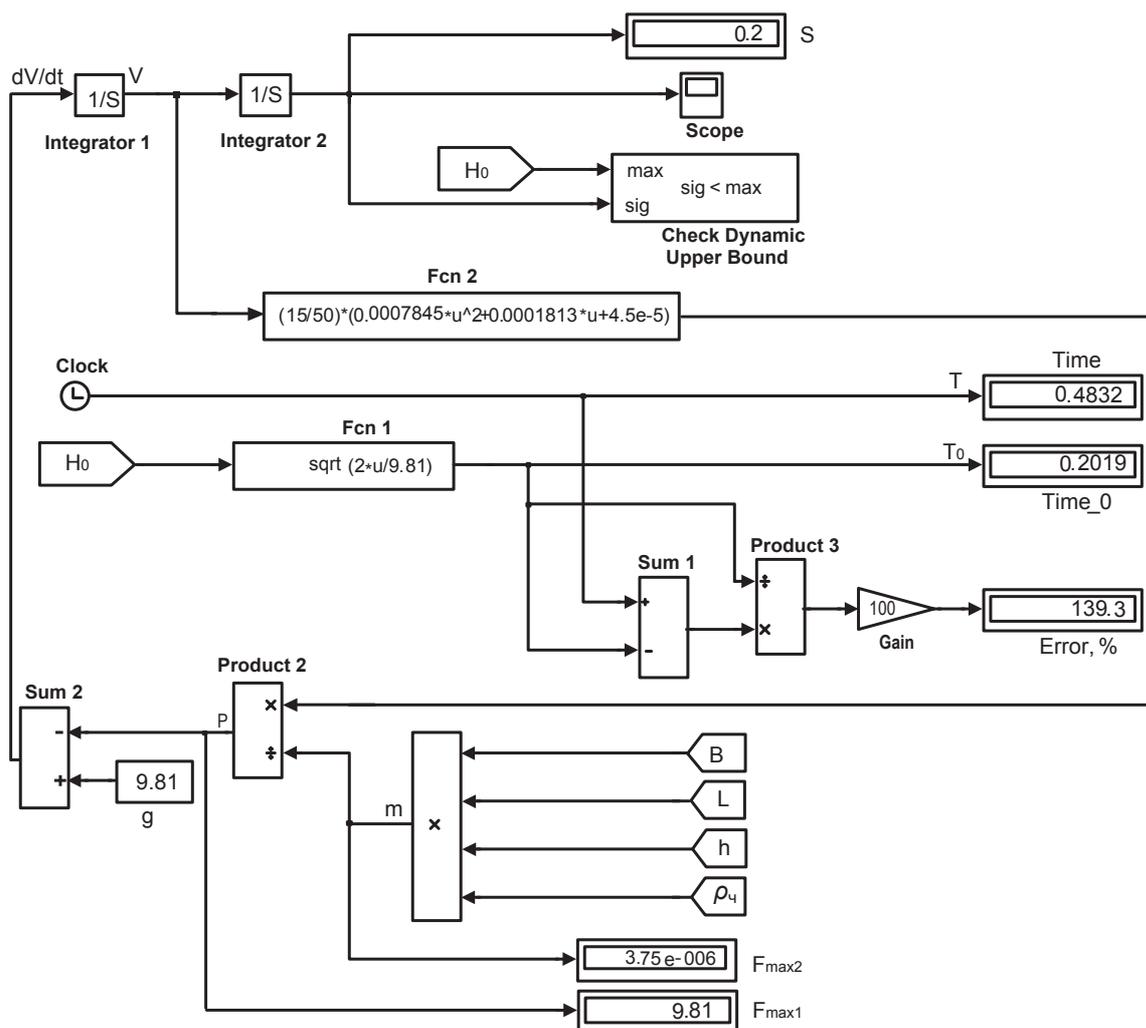


Рис. 2. Имитационная модель (S-модель) падения плоской частицы

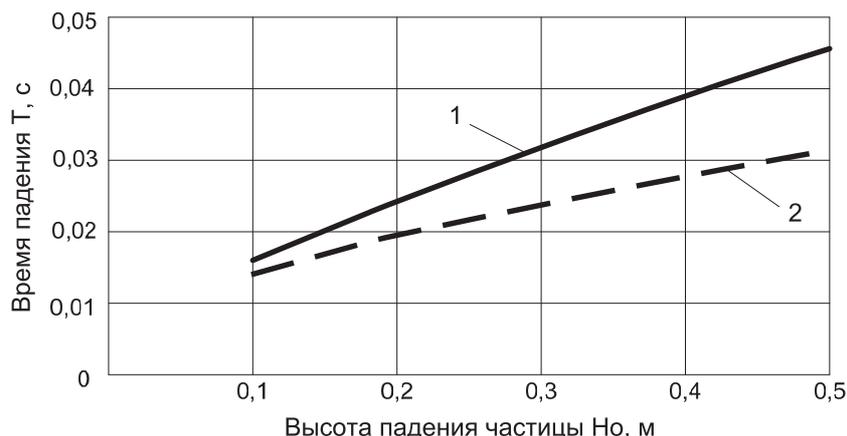


Рис. 3. Зависимость времени падения частицы от высоты H_0 падения при $B=0,01$ м; $L=0,1$ м; $h=0,0005$ м; $\rho_s=400$ кг/м³: 1 – для воздуха; 2 – для вакуума

Зная время падения частицы T_0 , можно определить скорость ее вращения [рад/с], необходимую для минимизации угла укладки частицы в стружечный ковер:

$$\omega = k \frac{2\pi n + \alpha_{нач}}{T_0}, \quad (6)$$

где $\alpha_{нач}$ – угол схода частицы с направляющих, зависящий от расстояния между направляющими и длины частицы [рад]; $n=0$ или 1 – количество оборотов, задаваемое частице; k – коэффициент аэродинамического торможения, учитывающий замедление частицы при вращении.

Число n определяется производительностью ориентирующего устройства. Чем оперативнее требуется ориентировать частицы, тем больший импульс вращения следует им придать, тем больше должна быть начальная скорость ω_0 . При этом частица может совершить дополнительный оборот. В последнем случае возрастает также угол разброса частиц в ковре. На основании (6) можно определить оптимальную скорость направляющих элементов в системе ориентации древесных частиц [5].

Для оценки аэродинамического коэффициента k в выражении (6) необходим анализ вращательного движения частицы.

Пусть плоская частица длиной L , шириной B и толщиной h вращается вокруг оси OO' с угловой скоростью ω (рис. 4).

На рисунке: $R=L/2$; dF – элементарная сила сопротивления; ω – скорость вращения частицы; r – текущая координата рассматриваемого участка частицы.

Сила аэродинамического сопротивления F по длине частицы будет изменяться, поскольку разные ее участки будут двигаться с разной линейной скоростью относительно воздуха. Рассмотрим бесконечно малый участок частицы длиной dr на расстоянии r от оси вращения. Элементарная сила сопротивления dF , действующая на участок частицы длиной dr и шириной B :

$$dF = C_x \rho_v B dr \frac{V_k^2}{2},$$

где V_k – линейная скорость перемещения краев частицы, м/с.

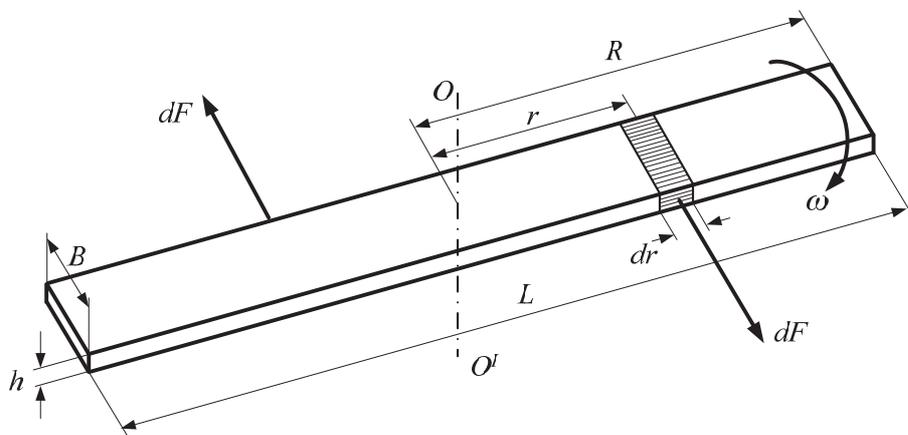


Рис. 4. Свободное вращение частицы прямоугольного сечения в воздухе

Выразив линейную скорость через угловую $V_k=r\omega$, получим:

$$dF = C_x \rho_b B dr \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Элементарный тормозящий момент, считая и силу, действующую на вторую половину частицы:

$$dM = 2dFr = C_x \rho_b B \omega^2 r^3 dr. \quad (7)$$

Для определения суммарного тормозящего момента необходимо проинтегрировать выражение (7) по длине частицы от оси вращения до ее конца:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R dM = \int_0^R C_x \rho_b B \omega^2 r^3 dr = \\ &= \rho_b B \omega^2 \int_0^R C_x r^3 dr = K \int_0^R C_x r^3 dr, \end{aligned} \quad (8)$$

где $K = \rho_b B \omega^2$.

Коэффициент аэродинамического сопротивления C_x в (8) зависит от скорости движения частицы относительно воздуха, которая, в свою очередь, определяется текущей координатой рассматриваемого участка и угловой скоростью ω . Для общности последующих выводов будем считать, что коэффициент C_x имеет следующий вид:

$$C_x = A + \frac{C}{\sqrt{V}} = A + \frac{C}{\sqrt{\omega r}} = A + \frac{C}{\sqrt{\omega} \sqrt{r}}. \quad (9)$$

Частицы шириной 4, 15 и 25 мм и толщиной 0,2, 0,5 и 1,0 мм располагались при моделировании широкой стороной вдоль и поперек потока. Пример полученных зависимостей погонной силы от скорости вращения частиц приведен на рис. 5.

После расчета по выражению (5), усреднения результатов и аппроксимации кривых средствами программы MatLab получены выражения, позволяющие для каждой из групп частиц с точностью до 10 % определять коэффициент C_x .

Для частиц, расположенных шириной B вдоль и поперек потока соответственно:

$$C_x = -3,449 + \frac{407,14}{\sqrt{Re}}, \quad C_x = 1,3293 + \frac{2,5227}{\sqrt{Re}}.$$

Выражение (9) получено для аргумента, которым является число Рейнольдса. Хотя это общепринятый критерий движения потоков среды, для

практического расчета движения древесных частиц в системах ориентирования он неудобен, т. к. скрытно содержит размеры частиц и их скорость, которые приходится аналитически интегрировать в процессе расчета. В нашем частном случае для последующего анализа удобнее выразить C_x как функцию скорости движения частиц относительно воздуха. Для частиц, расположенных шириной B вдоль и поперек потока соответственно:

$$C_x = -3,449 + \frac{11,218}{\sqrt{V}}, \quad C_x = 1,238 + \frac{0,15}{\sqrt{V}}.$$

Подставив (9) в (8), получаем:

$$\begin{aligned} M &= K \int_0^R Ar^3 dr + K \int_0^R \frac{C}{\sqrt{\omega} \sqrt{r}} r^3 dr = \\ &= KA \int_0^R r^3 dr + \frac{KC}{\sqrt{\omega}} \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{r}} dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) содержит два интеграла:

$$\int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} \quad \text{и} \quad \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{r}} dr = \frac{2}{7} R^3 \sqrt{R}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получим:

$$M = \frac{KAR^4}{4} + \frac{2KCR^3 \sqrt{R}}{7\sqrt{\omega}}.$$

Из (10) получим выражение тормозящего момента:

$$M = \frac{\rho_b BAR^4}{4} \omega^2 + \frac{2\rho_b BCR^3 \sqrt{R}}{7} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega}}.$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{\rho_b BAR^4}{4}, \quad b = \frac{2\rho_b BCR^3 \sqrt{R}}{7}. \quad (12)$$

Тогда окончательно получим зависимость аэродинамического момента торможения от размеров частицы и ее угловой скорости:

$$M = a\omega^2 + b \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega}}. \quad (13)$$

Для определения закона движения частицы запишем второй закон Ньютона для вращающейся частицы:

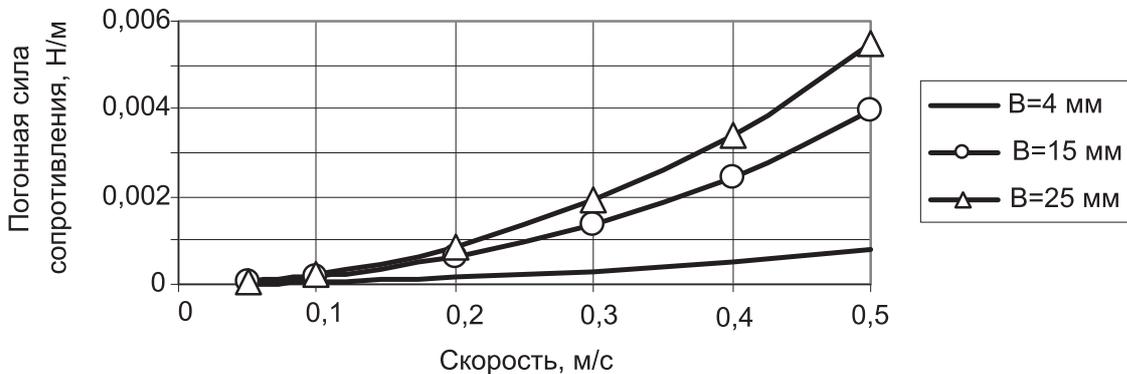


Рис. 5. Погонная сила, действующая на частицы с шириной B поперек потока

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M, \quad (14)$$

где J – момент инерции частицы относительно оси OO^1 , кг·м².

Для пластины массой m и длиной L момент инерции, как известно, составляет [6]:

$$J = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}m(2R)^2 = \frac{mR^2}{3}. \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), получим:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{mR^2} \left(a\omega^2 + b\frac{\omega^2}{\omega} \right). \quad (16)$$

Интегрируем обе части полученного дифференциального уравнения (16):

$$\omega = -\frac{3}{mR^2} \int \left(a\omega^2 + b\frac{\omega^2}{\omega} \right) dt. \quad (17)$$

Масса частицы m не входит в коэффициенты уравнения (12), поэтому, согласно (17), она определяет скорость вращения частицы в обратной пропорции.

Уравнение (17) нелинейно, поэтому для его интегрирования применим численные методы, а именно имитационное моделирование с помощью пакета Simulink программы MatLab.

Общий вид модели для плоских частиц представлен на рис. 6.

Блок подготовки данных вычисляет значение коэффициентов уравнения (17), блок решения дифференциальных уравнений решает (17), интегрируя его правую часть. Блок обработки данных вычисляет угловую скорость частицы во времени. При этом вычисляются два значения углового отклонения частицы: с учетом сил аэродинамического торможения и идеальное – без учета данных сил. Данные значения индицируются на дисплеях **Angle_degrees** (в градусах) и **Angle_%** (в процентах

от идеального значения). Осциллограф **Scope** показывает процесс изменения угловой скорости при движении частицы во времени.

Моделирование проводилось для плотности воздуха 1,204 кг/м³, его кинематической вязкости $1,51 \cdot 10^{-5}$ м²/с и плотности частицы 400 кг/м³.

Толщина B частицы, встречающей поток, не влияет на замедление частицы при вращении. Это следует из выражений (12) и (13). Коэффициенты a и b в выражении (12) прямо пропорциональны ширине частицы B . Но, масса плоской частицы, определяемая по формуле (3), в формуле момента инерции (15) также пропорциональна ширине частицы B .

Учитывая, что $R=L/2$ и проведя сокращения, получим:

$$u\dot{\omega} = -\frac{12}{Hc_v} \int_0^R \left(\frac{\rho_B AL^3}{16} \omega^2 + \frac{\rho_B CL^2 \sqrt{L}}{7\sqrt{2}} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega}} \right) dt.$$

В то же время, ширина частицы H оказывает влияние на скорость замедления. Чем она больше, тем меньше замедляет вращение частица. Это можно объяснить тем, что увеличение H приводит к увеличению момента инерции частицы, мало влияя на аэродинамическое сопротивление. Однако следует учитывать, что вследствие увеличения площади трения частицы о воздух с увеличением ее ширины H аэродинамическая сила торможения также несколько возрастает. Это приводит к увеличению скорости торможения частицы.

Полученные в результате численного эксперимента поля скоростей потоков при обтекании частицы (без учета ее падения) представлены на рис. 7, графики изменения угловой скорости частицы – на рис. 8.

В результате моделирования поступательного движения плоской частицы получено значение времени ее падения в зависимости от ее размеров и высоты падения. Данное время зависит от ее толщины и плотности частицы и не зависит от ее длины и ширины. Определены также отклонения вре-

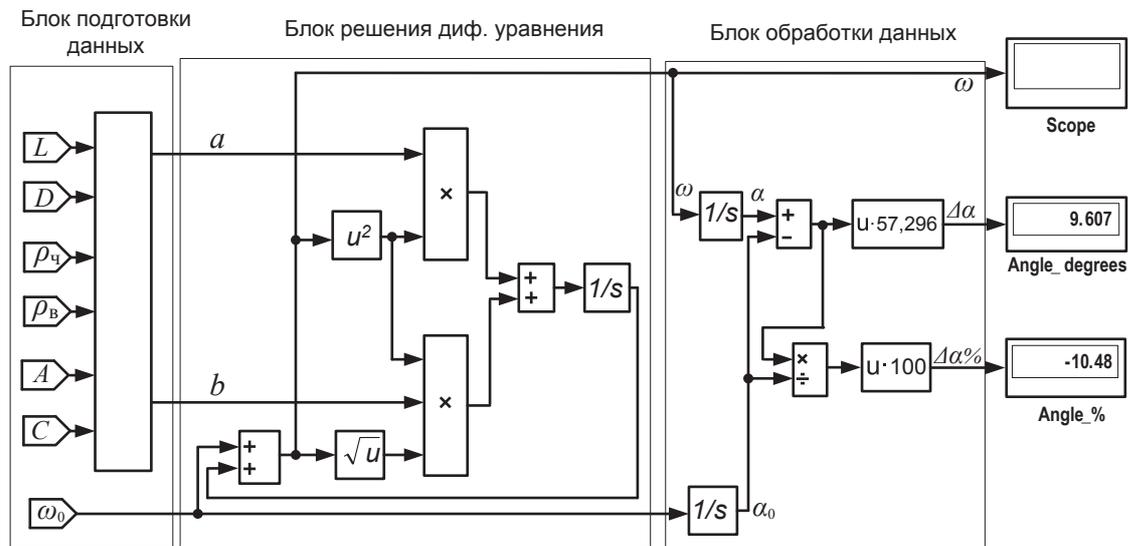


Рис. 6. Имитационная модель вращения плоской частицы

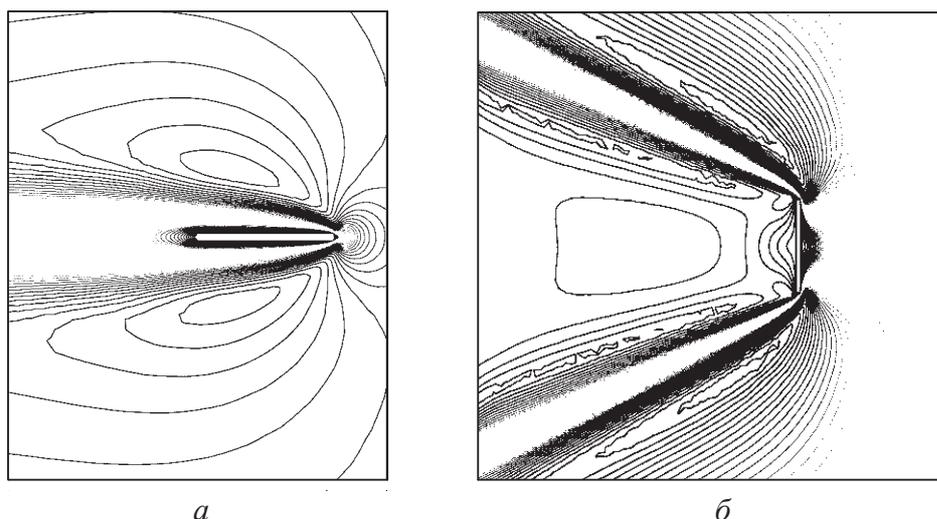


Рис. 7. Поле скоростей при движении частицы шириной 20 мм, толщиной 1 мм: а) плоская сторона вдоль потока; б) плоская сторона поперек потока

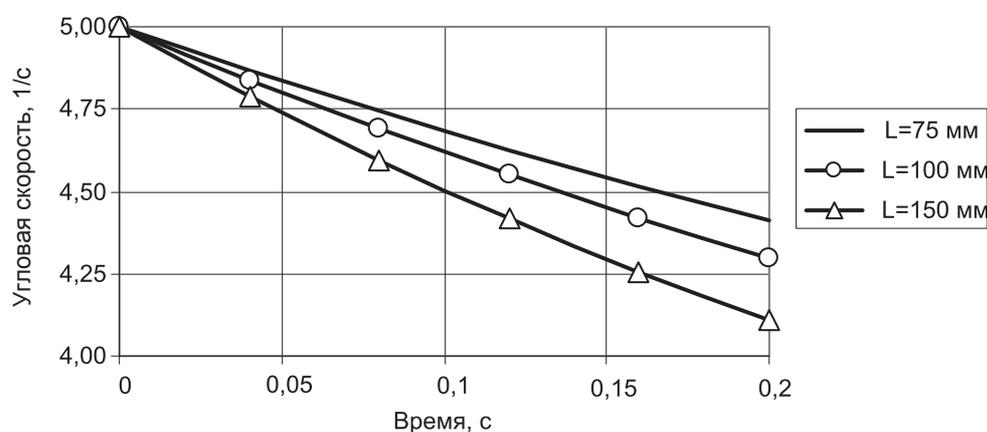


Рис. 8. Зависимость $\omega=f(t)$ для частицы с параметрами: $h=0,5$ мм, $B=20$ мм, движущейся узкой гранью навстречу потоку

мени падения от среднего значения при сочетании параметров частицы случайным образом.

При вращении частицы действующая на нее погонная сила аэродинамического сопротивления возрастает нелинейно с увеличением размеров частицы. Угловая скорость частиц относительно начальной скорости снижается по закону, близкому к линейному, причем за время ориентирования для частиц длиной 150 мм угловая скорость снижается на 20 %, для частиц длиной 75 мм – на 12 %. Данное снижение линейно возрастает с уменьшением плотности частиц. Таким образом, для всего диапазона диаметров частиц коэффициент аэродинами-

ческого торможения k в выражении (6) принимает значения от 1,12 до 1,20 и зависит от размеров частиц, их плотности, начальной скорости вращения и времени разворота, которое пропорционально высоте ориентирующего устройства.

Точность расчетов удалось повысить за счет того, что коэффициент аэродинамического сопротивления в обоих моделях определялся в численном эксперименте.

Использование результатов исследования позволит уменьшить угол разброса частиц в формируемом стружечном ковре и тем самым повысить прочность на изгиб готовых плит OSB.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
- Шмелев В.Е. Femlab 2.3. Руководство пользователя. – М.: Диалог-МИФИ, 1999. – 442 с.
- Thoemen H., Irle M., Sernek M. Wood-Based Panels: An Introduction for Specialists. – London: Brunel University Press, 2010. – 283 p.
- Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
- Плотников С.М., Пантелеев В.И. Система оптимального ориентирования стружки в производстве древесных плит // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 2. – С. 56–58.
- Фаворин М.В. Моменты инерции тел. 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Машиностроение, 1977. – 514 с.

УДК 66.021.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СТРУЙНЫМ МЕТОДОМ ЖИДКИХ РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЕМКОСТЯХ

А.В. Балясников, Л.Ф. Зарипова, В.П. Пищулин, А.Я. Сваровский

Северский технологический институт НИЯУ «МИФИ»

E-mail: pischulin@ssti.ru

Рассмотрен процесс перемешивания жидких радиоактивных отходов в прямоугольных емкостях при вертикальном расположении сопел. На основе теории подобия проведено моделирование процесса. Определены конструктивные характеристики перемешивающих устройств; скоростные характеристики раствора при истечении из перемешивающих устройств; условия взвешивания частиц в слабосолевых растворах с целью определения времени перемешивания струйным методом.

Ключевые слова:

Емкостное оборудование, перемешивающее устройство, сопла, моделирование.

Key words:

Reservoir equipment, mixing device, nozzles, modeling.

В технологии переработки жидких радиоактивных отходов (ЖРО) в крупнотоннажных емкостях прямоугольной или цилиндрической формы объемом 1000...1500 м³ проводятся операции по сбору и усреднению отходов, требующие интенсивного перемешивания с подъемом осадков, для последующей подготовки их к переработке. В общем случае перемешивание может осуществляться рециркуляционными насосами и механическими мешалками (для небольших объемов), пневматическим (барботажным) перемешиванием и струйным методом (для больших объемов).

Анализ конкретных условий работы позволяет сделать выбор вариантов устройств для перемешивания ЖРО. Так, изменение столба жидких отходов в емкости во время эксплуатации при расквашке до минимальных уровней ограничивает применение барботеров только у дна емкости, делает невозможным использование эрлифтного способа перемешивания, а также нерациональным применение планетарных мешалок из-за низкой интенсивности перемешивания при большой консоли вала и малых оборотах мешалки. Перемешивание отходов барботажными устройствами увеличивает газовые выбросы, требующие установки дополнительного оборудования для очистки сбросного воздуха от радиоактивных аэрозолей.

Наиболее приемлемым и перспективным для переработки ЖРО в емкостях больших объемов является метод струйного перемешивания погруженными соплами. Процесс осуществляется в цилиндрических емкостях при тангенциальном расположении сопел, для прямоугольных емкостей – вертикальными соплами с циркуляцией исходного раствора насосом через систему сопел. Перемешивание сопровождается взаимодействием растекающихся струй и созданием турбулентных закрученных потоков перемешиваемой жидкости, а турбулентность определяется как совокупность разномасштабных вихрей, из-за растяжения которых создается непрерывное распределение пульсаций скоростей в потоке [1].

Организация закрученных течений перемешиваемых потоков жидкости исходным раствором через погруженные сопла и насос позволяет выполнить эксплуатационные требования к оборудованию со сроком службы до 20 лет при изменяющемся уровне раствора в емкости в период подготовки ЖРО к переработке или глубинному подземному захоронению [2–4].

При проектировании перемешивающих устройств для прямоугольных емкостей больших объемов, предназначенных для сбора и последующей переработки ЖРО, необходимо определить влияние скоростных характеристик взаимодействующих затопленных струй жидкости, вытекающих из сопел, на время перемешивания τ и выявить основные физические и конструктивные параметры при подъеме частиц, осевших на дне емкости [5, 6].

Определение времени перемешивания τ осложняется тем, что процесс осуществляется с заданным расходом и изменяющимся уровнем раствора при его переработке. Эти вопросы можно разрешить только путем моделирования процесса на основе теории подобия гидродинамических явлений, для которых требуется соблюдение геометрического подобия размеров емкостей, физического подобия жидкости, а также динамического подобия вытекания жидкости из сопел равенством критериев Рейнольдса при циркуляции через сопла.

В совокупности емкость и циркуляционная система (сопла, насосы) определяются следующими параметрами: ρ , μ , d_0 , v_0 , τ , т. е. время перемешивания τ жидкости в емкости зависит от плотности жидкости ρ , вязкости μ , диаметра сопла d_0 , определяющего факел струи и скорость струи v_0 на срезе сопла, величина которой влияет как на способность струи перемешивать данный объем при растекании ее в пространстве крупнотоннажной емкости, так и на время τ .

В качестве примера разработки и конструирования перемешивающих устройств струйного типа принята емкость прямоугольной формы объемом

1000 м³ (табл.), применяемая на радиохимических заводах (РХЗ).

Таблица. Характеристика промышленной прямоугольной емкости и перемешивающего устройства

| Параметры | Значения |
|---|----------|
| Объем раствора, м ³ | 1000 |
| Высота уровня раствора (max) <i>H</i> , м | 8 |
| Расход раствора на перемешивание <i>Q</i> , м ³ /ч | 50 |
| Количество сопел (расчетное), <i>n</i> | 4 |
| Диаметр сопел (расчетный) <i>d₀</i> , мм | 50 |
| Скорость струи на срезе сопла <i>v₀</i> , м/с | 0,53 |
| Величина критерия Рейнольдса (<i>Re</i>) | 36 000 |
| Угол расширения струи от сопла | 14°20' |

Исходя из критериальных условий подобия, рассчитывая масштабный коэффициент скорости жидкости *a_v* в сопле, при этом задаваясь масштабом *a_L*=0,1 (геометрического подобия емкостей натурного и модельного аппарата *l_n*>*l_m* в 10 раз), *a_p*=1, *a_μ*=1, можно записать следующее:

$$Re = \frac{v_0 d_0 \rho}{\mu}, \frac{a_v a_L a_p}{a_\mu} = 1, a_v = \frac{a_\mu}{a_L a_p} = 10.$$

Таким образом, уменьшая размеры модельной емкости и сопла в 10 раз (*a_L*=0,1) из условия геометрического подобия, скорость потока жидкости из сопла на модели необходимо увеличить в 10 раз, тогда *v₀* будет равна 5,3 м/с. Для этой скорости определены экспериментально скоростные характеристики потоков растекающихся струй на модельном аппарате объемом 1,0 м³ (1000×1000×1000 мм) и получена зависимость времени перемешивания *τ* от критерия *Re* (рис. 1).

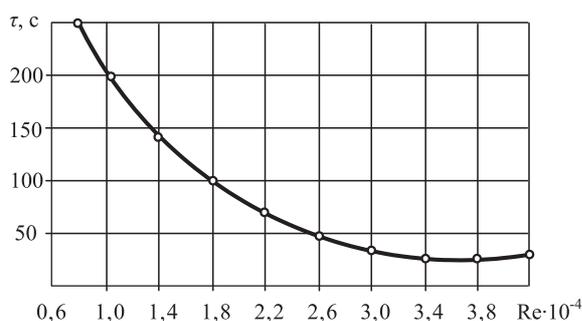


Рис. 1. Зависимость времени перемешивания от критерия Рейнольдса

Для выяснения условий отрыва твердых частиц от дна емкости и их переноса недостаточно знания одних только средних характеристик скорости потока. Дальнейший перенос твердых частиц осуществляется благодаря наличию в турбулентном потоке пульсаций вертикальной составляющей скорости, и требуются данные о пульсационных характеристиках полей скоростей по всему объему и значений интенсивности турбулентности в потоке жидкости.

Так как время *τ* зависит от среднеарифметической скорости потоков *v_{cp}* и интенсивности турбулентности *I*, то скорость *v* в любой точке турбулентного потока можно выразить как:

$$v = v_{cp} + \Delta v,$$

где *Δv* – отклонение истинной скорости от среднего значения (рис. 2).

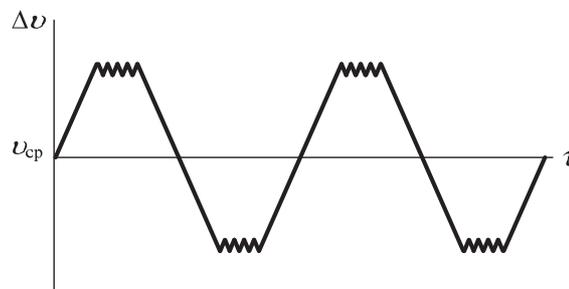


Рис. 2. Скоростные характеристики турбулентного потока

Величиной, характеризующей меру рассеивания истинных скоростей *v* относительно средней скорости *v_{cp}*, является среднеквадратичное отклонение *σ*:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{cp})^2 P_i},$$

где *P_i* – вероятность появления скорости *v_{cp}*; *D* – дисперсия.

Отношение среднеквадратичного отклонения *σ* к скорости *v_{cp}* характеризуется интенсивностью турбулентности *I* и является мерой пульсаций в точке потока:

$$I = \frac{\sigma}{v_{cp}} \cdot 100 \%$$

Определение *v_{cp}* и *σ* проводилось на модельной емкости (рис. 3) на различных высотах *h* расположения сопел от дна емкости и в характерных плоскостях, а также определялись линии тока вихревых потоков перемешиваемой жидкости. Эти данные необходимы для конструирования перемешивающих устройств выше указанной емкости под ЖРО.

Измерения проводились на расстояниях *l*=0,02; 0,04; 0,08; 0,12; 0,16; 0,20; 0,24 м от оси сопла до точки измерения, на разных уровнях от дна емкости (*h₀*=0,05; 0,15; 0,50 м) и при изменяющихся уровнях заполнения.

Характерные эпюры скоростей *v_{cp}* и интенсивности турбулентности *I* показаны на рис. 4.

Экспериментальные данные полей средних скоростей и интенсивности турбулентности, линий тока и взаимодействие растекающихся струй в модельном аппарате, определяющих структуру вихревых течений, режим процесса и время гомогенизации при перемешивании растворов струйным методом выявили правильность выбора симметричного расположения вертикальных сопел на определенном расстоянии от дна емкости, наи-

более выгодный режим работы сопел при $Re=3,6 \cdot 10^4$ на срезе сопла, обеспечивающий вихревой характер потоков перемешиваемой жидкости с максимальной интенсивностью турбулентности I до 75 %, необходимые величины средних пульсационных скоростей для подъема осадков и перемешивания до суспензии [7].

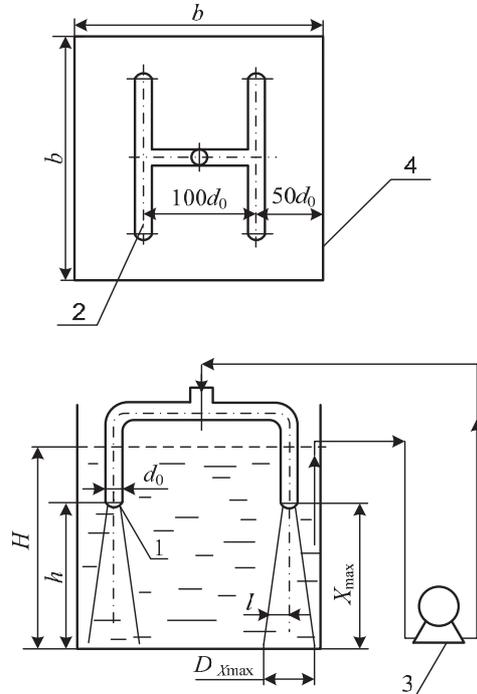


Рис. 3. Устройство для перемешивания струйным методом: 1) вертикальные сопла (4 шт.); 2) трубная гребенка для сопла; 3) насос; 4) емкость

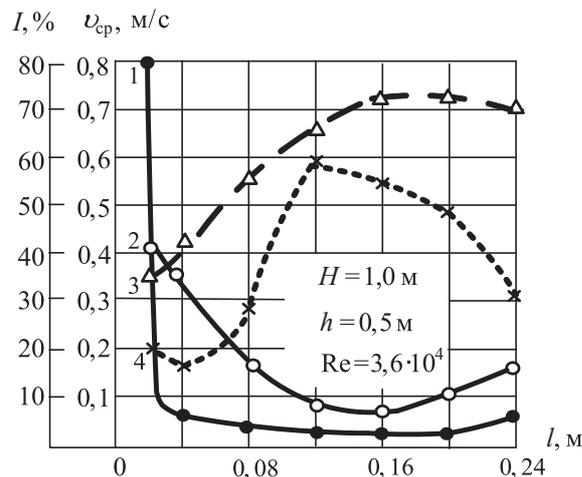


Рис. 4. Распределение скоростей истечения жидкости и интенсивности турбулентности в зависимости от расстояния от оси сопла: 1) $h_0=0,5$ м; 2) $h_0=0,15$ м; 3) интенсивность турбулентности; 4) $h_0=0,05$ м

С увеличением критерия Рейнольдса время τ уменьшается при всех измерениях. Высота столба жидкости H в емкости и расположение сопел от дна емкости h оказывают существенное влияние на перемешивание, особенно при малых числах Re ,

начиная от $0,7 \cdot 10^4$ и ниже. В этих режимах жидкость выше сопел перемешивается недостаточно. С увеличением h время τ несколько сокращается, но этот фактор требует конкретного рассмотрения с учетом необходимых скоростей струй у дна емкости при подъеме частиц осадков.

Основываясь на известности фактических величин, участвующих в процессе перемешивания, путем сопоставления этих величин установлен характер функциональной зависимости для τ методом наименьших квадратов из экспериментальных данных для $\tau=f(Re, h, g)$ и методом анализа размерностей для $\tau=f(v, D, g)$. Это вызвано тем, что при проведении экспериментов величины v, D, g оставались постоянными. Найденные уравнения для τ приведены в методике расчета перемешивающих устройств.

Методика расчета перемешивающих устройств струйного типа:

1. Диаметр сопла d_0 определяется из соотношения: $D_3/d_0 \leq 180$.
2. Длина насадки сопла принимается в пределах $l=(3...5)d_0$; форма насадки влияет на параметры струи и выбирается по назначению.
3. Эквивалентный диаметр для прямоугольной емкости шириной b равен:

$$D_3 = \sqrt{\frac{4b^2}{\pi}}$$

4. Количество сопел при вертикальном расположении определяется их размещением из условия максимального заполнения днища емкости расчетными площадями струй с D_{Xmax} в сечении корпуса на расстоянии X_{max} от устья сопла.
5. Расстояние сопла от дна емкости $X_{max}(h)$ рекомендуется принимать равным $100d_0$, обеспечивающим подсос жидкости при максимальной турбулентности из окружающей среды к струе и необходимые потоки в придонной области при встрече струи с днищем. Расстояние между соплами с учетом взаимодействия струй вытекающей из них жидкости принимается $100d_0$, а между соплами и стенкой емкости – $50d_0$.
6. Определяется расход через одно сопло Q_1 , скорость на срезе сопла v_0 , критерий Re :

$$Q_1 = Q/n, v_0 = 4Q_1 / \pi d_0^2, Re = v_0 d_0 \rho / \mu$$

7. Параметры струи рассчитываются по данным [8]:

$$D_{Xmax} = d_0 + 6,8 a X_{max},$$

$$v_{Xmax} = v_0 \frac{0,48 d_0}{a X_{max} 0,14 S},$$

где $X_{max}=100d_0$ – расстояние, на котором поток вытекающей из сопла жидкости обладает еще силой подхватывать жидкость из окружающей среды; a – эмпирическая константа, зависящая от структуры струи на срезе сопла, $a=0,07...0,08$; S – площадь сечения струи на срезе сопла.

8. Время перемешивания τ рассчитывается по следующим зависимостям:

$$\tau = 0,364 \left(\frac{H}{h} \right)^{0,33} \frac{H^{0,6} D_3^{1,2}}{\nu^{0,86} g^{0,06} \text{Re}^{0,6}}$$

Уравнение справедливо для следующих условий: $0,5 \leq H/D_3 \leq 1$; $0,4 \leq H/h \leq 1$; $D_3/d_0 < 125$; $0,7 \cdot 10^4 \leq \text{Re} \leq (3,1 \dots 3,6) \cdot 10^4$.

При уточнении влияния кинематической вязкости ν перемешиваемой жидкости в пределах $(0,66 \dots 1,36) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ при $T=(283 \dots 315) \text{ К}$ зависимость для τ принимает вид:

$$\tau = 11,7 \left(\frac{H}{h} \right)^{0,33} \frac{H^{0,6} D_3^{1,2}}{\nu^{0,86} g^{0,06} \text{Re}^{0,6}}$$

Максимальная погрешность $\tau_{\text{расч}}$ и $\tau_{\text{эксп}}$ составляет 10 %.

9. По диффузионной теории подъем частиц осадков со дна емкости осуществляется под действием пульсаций скорости и давления, возникающих в турбулентном потоке жидкости. Чем больше отношение средней пульсационной скорости \bar{W} к скорости осаждения частиц $W_{\text{ос}}$, тем больше вероятность уноса частиц с днища. Величина средней пульсационной скорости определяется следующим образом [9]:

$$\bar{W} = \frac{0,63 v_{\text{ср}}}{H^{0,22}}$$

Задаваясь ранее $a_L=0,1$; $a_p=1$, $a_\mu=1$, получили $a_v=10$.

Для известных значений $v_{\text{ср,н}}$, H_n , $v_{\text{ср,м}}$, H_m масштабный коэффициент $a_{\bar{W}}$ равен:

$$a_{\bar{W}} = \frac{0,63 v_{\text{ср,м}} H_n^{0,22}}{0,63 v_{\text{ср,н}} H_m^{0,22}} = \frac{a_{\text{вср}}}{a_H^{0,22}}$$

при $a_{\text{вср}}=10$ и $a_H=0,1$ получим $a_{\bar{W}}=16,6$

Полагая $\bar{W}_m/W_{\text{ос,м}}=C$ и $\bar{W}_n/W_{\text{ос,н}}=C$, получим

$$\frac{\bar{W}_m W_{\text{ос,н}}}{\bar{W}_n W_{\text{ос,м}}} = 1.$$

При этом $a_{\bar{W}}/a_{W_{\text{ос}}}=1$ и $a_{W_{\text{ос}}}=a_{\bar{W}}=16,6$ т. е. скорость осаждения частиц при моделировании и принятых a_L , a_p , a_μ должна быть в 16,6 раза больше скорости осаждения на натурном аппарате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баясников А.В., Зарипова Л.Ф., Пищулин В.П. и др. Моделирование процесса перемешивания струйным методом жидких радиоактивных отходов в цилиндрических емкостях // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 3. – С. 53–56.
2. Седов В.М. Технология переработки жидких радиоактивных отходов. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1978. – 55 с.
3. Копырин А.А. Технология производства и радиохимической переработки ядерного топлива. – М.: Атомэнергоиздат, 2006. – 573 с.
4. Громов Б.В. Химическая технология облученного ядерного топлива. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 352 с.
5. Баясников А.В., Пищулин В.П., Сваровский А.Я. Интенсификация процессов отмывки специального оборудования от радионуклидов в вихревых потоках // Технология и автома-

Из формулы Стокса

$$d_{\text{ч}}^2 = \frac{18\mu W_{\text{ос}}}{\Delta\rho g}$$

по скорости $W_{\text{ос,н}}$ определяется размер частиц осадков модели:

$$d_{\text{ч,м}} = \sqrt{\frac{18\mu 16,6 W_{\text{ос,н}}}{\Delta\rho g}}$$

Условие взвешивания частиц осадка в потоке раствора зависит от величины отношения $\bar{W}_m/W_{\text{ос,м}}$ или $\bar{W}_n/W_{\text{ос,н}}$. В этом случае с увеличением соотношения увеличивается вероятность уноса частиц со дна емкости для слабосолевых ЖРО.

Скорость осаждения частиц $W_{\text{ос,м}}$ рассчитывается по формуле Стокса, затем определяется критерий Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{W_{\text{ос,м}} d_{\text{ч,м}} \rho}{\mu}$$

При условии $\text{Re} > 0,2$ теоретическая скорость осаждения $W'_{\text{ос,м}}$ рассчитывается через критерий Архимеда [10]:

$$\text{Ar} = \frac{g d_{\text{ч,м}}^3 (\rho_1 - \rho_2)}{\nu_2^2 \rho_2} \text{ и } \text{Re}' = \left(\frac{\text{Ar}}{13,9} \right)^{1/4},$$

тогда определяется $W'_{\text{ос,м}} = \frac{\text{Re}' v_2}{d_{\text{ч,м}}}$ и сравнивается с рассчитанными значениями по уравнению Стокса.

Выводы

1. На основе теории подобия проведено моделирование процесса перемешивания струйным методом слабосолевых жидких радиоактивных отходов в прямоугольной емкости. Разработана методика расчета перемешивающего устройства.
2. По заданным характеристикам раствора и частиц осадка слабосолевых жидких радиоактивных отходов РХЗ на модельной прямоугольной емкости определены размер частиц, скорость их осаждения, исследован режим перемешивания и подъема осадков по скоростям потоков жидкости.

тизация атомной энергетики и промышленности: Матер. отрасл. науч.-техн. конф. – Северск: СГТИ, 2005. – С. 163–166.

6. Зимон А.Д. Дезактивация. – М.: Атомиздат, 1975. – 280 с.
7. Хижняк А.Е., Баясников А.В., Пищулин В.П., Сваровский А.Я. Устройство для дезактивации поверхностей аппаратов // Технология и автоматизация атомной энергетики: Сб. статей отрасл. науч.-техн. конф. – Северск: СГТА, 2007. – С. 122–124.
8. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Ч. 1. – М.: Наука, 1991. – 600 с.
9. Караушев А.В. Проблемы динамики естественных водных потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1960. – 392 с.
10. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Альянс, 2006. – 753 с.

Поступила

УДК 621.039.576

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УСТАНОВКИ С ВОДОГРАФИТОВЫМ РЕАКТОРОМ ПРИ ЧАСТИЧНЫХ НАГРУЗКАХ

А.В. Воробьев, А.М. Антонова

Томский политехнический университет

E-mail: worob@tpu.ru

Предложен и обоснован способ эксплуатации водографитового реактора типа РБМК при регулируемом составе продувочного газа. Приведены экспериментально найденные статические и динамические характеристики температурного состояния графитового замедлителя реактора РБМК-1000. Разработан программный код для инженерных расчетов интегральных характеристик, определяющих величину запаса реактивности реактора РБМК-1000, в медленных переходных процессах.

Ключевые слова:

Водографитовый реактор, продувочный газ, температура замедлителя, коэффициент теплопередачи, экспериментальные характеристики, моделирование.

Key words:

Water-graphite reactor, blow-down gas, moderator temperature, heat transfer coefficient, experimental characteristics, modeling.

Введение

Одним из факторов, определяющих надежность и безопасность работы АЭС с водографитовыми реакторами, является надежность графитового замедлителя (кладки), рассчитанного на весь срок эксплуатации реактора.

Графитовая кладка реактора РБМК-1000 имеет форму цилиндра диаметром 11,8 м и высотой 7 м, составленного из 2488 колонн, собранных из графитовых блоков сечением 0,25×0,25 м с осевыми цилиндрическими отверстиями. В отверстиях установлены трубы каналов (ТК, СУЗ и др.). Тепловыделяющие сборки, расположенные внутри каналов, охлаждаются водой с температурой 250...280 °С. При работе реактора часть (5...6 %) полной тепловой мощности реактора выделяется в графите кладки. Это тепло также отводится к трубам ТК. Для обеспечения теплового контакта с блоками на трубы каналов надеты разрезные графитовые кольца, а в зазоры между трубами и блоками подается продувочный газ (штатный состав 10 % азота и 90 % гелия, по объему). Конструктивные и схемные решения реакторных установок РБМК позволяют осуществлять изменение состава продувочного газа [1].

Температурное поле в графитовой кладке определяется в первую очередь мощностью реактора. Влияет на температуру графита и содержание азота C_N в азотно-гелиевой смеси (далее – состав продувочного газа), т. к. ее компоненты существенно различаются по теплофизическим свойствам: теплопроводность у гелия почти в шесть раз выше, чем у азота.

Температура графита кладки является одним из основных параметров, лимитирующих работу реактора РБМК. В практике принято, что на всех режимах работы реактора максимальная температура графита не должна превышать значения пороговой температуры 750...800 °С [1, 2], при которой окисление графита в присутствии водяных паров идет более интенсивно. При нестационарных ре-

жимах работы реакторов РБМК влияние графитовой кладки на надежность и безопасность АЭС ещё более возрастает, т. к. изменения мощности реактора связаны с термоциклическими напряжениями в графите и могут привести к преждевременному разрушению кладки. Кроме того, колебания средней температуры графита кладки (замедлителя) ведут к соответствующим изменениям реактивности реактора, т. к. аппараты типа РБМК обладают существенным по величине положительным эффектом реактивности по температуре замедлителя [1, 3].

Эффект, связанный с изменением температуры графита при изменении состава смеси, может быть использован для повышения эффективности работы энергоблоков РБМК на частичных нагрузках. Для этого, например, при снижении мощности реактора увеличивают содержание азота в продувочной смеси. Отвод тепла от графита уменьшается, температура его растёт и этим компенсируется изменение температуры, а значит и реактивности, из-за изменения мощности [4, 5].

Следовательно, определение температурных характеристик графитовой кладки реактора РБМК, а также обоснование способов управления ее тепловым состоянием является актуальной задачей.

1. Экспериментальные исследования

Решение поставленной задачи требует знания соответствующих статических и динамических характеристик графитового замедлителя. Аналитическое определение большинства из них представляет достаточно сложную задачу. Поэтому при построении модели объекта широко использовались результаты экспериментальных исследований на реакторах РБМК-1000 первой очереди Ленинградской АЭС.

Специфические условия работы оборудования АЭС обусловили использование для измерения основных исследуемых параметров штатных приборов с привлечением системы централизованного

контроля (СЦК) «Скала». Для измерения температуры графита установлено 12 блоков термопар БТ-0170 (8 – в а.з.). Каждый блок состоит из трех термопар ТХА-1449. Анализ состава продувочной смеси осуществлялся посредством двух (на входе и выходе) термокондуктометрических газоанализаторов типа ТП4102 с платиновой нитью в качестве чувствительного элемента. Измерение расхода смеси производилось с помощью дифманометра ДМ-3573. Суммарная погрешность определения основных исследуемых параметров не превышала $\pm(2,5...4) \%$ для содержания азота в продувочной смеси, $\pm(9...15) \text{ }^\circ\text{C}$ – для температуры графита, $\pm(12...15) \text{ нм}^2/\text{ч}$ – для расхода смеси.

Для определения статических характеристик графитовой кладки реактора проводились эксперименты со ступенчатым изменением состава продувочной смеси. В рамках каждого эксперимента, включающего от трех до восьми опытов, мощность аппарата поддерживалась неизменной, а состав газовой смеси менялся от опыта к опыту. Промежутки времени между двумя соседними опытами определялись длительностью переходных процессов по температуре графита кладки и составлял 3...5 часов. Входные параметры в экспериментах варьировались в достаточно широких пределах: содержание азота в продувочной смеси – от 7 до 100 %, тепловая мощность реактора – от 1600 до 3180 МВт.

В качестве выходной величины рассматривалась средняя по кладке температура $t_{ГК}$ на стыках графитовых колонн, рассчитываемая в СЦК «Скала» по штатной программе.

После первичной обработки проведенных экспериментов статистически значимыми оказались результаты 18 опытов. Для их аппроксимации были выбраны квадратичный и линейный полиномы, оценка параметров последних производилась с помощью традиционного метода наименьших квадратов. Проверка адекватности моделей осуществлялась по F -критерию; значимость (уровень $\alpha=0,9$) коэффициентов регрессии – с помощью критерия Стьюдента.

Указанные выше квадратичный и линейный полиномы имеют вид [4]:

$$t_{ГК} = b_0 + b_1 Q_P + b_2 C_N + b_3 Q_P^2 + b_4 Q_P C_N + b_5 Q_P^2, \quad (1)$$

$$t_{ГК} = d_0 + d_1 Q_P + d_2 C_N, \quad (2)$$

где $b_0, b_1, b_2, \dots, d_0, d_1, \dots$ – численные значения коэффициентов регрессии; Q_P – тепловая мощность реактора, МВт; C_N – содержание азота в продувочной смеси, % (по объему).

Анализ параметров квадратичного полинома (2) позволил определить значения коэффициентов влияния (передачи) тепловой мощности реактора k_Q и состава продувочной смеси k_C на температуру графитового замедлителя. Выяснилось, что коэффициент влияния k_Q существенным образом зависит от состава смеси в кладке: при изменении состава с гелия на азот коэффициент k_Q увеличивается более чем в два раза (от 0,0643 до 0,1264 $^\circ\text{C}/\text{МВт}$). На вели-

чину коэффициента влияния k_C , напротив, сильное воздействие оказывает уровень мощности аппарата: при изменении тепловой мощности от 3200 до 1600 МВт коэффициент k_C уменьшается с 1,98 до 0,99 $^\circ\text{C}/\%$.

Из соответствующего выражения линейного полинома (2) значения искомых коэффициентов передачи получаются следующими: $k_Q=0,0764 \text{ }^\circ\text{C}/\text{МВт}$; $k_C=1,197 \text{ }^\circ\text{C}/\%$. Использование более простого линейного полинома дает вполне удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными (рис. 1).

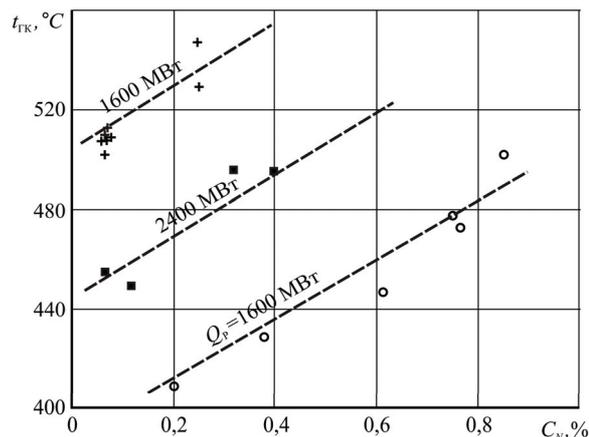


Рис. 1. Зависимость средней температуры графита кладки реактора РБМК-1000 от состава продувочной смеси и тепловой мощности аппарата: --- – расчет по формуле (2); +, ■, ○ – опытные данные при различных нагрузках

Основной задачей динамических экспериментов являлось определение постоянных времени при возмущении тепловой мощности реактора и состава продувочной смеси. В качестве выходной величины также рассматривалась температура графита $t_{ГК}$, осредненная по количеству термопар в активной зоне (а. з.).

Исходной информацией для определения характеристик графитовой кладки при возмущении состава продувочной смеси послужили данные пяти специально спланированных опытов. Для определения динамических характеристик графитовой кладки при возмущении тепловой мощности реактора использовались в основном данные об эксплуатационных режимах.

Полученные переходные кривые по обоим каналам аппроксимировались выражениями типа [6]

$$t_{ГК} = d_0 + d_1 Q_P + d_2 C_N; \quad (3)$$

$$W(s) = \frac{k \exp(-\tau_2 s)}{(T_2 s + 1)^2}, \quad (4)$$

где k – коэффициент передачи (влияния) для соответствующего канала; τ – время транспортного запаздывания; T – постоянная времени.

Значения параметров передаточных функций приведены в таблице.

Анализ результатов динамических опытов показывает, что существенная инерционность объек-

та по каналу состав продувки – температура графита, кроме всего прочего, обусловлена малыми скоростями движения газа в кладке. За счет увеличения расхода при включении второй газодувки соответствующие постоянные времени могут быть уменьшены более чем в 1,3 раза. Инерционность кладки по каналу тепловая мощность – температура графита существенно меньше, чем при возмущении состава смеси. Динамические характеристики объекта при этом сильно зависят от состава продувочного газа: при изменении состава с азота на гелий постоянная времени уменьшается почти в три раза (таблица).

Таблица. Значения передаточных функций графитовой кладки реактора РБМК

| Канал | Режим работы газодувок | | Примечания |
|-----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| | 1 газодувка в работе | 2 газодувки в работе | |
| $t_{II}=f(C_N)$ | $\tau_1=25,3$ мин; $T_1=63,4$ мин | $\tau_1=12,4$ мин; $T_1=47,4$ мин | Передаточная функция (3) |
| | $\tau_2=9,4$ мин; $T_2=38,5$ мин | $\tau_2=2,0$ мин; $T_2=28,8$ мин | Передаточная функция (4) |
| $t_{II}=f(Q_p)$ | $\tau_1=0$ мин; $T_1=81$ мин | | Передаточная функция (3); продувка – азот |
| | $\tau_1=0$ мин; $T_1=29,9$ мин | | Передаточная функция (3); продувка – гелий |

2. Эффекты реактивности реактора РБМК

Основными эффектами реактивности, определяющими динамику ядерного реактора РБМК в эксплуатационных режимах, являются: отравление ксеноном-135; температурный эффект замедлителя; топливный температурный эффект и паровой эффект. Отравление самарием, шлакование и выгорание топлива, оказывающие влияние на реактивность, происходят только в продолжительных (десятки, сотни часов) переходных процессах.

Отравление реактора ксеноном. Наиболее важным эффектом, определяющим изменение реактивности по сравнению с другими эффектами, является отравление реактора нуклидом ксенон-135, обладающим максимальным сечением поглощения тепловых нейтронов $\sigma_{Xe} = 3 \cdot 10^{-18}$ см². Дифференциальные уравнения, описывающие временное изменение концентраций йода и ксенона в единичном объеме а. з., имеют вид [7]:

$$dN_J/dt = \gamma_J \Phi \sigma_f N_5 - \lambda_J N_J;$$

$$dN_{Xe}/dt = \gamma_{Xe} \Phi \sigma_f N_5 + \lambda_J N_J - \lambda_{Xe} N_{Xe} - \Phi \sigma_{Xe} N_{Xe},$$

где γ_J, γ_{Xe} – парциальный выход йода-135 и ксенона-135; λ_J, λ_{Xe} – постоянные радиоактивного распада йода-135 и ксенона-135, 1/с; Φ – плотность потока тепловых нейтронов, нейтр/(см²·с); σ_f – сечение деления урана-235, см²; σ_{Xe} – сечение поглощения тепловых нейтронов ксеноном-135, см²; N_5, N_J, N_{Xe} – концентрации ядер урана-235, йода-135 и ксенона-135, 1/см².

Эффект реактивности по температуре замедлителя. Вторым по значению из эффектов, определяю-

щих поведение оперативного запаса реактивности в переходных режимах, является температурный эффект графитового замедлителя. При увеличении температуры графита он вызывает увеличение коэффициента размножения, т. е. представляет собой положительную обратную связь.

Изменение реактивности, соответствующее изменению температуры графитового замедлителя на 1 градус, называется температурным коэффициентом реактивности замедлителя, 1/°C:

$$\alpha_c = \Delta \rho_c / \Delta t_c,$$

где $\Delta \rho_c$ – изменение реактивности, соответствующее изменению средней температуры графита Δt_c .

Коэффициент реактивности замедлителя существенным образом зависит от глубины выгорания топлива. Так, в реакторах РБМК-1000 в процессе перехода от начальной загрузки в режим установившихся перегрузок коэффициент α_c изменяется от $3 \cdot 10^{-5}$ до $5 \cdot 10^{-5}$ 1/°C [3].

Эффект реактивности по температуре топлива. На практике этот эффект называют мощностным. Температурный эффект реактивности по топливу обусловлен в основном эффектом Доплера. Для реакторов на тепловых нейтронах он всегда отрицателен. Изменение реактивности при изменении температуры топлива на 1 градус называют топливным коэффициентом реактивности, 1/°C:

$$\alpha_t = \Delta \rho_t / \Delta t_t,$$

где $\Delta \rho_t$ – изменение реактивности, соответствующее изменению средней температуры топлива Δt_t .

В рабочей точке для реактора РБМК-1000 топливный коэффициент реактивности составляет $-(1,0 \dots 1,5) \cdot 10^{-5}$ 1/°C [3, 8].

Паровой эффект реактивности. Паровой эффект реактивности можно считать вторым мощностным эффектом, т. к. количество пара в а. з. определяется мощностью реактора и изменяется практически при неизменной температуре теплоносителя. Ниже записанное отношение принято называть паровым коэффициентом реактивности:

$$\alpha_\phi = \Delta \rho_\phi / \Delta \phi,$$

где $\Delta \rho_\phi$ – изменение реактивности, соответствующее изменению среднего объемного паросодержания $\Delta \phi$ в каналах реактора.

Расчетные и экспериментальные исследования показывают существенную зависимость парового коэффициента реактивности от глубины выгорания. Так, при номинальных параметрах реактора РБМК-1000 коэффициент α_ϕ меняется по кампании от $-0,006$ до $+0,018$ [1, 3].

Баланс реактивности реактора РБМК. Учитывая все вышесказанное, можно записать уравнение для оценки результирующего изменения запаса реактивности реактора РБМК в процессе его разгрузки, например с номинальной мощности:

$$\Delta \rho_{\text{зан}} = \alpha_t (t_t - t_{t0}) + \alpha_c (t_c - t_{c0}) + \alpha_\phi (\phi - \phi_0) (\rho_{Xe} - \rho_{Xe0}), \quad (5)$$

где индексом «0» обозначены номинальные значения соответствующих параметров реактора. Подобным образом можно оценить изменение запаса реактивности после перехода реактора с одного произвольного уровня мощности на другой.

3. Описание модели

Для решения задачи по обоснованию способов управления тепловым состоянием графитового замедлителя реактора РБМК-1000 и тем самым для воздействия на его реактивность был разработан код, составленный в системе объектно-ориентированного визуального программирования Delphi. Моделирующий код предназначен для расчета относительно медленных переходных процессов в реакторе РБМК-1000. Алгоритм, реализованный в программном коде, учитывает теплогидравлические процессы в активной зоне и в частности в графитовом замедлителе, а также нестационарное ксеноновое отравление, рассматриваемые в точечном приближении.

Исходя из поставленной задачи (исследование относительно медленных переходных процессов), изменение температуры топлива и паросодержания вычисляется с помощью статических зависимостей [4], а для описания нестационарного ксенонового отравления и температурного состояния графитового замедлителя используются дифференциальные уравнения. В уравнениях, описывающих динамику замедлителя, используются численные значения констант (коэффициенты влияния k_c , k_0 ; постоянные времени T по каналам тепловая мощность — температура графита, состав продувочного газа — температура графита), полученные в результате натурных опытов на реакторах РБМК-1000 (табл. 1).

Баланс реактивности в модели представляет собой алгебраическую сумму эффектов (5), обусловленных изменением всех определяющих параметров: паросодержания, температур топлива и графита.

Решения дифференциальных уравнений модели производилось методом Рунге—Кутты 4-го порядка.

Для проверки адекватности модели был проведен тестовый расчет теплового состояния графитового замедлителя с исходными данными реального эксплуатационного режима реактора: снижение тепловой мощности аппарата Q_p на 600 МВт при одновременном изменении содержания азота C_N в продувочном газе на 25...27 %. Результаты расчета и опытные точки представлены на рис. 2.

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 2, указывает на удовлетворительное совпадение

(среднеквадратическое отклонение $3,4\text{ }^\circ\text{C}$) расчетных по модели данных с опытными точками и возможность ее использования для расчетных исследований.

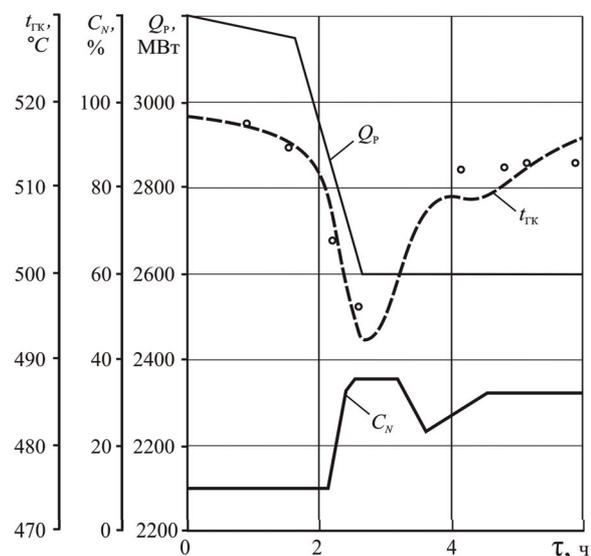


Рис. 2. Временное поведение параметров реактора РБМК-1000 в опыте с одновременным изменением тепловой мощности аппарата и состава продувочного газа: --- и — — расчеты по модели; о — опытные данные

Выводы

1. Проведены исследования температурного режима кладки реактора РБМК при изменениях его мощности с использованием регулируемого состава продувочного газа.
2. На основе экспериментальных исследований определены статические (коэффициенты влияния) и динамические (времена запаздывания, постоянные времени) характеристики температурного состояния графитового замедлителя реактора РБМК-1000.
3. Установлено, что динамические параметры объекта при возмущении тепловыделения зависят от состава газовой среды. Рекомендовано использовать полученные характеристики для расчета медленных переходных процессов в реакторах РБМК.
4. Разработан программный код для инженерных расчетов интегральных характеристик, определяющих величину запаса реактивности установки с реактором РБМК-1000, в медленных переходных процессах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доллежал Н.А. Канальный ядерный энергетический реактор. – М.: Атомиздат, 1980. – 208 с.
2. Головацкий А.В., Нестеров В.Н., Шаманин И.В. Оптимальная температура эксплуатации графита для обеспечения проектной глубины выгорания ядерного топлива в реакторе ГТ-МГР // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 2. – С. 71–76.
3. Романенко В.С. Некоторые вопросы физики РБМК (обзор) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. – 1981. – Вып. 5 (18). – С. 8–20.
4. Воробьев А.В. Управлением составом газовой смеси, продуваемой через графитовую кладку реактора РБМК, для повышения надежности и эффективности его работы: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1988. – 20 с.
5. Способ регулирования мощности канального уран-графитового реактора: а.с. 1316448 Гос. Комитет СССР по делам изобр. и открытий / Воробьев А.В., Иванов В.А., Еперин А.П. и др.; заявитель и патентообладатель Ленинградский политех. ин-т. – 08.02.1987.
6. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. – М.: Изд-во МЭИ, 2004. – 400 с.
7. Дементьев Б.А. Ядерные энергетические реакторы. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 352 с.
8. Гольцев А.О., Давыдова Г.Б., Давиденко В.Д. Влияние депрессии потока нейтронов в ячейке РБМК на величину максимальной и средней температуры топлива // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 4. – С. 5–7.

Поступила 01.02.2013 г.

УДК 534:621.32

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНАРНОЙ K_rCl-ЭКСИЛАМПЫ БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА

Э.А. Соснин^{1,2}, В.А. Панарин¹, А.А. Пикиулев³, В.Ф. Тарасенко¹

¹Институт сильноточной электроники СО РАН, г. Томск

E-mail: badik@loi.hcei.tsc.ru

²Томский государственный университет

³Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование акустических характеристик планарной K_rCl-эксилампы барьерного разряда, заполненной смесью K_r:Cl₂=400:1 при давлении 20 кПа. Выполнены измерения спектра акустических колебаний колбы эксилампы. В экспериментах обнаружены резонансы на частотах 4,96; 5,36; 9,92; 10,80 и 21,60 кГц. Расчетным путем определены частоты собственных колебаний стенок колбы эксилампы и акустических колебаний в газе. Определена энергия акустических колебаний газа в зависимости от частоты колебаний стенок колбы. Сравнение результатов экспериментов и расчетов показало, что в области частот >10 кГц максимумы акустического сигнала совпадают с собственными частотами колебаний газа в колбе эксилампы.

Ключевые слова:

Эксилампа, барьерный разряд, акустические колебания.

Key words:

Excilamp, dielectric barrier discharge, acoustic waves.

В последние два десятилетия источники спонтанного ультрафиолетового и вакуумного ультрафиолетового излучения связанно-свободных переходов эксимерных (R₂^{*}, X₂^{*}) или эксиплексных (RX^{*}) молекул, где R – инертные газы (Ar, Kr, Xe) а X – галогены (F, Br, Cl, I), стали объектом многих исследований и приложений (см. ссылки в [1]). Ключевыми вопросами в исследовании эксиламп сегодня являются вопросы обеспечения максимальной эффективности и надёжности устройства. Для изучения традиционно применяются три подхода: 1) оптический, с акцентом на регистрации и интерпретации спектральных и энергетических параметров излучения; 2) электрофизический, в котором моделью лампы служит эквивалентная схема, а объектом внимания являются величины тока и напряжения в системе; 3) плазмохимический, где основное внимание уделяется кинетике процессов в плазме, формирующейся в разрядном промежутке. Эти подходы, как правило, дополняют друг друга [2–4]

и позволяют получать ценную информацию о режимах работы прибора.

В [5, 6] был предложен новый подход для изучения баланса энергии в эксилампах, основанный на регистрации быстрой (характерное время ~100 мс) и медленной (~100 с) составляющих скачка давления, возникающего при включении, работе и выключении эксилампы. Газовая смесь здесь рассматривалась как термодинамическая система, повышение температуры которой происходит при постоянном объеме (изохорный процесс).

На основе обобщения экспериментальных данных в работах [5, 6] был сделан вывод, что амплитуда быстрой составляющей скачка давления характеризует часть вложенной энергии, которая термализуется в газе, а амплитуда медленной составляющей – энергию, расходуемую на нагрев колбы эксилампы. В рамках такого подхода за баланс энергии в эксилампе барьерного разряда (БР) отвечают четыре процесса:

- I) непосредственный нагрев газа (за счет термализации энергии разряда в плазмохимических процессах);
- II) генерация и диссипация акустических волн;
- III) прямой нагрев стенок колбы за счет бомбардировки ионами и электронами;
- IV) оптическое излучение.

В [7] были проведены прямые измерения акустических параметров коаксиальной эксилампы и подтверждены выводы моделирования [5], согласно которым с увеличением давления в KгCl-эксилампе БР наблюдается постепенная смена механизма диссипации энергии. В частности, при увеличении давления происходит существенное снижение доли тепловой мощности разряда, ограничение мощности и эффективности УФ-излучения, и всё большая доля энергии разряда расходуется на возбуждение акустических колебаний. Переход к высоким давлениям обогащает фурье-спектр акустического сигнала и увеличивает его интенсивность. При очень высоких давлениях происходит снижение акустического сигнала до уровня, соответствующего колебаниям колбы эксилампы при отсутствии разряда.

Цель данной работы – теоретическое и экспериментальное исследование спектра акустических колебаний планарной KгCl-эксилампы БР.

Эксперименты проводились на установке, рис. 1. Колба эксилампы 2 была выполнена из двух круглых кварцевых пластинок, имеющих пропускание на $\lambda=200$ нм >90 %, спаянных по краям и образующих газоразрядный промежуток $d=10$ мм. Перфорированный электрод 4 выполнен из металлической сетки с пропусканием 72 %. Диаметр выходного окна составлял 6 см. Сплошной электрод-отражатель 3 изготовлен из алюминийево-магниево-фольги толщиной 40 мкм. Толщина стенок колбы составляла 1,4 мм.

Лампа была заполнена смесью Kг: Cl₂=400:1 и отпаяна при давлении смеси 20 кПа. Для этих условий, как было показано ранее [1], обеспечиваются максимальные величины эффективности и плотности мощности ультрафиолетового излучения рабочих молекул KгCl*.

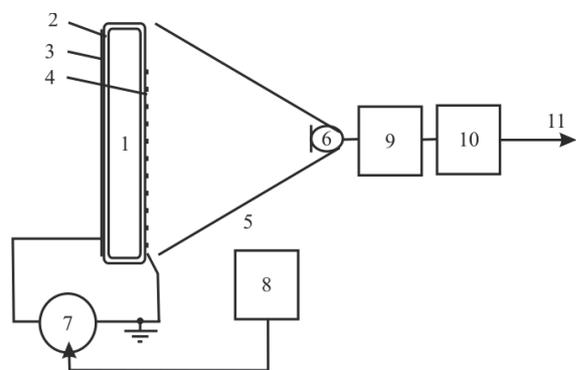


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – разрядный промежуток; 2 – колба планарной лампы; 3, 4 – сплошной и перфорированный электроды; 5 – собирающий конус; 6 – микрофон; 7 – источник питания лампы; 8 – задающий генератор; 9 – питание микрофона; 10 – полюсовый фильтр; 11 – выход на осциллограф

Акустический сигнал собирался конусом 5 на ультразвуковой конденсаторный микрофон РМС-2 с трехконтактным выходом и близкой к линейной частотной характеристикой до 20 кГц. Через операционный усилитель 9 и RC-цепочку 10 (для фильтрации частот ниже 340 Гц) сигнал с микрофона подавался на осциллограф TDS 3034 (Tektronics Inc.).

Источник питания 7 создавал импульсы напряжения амплитудой до 5,2 кВ и длительностью на полувывоте 1,5 мс. Частота следования импульсов f могла меняться от 1 до 60 кГц. Для стабилизации частоты применялся задающий генератор 8 (BNC 563, Berkeley Nucleonics Corp.).

Проведено теоретическое моделирование акустических процессов в плоской колбе эксилампы, а именно, найдены частоты собственных колебаний стенок колбы эксилампы и акустических колебаний в газовой смеси, а также определена энергия акустических колебаний газа в зависимости от частоты колебаний стенок.

Условия определения собственных частот колебаний стенок эксилампы, на которых расположены электроды, были таковы: стенки выполняют функцию диэлектрических барьеров и представляют собой круглые пластины с радиусом $r_0=30$ мм и толщиной $b=14$ мм. Материал стенок – кварц КУ-1 (ООО «Завод «Кварц»). Собственные частоты колебаний круглой пластины можно определить по следующей формуле [8]:

$$\omega_{ml}^0 = \alpha_{ml}^2 \frac{h\pi^2}{r_0^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho_0\{1-\sigma^2\}}}, \quad (1)$$

где α_{ml} – постоянные; $m=0;1;2, \dots$ – азимутальное число (определяет число узловых окружностей за исключением граничной $r=r_0$); $l=1;2;3, \dots$ – радиальное число (определяет число узловых диаметров без единицы); $h=b/2$ – половина толщины пластины; E – модуль Юнга; σ – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность кварца.

В табл. 1 представлены некоторые собственные частоты колебаний круглой пластины, зажатой по краю (место сварки пластины с боковой стенкой кюветы). При расчетах, ур. (1), использовались следующие значения: $h=7$ мм, $r_0=30$ мм, плотность плавленого кварца $\rho_0=2,21 \cdot 10^3$ кг/м³; $\sigma=0,178$; $E=7,25 \cdot 10^{10}$ Па [9]. Значения коэффициентов α_{ml} взяты из [8].

Таблица 1. Частоты собственных колебаний стенок эксилампы

| ν_{ml}^0 , кГц | Радиальное число | | | |
|--------------------|------------------|-------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| m | 0 | 4,23 | 16,5 | 36,9 |
| | 1 | 8,85 | 25,3 | 50,0 |
| | 2 | 14,50 | 36,7 | 65,7 |

Для расчёта частот и энергии акустических колебаний газа было использовано волновое уравнение в цилиндрических координатах (r, φ, z) [10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left\{ 1 + \frac{i}{\omega \tau} \right\} \nabla^2 u = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где v – скорость звука; u – скорость перемещения частиц газа в акустической волне; $\tau = \tau(\omega)$ – характерное время затухания интенсивности акустических волн с частотой ω . Предполагалось, что формирование акустических волн в газе происходит из-за вынужденных колебаний стенок кюветы при приложении к электродам импульсного напряжения (электрострикционные силы).

Начало системы координат (r, φ, z) совпадает с центром внутренней поверхности нижней стенки колбы эксилампы, а координата z направлена перпендикулярно поверхности стенки. Длина разрядного промежутка составляет $d=10$ мм. Стенки колбы эксилампы совпадают с плоскостями $z=0$ (нижняя стенка) и $z=d$ (верхняя).

Скорости перемещения стенок колбы в направлении оси Oz могут быть представлены в виде ряда по следующим гармоникам:

$$\begin{cases} u_{ml}^{1,2}(r, \varphi, t) = \\ = U_{ml}^{1,2} J_m(k_{ml} r) \exp\{im\varphi\} \exp\{i\omega t\}, \\ J_m(x) = \left\{ \frac{x}{2} \right\}^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(m+p+1)} \left\{ \frac{x}{2} \right\}^{2p}, \\ k_{ml} = \frac{\pi \beta_{ml}}{r_0}, \end{cases} \quad (3)$$

где 1, 2 – индексы, относящиеся к нижней и верхней стенке колбы; $J_m(x)$ – функция Бесселя порядка m ; Γ – гамма-функция [10]; β_{ml} – постоянные, для которых $J_m(k_{ml} r_0) = 0$ [8].

Решение уравнения (2) с граничными условиями на верхней и нижней стенках кюветы вида (3) и нулевым граничным условием на боковой стенке ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{ml}(r, \varphi, z, t) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} J_m(k_{ml} r) \exp\{im\varphi\} \sin\left\{ \frac{\pi n z}{d} \right\} \exp\{i\omega t\} + \\ + \left\{ U_{ml}^1 + (U_{ml}^2 - U_{ml}^1) \frac{z}{d} \right\} \times \\ \times J_m(k_{ml} r) \exp\{im\varphi\} \exp\{i\omega t\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $n=1, 2, \dots$ – продольное число (определяет число узловых плоскостей без единицы).

Для коэффициентов A_{nm} получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_{nm} \approx \frac{2\omega^2}{\pi n} \frac{\{\omega_{nmk}^2 - \omega^2\} - \frac{i\omega_{nm}^2}{\omega \tau}}{\{\omega_{nm}^2 - \omega^2\}^2 + \left\{ \frac{\omega_{nm}^2}{\omega \tau} \right\}^2} \times \\ \times \{U_{ml}^1 - (-1)^n U_{ml}^2\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ω_{nm} – частоты собственных колебаний газа в кювете,

$$\omega_{nm}^2 = \omega_{ml}^2 + \left\{ \frac{\nu \pi n}{d} \right\}^2 = \left\{ \frac{\nu \pi \beta_{ml}}{r_0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\nu \pi n}{d} \right\}^2.$$

При получении соотношения (5) было учтено, что $\omega_{nm} \gg \omega_{ml}$ для любых $n \geq 1$.

Исходя из выражений (4) и (5), находим, что средняя плотность энергии акустической волны $\varepsilon = \rho \langle u^2 \rangle$ (где ρ – плотность газовой среды) для моды колебаний стенок кюветы порядка (m, l) может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\langle \varepsilon_{ml} \rangle}{\alpha \rho} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 (2\omega_{nm}^2 - \omega^2)}{\pi^2 n^2} \frac{\{U_{ml}^1 - (-1)^n U_{ml}^2\}^2}{\{\omega_{nm}^2 - \omega^2\}^2 + \left\{ \frac{\omega_{nm}^2}{\omega \tau} \right\}^2} \times \\ \times \langle J_m(k_{ml} r)^2 \rangle + \frac{\{U_{ml}^1\}^2 + U_{ml}^1 U_{ml}^2 + \{U_{ml}^2\}^2}{6} \langle J_m(k_{ml} r)^2 \rangle, \\ \langle J_m(k_{ml} r)^2 \rangle = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} J_m(k_{ml} r)^2 r dr, \end{aligned}$$

где $\alpha=1$ при $m=0$ и $\alpha=1/2$ для $m \geq 1$.

Наиболее интересными являются следующие три случая, когда стенки колбы колеблются:

- 1) синхронно, т. е. $U_{ml}^1 = U_{ml}^2 = U_{ml}$. В этом случае ненулевое значение имеют только нечетные по числу n гармоники;
- 2) асинхронно, т. е. $U_{ml}^1 = -U_{ml}^2 = U_{ml}$. В этом случае ненулевое значение имеют только четные по n гармоники;
- 3) в области резонанса $\omega = \omega_{nm} + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega_{nm}$,

$$\frac{\langle \varepsilon_{nm} \rangle}{\rho U_{ml}^2} \approx \frac{4\alpha \tau^2 \omega_{nm}^2}{\pi^2 n^2} \frac{\langle J_m(k_{ml} r)^2 \rangle}{1 + 4\tau^2 \Delta\omega^2}.$$

Отсюда видно, что ширина резонанса на полувысоте составляет $\Delta\omega_{1/2} = 1/\tau$.

Результаты расчётов представлены в табл. 2 и на рис. 3–5. В расчетах был взят криптон при давлении 20 кПа и температуре 300 К. Для определения характерного времени затухания акустических колебаний использовалось соотношение [11]:

$$\tau = \frac{1}{\beta \nu}, \quad \beta = \frac{\omega^2}{2\rho \nu^3} \left(\left\{ \frac{4}{3} \eta + \zeta \right\} + \lambda \left\{ \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right\} \right),$$

где c_v, c_p – теплоемкости при постоянных объеме и давлении; λ – коэффициент теплопроводности; η – коэффициент сдвиговой вязкости; ζ – коэффициент объемной вязкости.

В табл. 2 представлены собственные частоты акустических колебаний газа в кювете. В таблице также представлены частоты продольных колебаний (для $m=0$; $l=1$ и $r_0 \gg d$) $\nu_n = \nu n/2d$.

На рис. 2 представлены частоты нескольких низших мод колебаний газа, полученные в расчетах, на фоне акустического сигнала, зарегистрированного в эксперименте. Видно, что частоты большинства мод колебаний газа совпадают с максимумами акустического сигнала. То есть данные мак-

симумы связаны с раскачкой стенок колбы акустическими колебаниями газа. Но в экспериментальном спектре также имеются максимумы (в районе 5 и 10 кГц), которые не совпадают ни с собственными частотами колебаний стенок колбы эксилампы (табл. 1), ни с частотами колебаний газа (табл. 2). Возможно, это собственные частоты колебаний колбы эксилампы как целого.

Таблица 2. Собственные частоты низших мод колебаний

| V_{nmr} , кГц | | | Радиальное число | | |
|-----------------|---------------|-----|------------------|------|------|
| n | ν_n , кГц | m | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 10,7 | 0 | 11,0 | 12,4 | 15,5 |
| | | 1 | 11,6 | 13,3 | 15,7 |
| | | 2 | 12,2 | 14,4 | 17,0 |
| 2 | 21,4 | 0 | 21,6 | 22,3 | 23,6 |
| | | 1 | 21,8 | 22,8 | 24,3 |
| | | 2 | 22,2 | 23,4 | 25,1 |
| 3 | 32,1 | 0 | 32,2 | 32,7 | 33,6 |
| | | 1 | 32,4 | 33,1 | 34,1 |
| | | 2 | 32,6 | 33,5 | 34,7 |

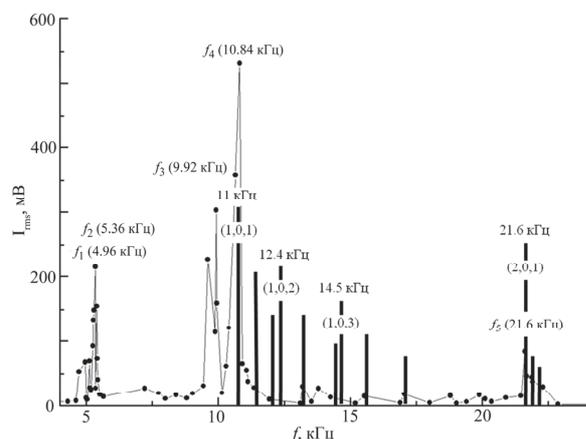


Рис. 2. Акустический сигнал от эксилампы и частоты собственных колебаний газовой смеси в колбе эксилампы. Собственным частотам соответствуют вертикальные жирные линии, у которых написаны порядковые номера мод колебаний (n, m, l) и соответствующая частота

На рис. 3 представлена относительная плотность акустических колебаний в диапазоне от 10 до 18 кГц для первой гармоники продольных колебаний ($n=1$, синхронные колебания) и для второй гармоники продольных колебаний ($n=2$, асинхронные колебания) в диапазоне 21...26 кГц.

Видно, что плотность энергии акустических колебаний для $n=2$ на порядок ниже, чем для $n=1$, что связано с более слабым возбуждением акустических колебаний (в ~ 4 раза) для второй продольной гармоники ($n=2$) и более интенсивной диссипацией акустических волн с высокой частотой колебаний. Характерное время затухания волн с частотой 10 кГц составляет 290 мс ($\Delta\nu_{1/2} \approx 1$ Гц), с частотой 20 кГц – 73 мс ($\Delta\nu_{1/2} \approx 4,4$ Гц), а с частотой 30 кГц – 32 мс ($\Delta\nu_{1/2} \approx 10$ Гц), т. е. резонансы являются очень узкими. Из рисунков видно, что в резонансах энергия акустических колебаний в колбе эксилампы на 6–8 порядков выше, чем для нерезонансного слу-

чая. В области резонансов значительная доля мощности разряда может переходить в тепло за счет диссипации энергии акустических колебаний.

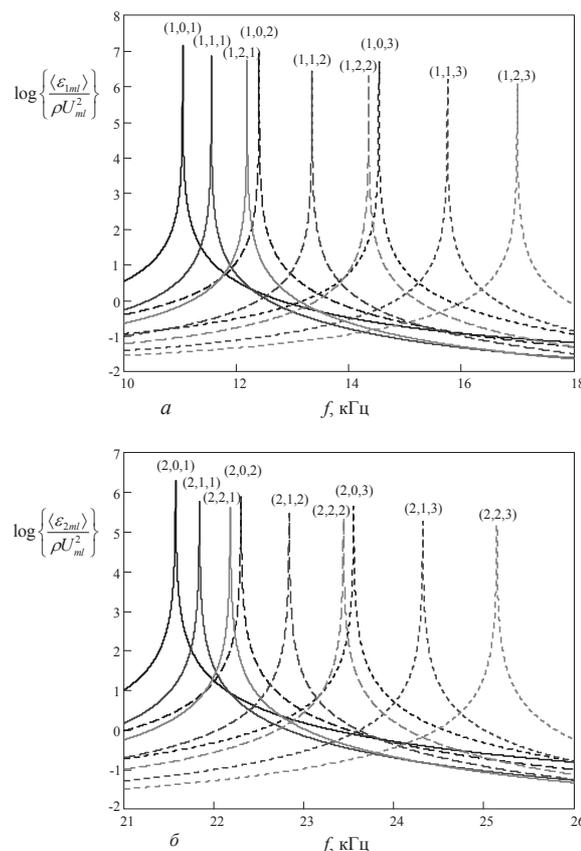


Рис. 3. Относительное значение средней по объему колбы эксилампы плотности энергии акустических волн для различных мод колебаний стенок. У кривых расставлены номера мод (n, m, l). Колебания: а) синхронные ($n=1$); б) асинхронные ($n=2$)

Выводы

1. Проведены экспериментальные и теоретические исследования акустических характеристик планарной KгCl-эксилампы барьерного разряда, заполненной смесью Kг: Cl₂=400:1 при давлении 20 кПа. В экспериментах обнаружены резонансы на частотах 4,96; 5,36; 9,92; 10,80 и 21,60 кГц.
2. Теоретически определены частоты собственных колебаний стенок колбы эксилампы и акустических колебаний в газе, определена энергия акустических колебаний газа в зависимости от частоты колебаний.
3. Сравнение результатов экспериментов и расчетов показало, что в области частот >10 кГц максимумы акустического сигнала, зарегистрированного в эксперименте, совпадают с собственными частотами колебаний газа в колбе эксилампы (в частности, резонансы на частотах 11,0 и 21,6 кГц), что обусловлено раскачкой стенок колбы акустическими колебаниями газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12–08–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойченко А.М., Ломаев М.И., Панченко А.Н., Соснин Э.А., Тарасенко В.Ф. Ультрафиолетовые и вакуумно-ультрафиолетовые эксилампы: физика, техника и применения. – Томск: STT, 2011. – 512 с.
2. Автаева С.В. Барьерный разряд. Исследование и применение. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009. – 290 с.
3. Бойченко А.М., Яковленко С.И. Моделирование ламповых источников излучения / Энциклопедия низкотемпературной плазмы // гл. ред. В.Е. Фортон. – М.: Физматлит, 2005. – Сер. Б. – Том XI-4. – В. 3. – С. 569–508.
4. Авдеев С.М., Зверева Г.Н., Соснин Э.А. Исследование условий эффективной люминесценции I_2^* (342 нм) в барьерном разряде в смеси Кг– I_2 // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 103. – № 6. – С. 420–432.
5. ПикULEV А.А., Цветков В.М. Эффект динамического скачка давления в КгСl-эксилампе барьерного разряда // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 316. – № 4. – С. 132–135.
6. Sosnin E.A., Avdeev S.M., Panarin V.A., Tarasenko V.F., Pikulev A.A., Tsvetkov V.M. The radiative and thermodynamic processes in DBD driven XeBr and KrBr exciplex lamps // Eur. Phys. J. D. – 2011. – V. 62. – P. 405–411.
7. Соснин Э.А., Панарин В.А., Тарасенко В.Ф. Акустические характеристики ХеСl-эксилампы барьерного разряда // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82. – Вып. 7. – С. 85–91.
8. Лепендин Л.Ф. Акустика. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.
9. Физические величины: Справочник / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.

Поступила 14.06.2012 г.

Страницы истории ТПУ

УДК 622.243.1

РЕКТОР ТПИ А.А. ВОРОБЬЕВ – ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ЭЛЕКТРОИМПУЛЬСНОГО СПОСОБА РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

А.М. Адам

Томский политехнический университет
E-mail: muratov@hvd.tpu.ru

Представлена история создания электроимпульсного способа разрушения горных пород ректором ТПИ А.А. Воробьевым.

Ключевые слова:

Ректор А.А. Воробьев, изобретатель, электроимпульсный способ, разрушение горных пород, изобретение, научное открытие.

Key words:

Rector A.A. Vorob'yov, inventor, electropulse method, rocks destruction, invention, scientific discovery.

Многогранная деятельность ректора (1944–1970) Томского политехнического института (ТПИ) А.А. Воробьева как высококлассного руководителя и талантливого ученого рассмотрена в многочисленных публикациях, например в [1, 2]. Но ни в одной работе нет материалов, убедительно доказывающих, что А.А. Воробьев является изобретателем электроимпульсного способа разрушения горных пород. Однако в мировой практике изобретателями признают лишь тех новаторов, технические решения которых защищены патентами или авторскими свидетельствами на изобретения, и никакие публикации, доклады, дипломы на открытия, диссертации не могут заменить эти охранные документы. Показателен пример с изобретением радио. Замечательный русский физик А.С. Попов 7 мая 1895 г. на заседании физического отделения Русского физико-химического общества продемонстрировал беспроводную электросвязь, о чем в журнале общества приведены публикации в 1895 и 1896 гг. Однако итальянский радиотехник Маркони в 1896 г. подал заявку на изобретение, а в 1897 г. получил английский патент, в котором принцип действия системы электросвязи без проводов и схема радиоприемника были тождественны созданным А.С. Поповым. Но во всем мире, кроме нашей страны, изобретателем радио признают только итальянца Г. Маркони, которому за развитие радиотехники и распространение радио в 1909 г. была присуждена Нобелевская премия.

Ее учредитель Альфред Нобель был обладателем более 350 патентов на изобретения.

Первая заявка на изобретение А.А. Воробьева в соавторстве с Е.К. Завадовской «Способ разрушения горных пород и полезных ископаемых» имеет приоритет от 26 июня 1951 г. Предмет этого изобретения следующий: «Способ разрушения горных пород и полезных ископаемых с помощью электрических разрядов в них, отличающийся тем, что с целью повышения его эффективности разрушение производят импульсными электрическими разрядами при достижении напряженности поля в горной породе или полезном ископаемом, равной или превышающей их электрическую прочность» [3]. Уже первое изобретение по электроимпульсной технологии содержит такие важные существенные признаки электроимпульсного способа, как определенная величина напряженности электрического поля, разрушение горных пород и полезных ископаемых непосредственно высоковольтными электрическими разрядами, развивающимися внутри разрушаемых материалов. Эти признаки являются одними из основных отличий электроимпульсного способа от других электроимпульсных способов разрушения горных пород, в том числе от электрогидравлического, изобретенного Л.А. Юткиным и Л.И. Гольцовой 16 января 1952 г. [4] и основанного на развитии высоковольтных разрядов не внутри разрушаемого материала, а в воде над этим материалом [5].

Новый способ был создан А.А. Воробьевым не случайно. Еще до зачисления его в 1938 г. в штат сотрудником Томского индустриального института (с 1944 г. – ТПИ) он активно занимался электрическим пробоем твердых и жидких диэлектриков в однородных и неоднородных полях для нужд электроаппаратостроения. Так, при рассмотрении вопросов по формированию электрического пробоя твердых диэлектриков [6] использованы материалы, полученные А.А. Воробьевым еще в 1934 г. Успеху в научной работе способствовала организация в 1946 г. кафедры техники высоких напряжений, которой руководил А.А. Воробьев, в 1953 г. – проблемной научно-исследовательской лаборатории электроники, диэлектриков и полупроводников, а в 1955–1959 гг. – первой в Сибири высоковольтной лаборатории, оснащенной установками для получения высоких постоянных, переменных и импульсных напряжений. Во второй половине 40-х гг. в ТПИ впервые были выполнены исследования по отбойке горных пород (каменных углей и горючих сланцев) высоковольтными импульсными разрядами.

Наиболее полно материалы этих исследований приведены в кандидатской диссертации И.И. Калыцкого [7], ученика А.А. Воробьева, который сменил своего учителя на посту ректора ТПИ в 1970 г. Окончательно сформулировать сущность электроимпульсного способа разрушения твердых диэлектриков, в т. ч. горных пород, позволили работы еще двух учеников А.А. Воробьева: Г.А. Воробьева и А.Т. Чепикова, которые выявили существенное влияние на внедрение высоковольтных импульсных разрядов в твердый диэлектрик временного фактора. Г.А. Воробьев провел исследования электрического пробоя твердых диэлектриков при различных временах воздействия импульсного напряжения [8], а А.Т. Чепиков экспериментально показал влияние временного фактора на моделях буровых устройств [9]. Результатом многолетних работ А.А. Воробьева и его учеников явилось изобретение, определяющее сущность электроимпульсного способа разрушения горных пород и дату его приоритета: «Способ бурения электрическими импульсными разрядами». Это изобретение защищено авторским свидетельством № 237073 с приоритетом от 14 апреля 1959 г. [10]. Предмет этого изобретения изложен следующим образом: «Способ бурения электрическими импульсными разрядами, отличающийся тем, что для разрушения породы разряд осуществляют в буримом твердом теле под слоем жидкости, например воды, трансформаторного масла и др., со временем нарастания напряжения импульса до пробоя менее $5 \cdot 10^{-6}$ с».

Сведения об этом изобретении в открытой печати ранее не публиковались. С 2004 г. в Интернете (сайт Федерального агентства по интеллектуальной собственности) можно ознакомиться лишь с формулой изобретения, поэтому ниже приведено полное его описание: «Известен способ бурения

скважин с помощью искровых разрядов в жидкой среде. Описываемый способ отличается тем, что для разрушения породы разряд осуществляют в буримом твердом теле под слоем жидкости, например воды, трансформаторного масла и др., со временем нарастания напряжения импульса до пробоя менее $5 \cdot 10^{-6}$ с. Для осуществления этого способа при проходке скважин с использованием разрядов в породе медная токоведущая труба заканчивается плоским или коническим наконечником, на поверхности которого имеются выступы – искровые электроды. Разряды с этих электродов разрушают породу под ними. После образования углубления под каким-либо острием-выступом на конической поверхности (наконечника) углубление (в породе) заполняется маслом. При подаче следующего импульса напряжения разряд происходит в одном месте, а затем в другом. Объем выемки будет определяться свойствами грунта, формой электрода, напряжением и энергией импульса. Масло, захватывая продукты разрушения, входит во внутреннюю трубу и далее наружу. После выработки некоторого объема породы вблизи электрода вся связанная система (обсадная труба и электроды) под действием собственного веса опускается ниже. При заданной величине электрической прочности горной породы, выбирая соответствующую величину разрядного напряжения масла и скорость развития разряда, можно добиться того, что пробой будет происходить преимущественно в разрабатываемой породе, а не в обсадной трубе» [10].

Основой способа является установленная в ТПИ А.А. Воробьевым и его учениками закономерность превышения электрической прочности жидких диэлектриков над электрической прочностью твердых диэлектриков при малых временах нарастания импульса напряжения до пробоя: менее $5 \cdot 10^{-6}$ с. Это связано с тем, что с уменьшением времени экспозиции импульсного напряжения электрическая прочность жидких диэлектриков растет быстрее, чем твердых, и даже электрическая прочность воды становится выше прочности твердых диэлектриков. Вольт-секундные характеристики пробоя на фронте косогогольных импульсов напряжения в системе «острие–плоскость» для трансформаторного масла, фторопласта и технической воды представлены на рис. 1. Этот и следующий рисунки впервые приведены в кандидатской диссертации А.Т. Чепикова в 1961 г. [9]. Как видно из рис. 1, в точке «а» пробивное напряжение фторопласта-4 становится равным пробивному напряжению технической воды, а в точке «б» – трансформаторного масла. Левее этих точек электрическая прочность фторопласта-4 меньше электрической прочности жидкостей. Кроме фторопласта в качестве твердых диэлектриков были использованы образцы нескольких десятков видов горных пород, в том числе таких крепких, как кварцит, роговик, гранит, и получены аналогичные вольт-секундные характеристики, причем исследования проводились не при сквозном пробое, как показано на рис.

1, а в условиях, приближенных к процессу бурения: на одну сторону образца горной породы, погруженного в жидкую среду, устанавливались два разнополярных стержневых электрода.

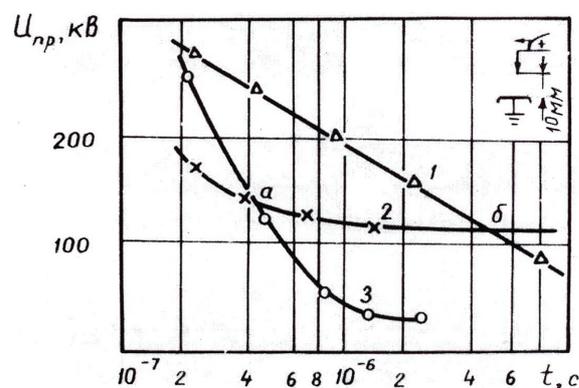


Рис. 1. Вольт-секундные характеристики: 1) трансформаторное масло; 2) фторопласт; 3) техническая вода [9]

Чтобы проследить пути развития разрядов в твердом диэлектрике при бурении скважин, на образец фторопласта-4 накладывалось токопроводящее кольцо, а в центре кольца перпендикулярно к образцу устанавливался высоковольтный стержневой электрод [9]. На приведенном на рис. 2 вертикальном разрезе образца четко видны каналы электрического пробоя фторопласта между концом высоковольтного электрода и нижним торцом заземленного кольца. При достаточной энергии импульса происходит отрыв от образца материала, расположенного над каналом пробоя. Образующаяся откольная воронка заполняется жидкостью, в которую предварительно погружен образец, и следующий разряд происходит в другом месте образца. Многоимпульсное воздействие приводит к формированию скважины. Оторванный разрядами материал (шлам) выносятся из призабойной зоны с использованием прямой или обратной схем промывки скважины.

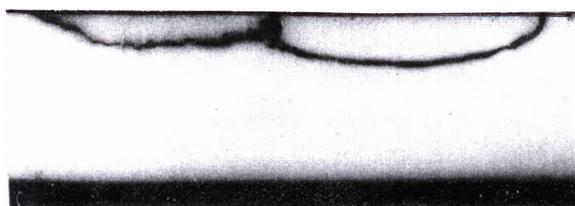


Рис. 2. Фотография каналов электрического пробоя в образце фторопласта-4 толщиной 20 мм, погруженно в трансформаторное масло. Электроды «стержень в центре кольца» расположены на одной поверхности образца с промежутком 30 мм [9]

Электроимпульсный способ разрушения твердых диэлектриков, в т. ч. горных пород, явился основой научного открытия (диплом № 107) А.А. Воробьева, Г.А. Воробьева и А.Т. Чепикова «Закономерность пробоя твердого диэлектрика на границе раздела с жидким диэлектриком при действии импульса напряжения» (приоритет открытия: 14 декабря 1961 г.) [11]. Путь к признанию открытия был

непростым. Первоначально заявка была подана в Государственный комитет Совета Министров СССР по делам изобретений и открытий в 1986 г. (№ ОТ-11384 от 2 июня 1986 г.). По ее материалам были сделаны доклады в научных организациях, в основном академических, расположенных в г. Томске, Кемерове, Москве и Ленинграде. Почти все заключения, в том числе всемирно известного ученика А.А. Воробьева академика Г.А. Месяца, были положительными. Не обошлось и без отрицательных заключений, что затормозило рассмотрение заявки. Это связано с тем, что физическая сущность открытия до сих пор не имеет однозначного объяснения. Так, у авторов открытия [12], Г.А. Месяца [13] и других ученых [14] гипотезы, объясняющие явление внедрения канала разряда в твердый диэлектрик, заметно отличаются.

Лишь в 1998 г. заявка (№ А-122 от 29 апреля 1998 г.) была передана в Российскую Академию естественных наук, а 27 июля 1999 г. Международная ассоциация авторов научных открытий зарегистрировала открытие, в первоначальном названии которого слово «свойство» было заменено словом «закономерность». Окончательная формула открытия такова: «Экспериментально установлена неизвестная ранее закономерность пробоя твердого диэлектрика на границе раздела с жидким диэлектриком при действии импульса напряжения, заключающаяся в том, что при подаче импульса напряжения с достаточно крутым фронтом на электроды с большой кривизной происходит пробой твердого диэлектрика, обусловленный образованием в приэлектродной области в жидкости объемного заряда, препятствующего развитию разряда в жидкости и одновременно способствующего развитию разряда в твердом диэлектрике.

Открытие относится к области физических явлений в диэлектриках в сильных электрических полях, а именно к их пробое. Хорошо известно, что напряженность электрического поля, при котором происходит пробой, у жидких и газообразных диэлектриков меньше, чем у твердых. Поэтому при испытании твердого диэлектрика на пробой всегда выполняются условия, чтобы напряженность поля в газе или жидкости, которые окружают этот твердый диэлектрик, была меньше, чем в твердом диэлектрике, а длина пути электрического разряда — значительно больше.

Авторы обнаружили, что в импульсных электрических полях эта ситуация может измениться на обратную, т. е. электрически более прочными оказываются жидкости, а не твердые тела. Это качественно новое явление они подвергли и количественному анализу. Оказалось, что у жидкостей (трансформаторное масло, вода) пробивное поле нарастает с уменьшением длительности импульса напряжения быстрее, чем у твердых тел. При уменьшении длительности от десятка секунд до долей микросекунды у твердого тела напряжение пробоя возрастает примерно в полтора раза, тогда как у жидкостей — в четыре–шесть раз.

Научное значение открытия состоит в том, что оно вносит коренные изменения в представления о развитии разряда на границе двух диэлектриков и позволяет более глубоко понять происходящие при этом разрядные процессы.

Практическое значение открытия заключается в том, что на его основе разработана новая электроимпульсная технология разрушения твердых тел многоцелевого назначения».

А.А. Воробьев является изобретателем не только электроимпульсного способа, но и устройств [15, 16], реализующих этот способ (оба изобретения имеют приоритет от 17 ноября 1960 г.). Более подробно остановимся на первом из них. Прежде всего, обращает на себя внимание то, что юридически это изобретение является дополнительным к изобретенному ранее способу бурения электрическими импульсными разрядами [10], т. к. в ограничительной части предмета изобретения бора указано, что изобретение создано «по авторскому свидетельству № 237073»: «Бур для проходки скважин электрическими импульсными разрядами по авторскому свидетельству № 237073, отличающийся тем, что к нижнему концу токопроводящего стержня прикреплены с возможностью перемещения в осевом направлении не изолированные от окружающей жидкости электроды, расположенные по окружности и в центре торцевой части трубы».

В открытой печати сведения по этому бурю ограничены. С 10.04.2004 г. в Интернете можно ознакомиться лишь с формулой изобретения. В Большой советской энциклопедии [17] в информации по электроимпульсному бурению ошибочно описан не этот бур, а электрогидравлический [4], не позволяющий вести проходку скважин электроимпульсным способом. В связи с этим представляет интерес привести полнее материалы по бурю, изобретенному А.А. Воробьевым и А.Т. Чепиковым [15]. На рис. 3 представлен общий вид бура, приведенный в заявочных материалах на фиг. 1 и имеющий следующее описание: «Известен бур для проходки скважин электрическими импульсными разрядами по авт. св. № 237073. Описываемый бур является развитием авторского свидетельства № 237073 и отличается от известного тем, что к нижнему концу токопроводящего стержня прикреплены с возможностью перемещения в осевом направлении не изолированные от окружающей жидкости электроды, расположенные по окружности и в центре торцевой части трубы. На фиг. 1 изображен описываемый бур, общий вид; на фиг. 2 — схема расположения электродов. Бур включает полый центральный стержень 1, на который подаются импульсы напряжения, он оканчивается пятью электродами 2, четыре из которых расположены по окружности, а пятый — по оси трубы. Заземленная труба имеет четыре выреза 3, образующие четыре заземленные электрода 4, расположенные на одинаковых расстояниях от высоковольтных электродов 2. Стержень от трубы изолируется при по-

мощи проходного изолятора из фторопласта-4, полиэтилена или других высококачественных изолирующих материалов, обладающих достаточной эластичностью. Стержень и труба изготовлены из стали. По полому стержню на забой скважины подается жидкость, служащая в качестве жидкой среды при бурении и для удаления бурового шлама».

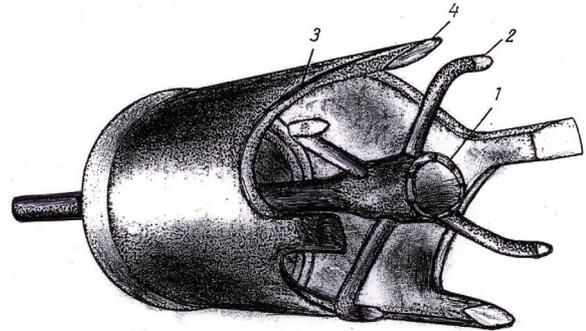


Рис. 3. Электроимпульсный бур А.А. Воробьева и А.Т. Чепикова по фиг. 1 к описанию а. с. № 282216 [15]

Удивительным является то, что, хотя данная конструкция бура была разработана много лет назад и к настоящему времени предложены десятки видов электроимпульсных буровых снарядов и наконечников, рассматриваемый бур (рис. 3) является одним из наиболее эффективных. Для сравнения конструкций на рис. 4 приведен перспективный современный буровой наконечник для электроимпульсного бурения скважин сплошного забоя [18]. Отличие последнего состоит лишь в том, что призабойные концы электродов не заострены и центральный электрод не имеет осевого отверстия. Выполнение центрального электрода полым является основой электроимпульсного колонкового бура радиально-тангенциального типа [19], конструкция которого (рис. 5) имеет много общего с первым буром [15].



Рис. 4. Буровой наконечник для проходки скважин сплошного забоя электроимпульсным способом [18]

А.А. Воробьев большое внимание уделял и разработке оборудования для получения импульсов высокого напряжения [21, 22], в т. ч. необходимого для реализации предложенного способа. Эффективность электроимпульсного бурения была многократно показана при различных условиях. Так, в Рудном Алтае на месторождении полиметаллических руд в микрокварците пробурены десятки взрывных скважин глубиной до 20 м и одна скважина глубиной 47,5 м. Общий метраж скважин, пробуренных в микрокварцитах, составил около 1000 м [20]. В г. Томске возле 11-го корпуса ТПИ (район Лагерного сада) в окварцованном песчанике электроимпульсным способом пройдена скважина в интервале от 154 до 233 м, причем интервал 195...197 м пробурен с отбором керна. На Степановском карьере г. Томска в глинистых сланцах и окварцованном песчанике несколько колонковых скважин глубиной 10...14 м пробурено с промывкой водой. С использованием в качестве промывочной жидкости дизельного топлива на этом же карьере было пробурено несколько колонковых скважин глубиной до 37,5 м и три скважины большего диаметра (более 500 мм) глубиной до 9 м; в условиях Крайнего Севера (Магаданская область – пройдено две скважины глубиной 8,8 и 14,3 м). На Кольском полуострове испытана установка для электроимпульсного бурения в подземных условиях [14]. Техничко-экономические показатели электроимпульсного бурения значительно превосходят показатели других известных способов. Электроимпульсный способ разрушения успешно испытан также при дроблении горных пород, проходке щелей, резании блоков горных пород, обработке поверхности (пассировке) блоков, разрушении некондиционных железобетонных изделий.

Нет возможности в одной статье всесторонне рассмотреть достигнутые результаты, проанализировать преимущества электроимпульсного способа, перечислить десятки ученых, работавших в рассматриваемой области, авторов диссертационных работ, в т. ч. нескольких докторских, упомянуть зарубежные разработки. Однако приведенные мате-

риалы, в первую очередь по авторскому свидетельству СССР № 237073 «Способ бурения электрическими импульсными разрядами» [10] и по авторскому свидетельству СССР № 282216 «Бур для проходки скважин электрическими импульсными разрядами» [15], достаточно обоснованно показывают, что высокоэффективный электроимпульсный способ разрушения горных пород, основанный на пробое и разрушении твердых диэлектриков электрическими разрядами, изобретен в ТПИ 14 апреля 1959 г. и главным его изобретателем является ректор института, член-корреспондент АПН СССР, профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки и техники РСФСР А.А. Воробьев.

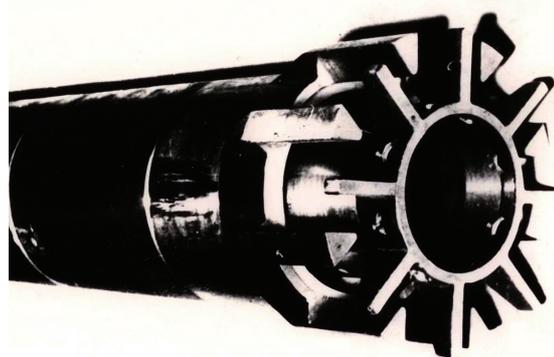


Рис. 5. Электроимпульсный колонковый бур радиально-тангенциального типа [19]

Необходимость обоснования приоритета изобретения электроимпульсного способа разрушения горных пород вызвана тем, что в последние годы во многих странах (США, ФРГ, Японии, Норвегии, Швейцарии, Великобритании и т. д.) этому способу уделяют все большее внимание. Например, в странах Западной Европы активно изучают возможности его применения при бурении геотермальных скважин (ФРГ, Швейцария) и при проходке стволов в крепких горных породах для захоронения отходов атомного производства (Швеция).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов Л.И., Беляев С.А., Бугаев С.П., Вайнштейн Р.А., Вяткин Н.А., Дульзон А.А., Заворин А.С., Литвак В.В., Похолоков Ю.П., Ушаков В.Я., Чуков Н.П. Сибирская энергетическая школа. – Томск: Изд-во НТЛ, 2001. – 232 с.
2. Сипайлов Г.А. Воспоминания о встречах с А.А. Воробьевым // Наш политехнический. – Томск: Изд-во «Красное Знамя», 1996. – С. 89–94.
3. Способ разрушения горных пород и полезных ископаемых: А.с. 195403 СССР № 1117323/03; заявл. 26.06.51; опубл. 10.04.04, Бюл. № 10. – 2 с.
4. Способ бурения шпуров и скважин и устройство для его осуществления: А.с. 100876 СССР № 9898/450089; заявл. 16.01.52; опубл. 1955, Бюл. № 6. – 2 с.: ил.
5. Юткин Л.А. Электрогидравлический эффект. – Л.: Изд-во «Машиностроение», 1986. – 254 с.
6. Воробьев А.А., Воробьев Г.А. Электрический пробой и разрушение твердых диэлектриков. – М.: Высшая школа, 1966. – 224 с.
7. Каляцкий И.И. Разрушение каменных углей и горных пород импульсными разрядами высокого напряжения: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 1953. – 254 с.
8. Воробьев Г.А. Исследование электрического пробоя твердых диэлектриков при различных временах воздействия напряжения: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 1956. – 236 с.
9. Чепиков А.Т. Исследование разрушения горных пород импульсными электрическими разрядами: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 1961. – 268 с.
10. Способ бурения электрическими импульсными разрядами: А.с. 237073 СССР № 714578/03; заявл. 14.04.59; опубл. 10.04.04, Бюл. № 10. – 2 с.
11. Воробьев А.А., Воробьев Г.А., Чепиков А.Т. Закономерности пробоя твердого диэлектрика на границе раздела с жидким ди-

- электриком при действии импульса напряжения. Приоритет открытия 14.12.1961. Диплом 107 // Научные открытия. Сборник кратких описаний. – М.; СПб.: РАЕН, 1999. – Вып. 1. – С. 36–38.
12. Воробьев Г.А., Чепиков А.Т., Важов В.Ф. Критерий внедрения канала разряда в твердый диэлектрик, помещенный в изолирующую жидкость // Известия вузов. Физика. – 1998. – Т. 41. – № 12. – С. 110–113.
 13. Месяц Г.А. О природе «эффекта Воробьевых» в физике импульсного пробоя твердых диэлектриков // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31. – Вып. 24. – С. 51–59.
 14. Семкин Б.В., Усов Ю.Ф., Курец В.И. Основы электроимпульсного разрушения материалов. – СПб.: Наука, 1995. – 276 с.
 15. Бур для проходки скважин электрическими импульсными разрядами: А.с. 282216 СССР № 708742/03; заявл. 17.11.60; опубл. 10.04.04, Бюл. № 10. – 3 с.: ил.
 16. Устройство для резания горных пород электрическими импульсными разрядами: А.с. 220909 СССР № 708741/03; заявл. 17.11.60; опубл. 10.04.04, Бюл. № 10. – 3 с.: ил.
 17. Кутузов Б.Н. Электроимпульсное бурение // Большая советская энциклопедия. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1978. – Т. 30. – С. 161–162.
 18. Advanced Drilling and Well Technology / Aadnøy B.S., Cooper I., Miska S.Z., Mitchell R.F., Payne M.L. – Richardson, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2009. – P. 785–796.
 19. Радиально-тангенциальный электроимпульсный бур: А.с. 710293 СССР № 982614/03; заявл. 22.04.67; опубл. 15.10.93, Бюл. № 37–38. – 4 с.: ил.
 20. Исследование процесса бурения горных пород и искусственных материалов электрическими импульсными разрядами // Отчет по контракту с японской фирмой Komatsu от 14.06.96: рук-ль Боев С.Г.; № ГР 02.9.70 003478. – Томск: НИИ высоких напряжений при ТПУ, 1997. – 119 с.
 21. Воробьев А.А. Электрические высокие и сверхвысокие напряжения. – М.; Л.: Государственное энергетическое издательство, 1961. – 96 с.
 22. Воробьев А.А., Воробьев Г.А., Воробьев Н.И., Калганов А.Ф., Каляцкий И.И., Месяц Г.А. и др. Высоковольтное испытательное оборудование и измерения. – М.; Л.: Государственное энергетическое издательство, 1960. – 584 с.

Поступила 05.09.2012 г.

Summaries

UDC 519.2

Karpov I.G., Gribkov A.N.
**ON THE ISSUE OF ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS
ACCURACY OF BERNOULLI'S FORMULA**

The authors have proposed the expressions for approximation of Bernoulli's formula. These expressions allow determining more precisely the probability of event A occurrence k times at large number of independent trials if the event A occurs in each of them at probability p .

Rozhkova S.V.
**OPTIMAL SIGNAL TRANSMISSION ALONG THE CONTINUOUS
AND DISCRETE CHANNELS WITH MEMORY AND DELAY**

The article considers the task of optimal transmission of stochastic processes along the continuous-discrete channels with memory and delay. The authors have proved the extremum properties of optimal coding in terms of information maximization.

UDC 519.63

Zimin V.P.
**THE RESEARCH OF FEATURES OF PLASMA BOUNDARY
CONDITIONS IN EMITTER FOR THERMIONIC DIODE**

The author has analyzed the model of the monotonous plasma boundary conditions for emitter of thermionic diode on the planes plasma density–ion current, plasma density–electron energy density and the others. The features of changing the boundary conditions curves were studied; their typical behavior was classified. The article introduces the method for estimating the typical kind of boundary conditions and their change at variation of a diode and plasma parameters.

UDC 519.872

Moiseev A.N., Nazarov A.A.
**THE RESEARCH OF HIGH-INTENSTY MAR-ARRIVAL
PROCESS**

The paper introduces the research of MAR-arrival process having high conditional intensities of event occurrence. It is shown that the number of events occurred in such arrival process for the fixed time interval is normal in asymptotics (under condition of unconstrained intensity growth). The characteristics of this distribution were obtained.

UDC 519.872

Nazarov A.A., Moiseeva E.A.
**THE RESEARCH OF RQ-SYSTEM BY MMPP|M|1 METHOD
OF ASYMPTOTIC ANALYSIS AT HEAVY LOAD**

The authors have studied the mathematical model of MMPP|M|1 system with the source of repeated calls by the method of asymptotic analysis at heavy load. The obtained distributions of probabilities of order amount in the source of the repeated calls were compared with limiting distribution obtained by numerical methods. It demonstrated the acceptability of using the proposed asymptotic method.

UDC 514.763

Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A.
**AFFINE SPACE MAPPING TO THE ZERO-PAIR VARIETY
OF THE PROJECTIVE SPACE**

The differentiable mappings of affine space to the varieties of all nondegenerate and all degenerate zero-pairs of the projective space have been studied. The bind between these mappings is considered.

UDC 517

Churikov V.A.
**EXPONENTIAL DEGENERATION IN CASE
OF NOT-INTEGRAL ORDERS IN LOCAL FRACTIONAL
ANALYSIS BASED ON d -OPERATOR**

The article introduces and considers the properties of exponents in fractional analysis of not-integral orders. It is shown that degeneration of various degrees is possible for not-integral orders in different cases when there is more than one exponent for various orders. It was obtained that the number of exponents for rational orders is finite and it is infinite for irrational ones.

UDC 517.3

Churikov V.A.
**INTEGRATION AND DIFFERENTIATION OF BINOMIAL
DECOMPOSITIONS IN LOCAL FRACTIONAL ANALYSIS**

The paper considers the integro-differentiation of binomial decompositions in local fractional analysis based on d -operator.

UDC 530.145

Breev A.I.
**METHOD OF GENERALIZED ZETA-FUNCTION FOR SCALAR
FIELD ON HOMOGENEOUS SPACES WITH INVARIANT MET-
RIC AND ZERO DEFECT**

Using the orbits method the author has found out the expression for local zeta-function of Clein–Gordon operator on static homogeneous spaces with invariant metric and zero defect. Within the method of the generalized zeta-function the vacuum means of energy momentum tensor of scalar field were calculated.

UDC 621.313: 519.688

Khokhlova T.E., Glazyrin A.S., Polishchuk V.I.
**ESTIMATION OF RL -CHAIN PARAMETERS IN ELECTRO-
MECHANICAL SYSTEMS IN OPERATING MODE BASED ON
THE COORDINATE-WISE DESCENT TECHNIQUE**

The authors have proposed the algorithm of parametric identification of RL -chains in electromechanical systems in operating mode. It is not necessary to interrupt the system regular operation due to initial condition synchronization in this algorithm. The algorithm is based on the technique of coordinate-wise descent and allows obtaining the estimates of the object model parameters so that the output signals mismatch is minimum. The algorithm operation was studied on the laboratory setup.

UDC 621.391

Karpov I.G., Zyryanov Yu.T., Gribkov A.N.
**JOHNSON'S MODIFIED DISTRIBUTIONS AND THEIR
APPLICATION FOR APPROXIMATION OF DISTRIBUTION
LAWS OF THE EXPERIMENTAL DATA**

The authors have proposed Johnson's modified distributions for approximation of distribution laws of the experimental data taking only positive values. The technique for estimating the parameters of Johnson's modified distributions by the experimental data was developed.

UDC 621.313: 519.688

Bolovin E.V., Glazyrin A.S.
**THE METHODS FOR INCREASING MATRIX CONDITIONALITY
WHEN SOLVING THE DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS IN
PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF DYNAMIC OBJECT
PARAMETERS**

The authors have developed the algorithm for identifying the dynamic object parameters at the harmonic input effects based on the

solution of the difference equations systems. The technique of time coefficient selection when generating the difference equations was proposed and tested. The main methods for improving the conditionality of the input values matrix were considered and proposed.

UDC 539.219.3:546.82

Grabovetskaya G.P., Nikitenkov N.N., Mishin I.P., Dushkin I.V., Stepanova E.N., Sypchenko V.S.
HYDROGEN DIFFUSION IN SUBMICROCRYSTALLINE TITANIUM

The authors have carried out the comparative studies of hydrogen diffusion in coarse- and submicrocrystalline titanium by the method of electrolytic cell conjugation with vacuum chamber through the membrane. It was ascertained that the formation of submicrocrystalline structure results in decrease of effective coefficient of hydrogen diffusion in titanium and increase of capacity to accumulate hydrogen in the volume. It is conditioned by large extension of grain boundary in submicrocrystalline samples in comparison with the coarse-crystalline ones. The authors have analyzed the influence of dislocation density and grain boundary extension on titanium capacity to accumulate hydrogen in the volume.

UDC 621.385.69

Grigoryev V.P., Timofeev A.A., Grigoryev A.V.
THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATION EXCITATION IN COAXIAL REFLECTIVE TRIODE WITH RADIATE BEAM

The authors study the mechanism of electromagnetic oscillations radiation in cylindrical triode with virtual cathode with radiate beam by the method of kinetic equation. Spectrum and increment of the excited oscillations were determined and the expression for radiation efficiency was obtained. The radiation efficiency on the type of the excited oscillations and system parameters was analyzed. The paper demonstrates that the lower oscillation modes are mostly excited in the coaxial triode. The most efficient excitation of electromagnetic oscillations occurs on TEM-mode.

UDC 620.17

Ismailov G.M., Pavlov M.S., Tyurin A.E.
ESTIMATION OF SHIFTING EFFORTS OF ELEMENTS IN MULTICORE CABLE AT BEND DEFORMATIONS

The paper considers the issues of assessment of elements power interaction in cable structures at bend deformations. The authors have obtained the expressions for estimating the value of shifting efforts occurring at winding in multicore cables on the basis of multicore cable representation as a compound core with absolutely rigid cross-section bonds.

UDC 530.1:519.2:681.5

Deeva V.S., Romanishina S.A., Slobodyan S.M.
STABILITY OF ENTROPY ESTIMATION OF SYSTEM VITALITY

The authors have determined the connection of reliability variation estimation for separate elements and the system itself or the device with entropy as a measure for evaluating the system state uncertainty caused by a number of random operational occurrences of their functioning at practical application. On the assumption of validity of exponential probability law of time to system failure it was determined that the range of entropy estimation values for various types of elements, nodes, devices is in a certain range of variation interval of entropy index level similar to the chaotic Hurst coefficient.

UDC 621.313:534

Deeva V.S., Slobodyan S.M.
DESTRUCTION OF SLIDING LAMELLAR CONTACT

The authors have proposed the probabilistic approach to the description of dynamics in destruction of bodies contact pair when one body is sliding over infinite periodic surface of the other. The possibility of solving the problem of accurate estimation of collectors vitality was analyzed. The Markovian model of collector wear at sliding over collector lamella was proposed.

UDC 535.36

Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B.
OPTICAL RADIATION TRANSFER IN LAYERED DISPERSION MEDIA WITH REFLECTIVE SURFACE

The article considers the radiation transfer in two-layered dispersion media with reflective surface. The analytical expressions for determining radiation balance characteristics were obtained. It was shown that the ground layer even at low optical density and its weak change affects considerably on reflectivity of the system «two-layered media-reflective surface» at all the values of reflection coefficient of underlying surface. It was ascertained that the growth ground layer optical density at absorption results in almost complete absorbance independence of the system «two-layered media-reflective surface» on reflection coefficient of the underlying surface.

UDC 539.3

Bochkareva S.A., Reutov Yu.A.
THE RESEARCH OF STRESS-STRAIN STATE OF MULTILAYER POLYMER PIPES BY THE FINITE ELEMENT METHOD

The authors have specified the relevance of estimating the stress-strain state of polymer material pipelines by the numerical techniques. Three-layer reinforced polymer pipe was calculated by the finite element method using the deformation-strength properties of the layers. The graph of distribution of equivalent stresses and movements were obtained. The article introduces the description of the developed algorithm of problem numerical implementation and comparison of program operation results with the existing analytical solutions. The computation was repeated in software ANSYS to check the results reliability. The conclusion was made on viability of the method application.

UDC 535.211

Makenova N.A., Dzhuraev R.F.
WAVEFRONT REVERSAL USING AMPLITUDE TRANSPARENCY

The paper considers the wavefront reversal using amplitude transparency (modulator). As a result of numerical investigations it is shown that almost full compensation of turbulent distortions is achieved in spite of considerable energy absorption by modulator.

UDC 534.2

Provotorov D.S., Solovyev A.V., Vinogradov Yu.A.
AMPLITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTICS OF LAND EXPLOSION INFRASOUND SIGNALS

The authors have determined the amplitude-frequency characteristics of infrasound signals generated by land explosion. The acoustic signal directions of arrival were determined by triangulation method. The signals indicate the source of explosive works. The use of wavelet transform with Morlet basic function allowed definitely identifying low-frequency land explosions acoustic signals.

UDC 621.384.6

Egorov I.S., Kaykanov M.I., Remnev G.E.
EXIT WINDOW OF HIGH-CURRENT ACCELERATOR OF ASTRA ELECTRONS

The article introduces the results of researches of injecting high current pulsed electron beam into atmosphere at repetition to 50 pulse/sec. with electron energy 300...350 keV, current to 0,6 kA, pulse duration of beam current 120 nsec. The authors have determined the energy of injected electron beam for constructions of exit window with and without supporting grid. Thermal operating conditions for the mentioned exit window constructions were analyzed.

UDC 533.9.01

Lutsenko Yu.Yu., Zelenetskaya E.P., Vlasov V.A.
SKIN EFFECT INFLUENCE ON ELECTRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF HIGH-FREQUENCY TORCH DISCHARGE

The paper considers the solution of electrodynamic problem for high-frequency torch discharge at pronounced skin effect considering radial inhomogeneity of its channel. The authors have detected the shift

of magnetic field maximum in discharge plasma along radial coordinate at skin effect strengthening. The wave number of electromagnetic wave propagating along the torch discharge channel was calculated. It was shown that the ratio of attenuation coefficient to phase coefficient of electromagnetic wave increases at skin effect strengthening.

UDC 621.51

Filipas A.A., Osinenko V.V., Kladiev S.N., Fomin A.A.
ESTIMATION OF ELECTRIC DRIVE LOAD CHARACTERISTICS
IN ANGLE COMPRESSOR

The authors have proposed the algorithm of estimating parameters and characteristics of angle reciprocating compressor as a specific load of controlled electric drive on the basis of kinematic scheme analysis. The obtained load characteristics are used for refined selection of controlled electric drive power.

UDC 669.337

Karimova L.M., Kayralapov E.T.,
Zhumashev K.Zh., Tokbulatov T.E.
MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE RESULTS OF
STUDYING DRYING OF GRANULATED ROUGH COPPER-
MOLYBDENUM CONCENTRATE OF «TASTAU» DEPOSIT

The article introduces the results of the research of drying being a part of the technology which includes the granulation of rough copper-molybdenum concentrate of «Tastau» deposit. The authors have obtained the mathematical models describing dehydration laws and changes of material properties at thermal treatment. The controlled parameters were the relative mass loss at drying, at subsequent additional granule drying, the degree of their dehydration. It was ascertained that the characteristics of phase composition affect the results of their subsequent treatment. The specific character of the material determines also the selection of firing and leaching combination using which it became possible to achieve a certain goal – the most complete extraction of copper and molybdenum.

UDC 621.791.92

Gnyusov S.F., Durakov V.G.
STRUCTURIZATION OF COMPOSITION COATINGS «STEEL
R6M5 – (WC+TiC)» DEPENDING ON TUNGSTEN CARBIDE
CONTENT IN ORIGINAL BATCH

The authors have studied the features of forming structural and phase composition of composition coatings «steel R6M5 – (WC+TiC)» depending on tungsten monocarbide content. It was ascertained that retained austenite amount in composition coating depends on tungsten carbide content in the total volume of input strengthening phase. The coatings with 20 % of carbide constituent have austenite maximum (75 %) of the total matrix volume.

UDC 621.793.794.357.7

Durakov V.G., Gnyusov S.F., Dekhonova S.Z.
NICKEL EFFECT ON MICROSTRUCTURE AND PROPERTIES
OF COPPER–CHROMIUM CONTACT MATERIAL OBTAINED
BY ELECTRON BEAM FACING

The authors have studied the effect of alloying with nickel on microstructure Cu–Cr of the contact material obtained at vacuum electron beam facing and additional refining. Nickel input into original Cu–Cr batch enhances the formation of homogenous copper chromium melt, decreases segregation and restrains chromium dendrites growth at crystallization.

UDC 621.791.92

Gnyusov S.F., Makov D.A.
THE STRUCTURE OF CARBIDE SUBSYSTEM OF COMPOSITION
COATINGS ON THE BASIS OF AUSTENITIC STEELS

The authors have studied the effect of temperature cycling at multipass electron beam facing and further aging on features of vanadium carbide particles extraction in matrix on the basis of steel of nickel and manganiferous austenite. It was ascertained that vanadium

carbide in composition coatings is represented in the form of separate equiaxed particles. Their average size equal 94 nm in manganiferous matrix and about 0,8 μm in nickel one.

UDC 669.295:539.62

Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V.,
Tabachenko A.N., Shulepin I.A.
PLASTIC WAVES IN TITANIUM NICKELIDE AT SPHERICAL
INDENTER SLIDING

The authors have analyzed the conditions for generating frontal plastic waves and forming friction tracks at spherical indenter sliding over plastic half-space of titanium nickelide. The pulse step character of indenter movement and the changes of friction track type at various temperature-speed conditions were determined.

UDC 669.295:539.62

Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Galsanov S.V.
THE INVESTIGATION OF TITANIUM NICKELID PROPERTIES
INITIATED BY HIGH HYDROSTATIC PRESSURE

The article demonstrates the conditions for occurrence of pressure hydrostatic kernel at spherical indenter introduction into plastic media. The effect of hydrostatics on structural and phase states and strength properties of titanium nickelide was determined.

UDC 539.21:539.42.214

Soldatova M.I., Khodorenko V.N., Gyunter V.E.
PHYSICAL-MECHANICAL AND STRENGTH PROPERTIES
OF ALLOYS ON THE BASIS OF TITANIUM NICKELIDE
(TN-10, TN-20, TN-1V)

Physical-mechanical properties of alloys on the basis of titanium nickelide TN-10, TN-20, TN-1V were studied. It was ascertained that failure strain size and the failure stress value of each alloy are determined by matrix state for the alloy at fixed deformation point and by contribution of martensitic deformation mechanisms occurring at load. It was shown that the structure formed and the value of plastic constituent of alloy deformation affect considerably on fracture type and characteristics.

UDC 541.64:547.759.32

Sarychev K.Yu., Myasnikova V.I., Voloshina M.S.,
Kononov S.V., Gromov V.E.
IMPLEMENTATION OF REHBINDER EFFECT IN
ALUMINUM-GALLIUM SYSTEM ACCORDING TO BINARY
SCHEME

The authors have developed the technique for implementing Rehbinder effect in aluminum-gallium system according to binary scheme. Aluminum brittle fracture has two stages: chemical interaction resulting in gallium occurrence on aluminum sample surface, classical liquid-metal brittleness development in aluminum-gallium system.

UDC 539.21:534.22

Belomestnykh V.N., Tesleva E.P.
ANOMALOUS THERMO-STRAIN BEHAVIOR OF CUBIC
PHASE OF CYANIC CRYSTALS. I. SODIUM CYANIDE

The authors have studied temperature dependences of anisotropic and isotropic acoustic (elastic waves velocities), sizing (elastic modules) and dimensionless (Poisson's ratios) elastic characteristics of mono- and polycrystals of sodium cyanide in the range of 283,7...473,0 K.

UDC 681.5.01

Kasimova B.R., Baubek A.A., Kusataeva A.K.
THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRIC
PRECIPITATOR WITH ROTATING COLLECTING ELECTRODE

The authors have developed the theoretical mathematical model of operation of electric precipitator with rotating collecting electrode.

The collecting electrode in the form of rotating strip was proposed to be applied to eliminate negative factors such as resistivity and re-entrainment affecting the electric precipitator operation; economic velocity for rotating strip was calculated.

UDC 621.892.1

Kovalsky B.I., Malysheva N.N., Tarasov E.V., Dyakov S.A.
THE RESULTS OF THE TEST OF SEMI-SYNTHETIC ENGINE OIL BIZOL DIZEL ULTRA 10W-40 CJ-4/SL

The article introduces the results of the test of all-season and all-purpose engine oil for thermal-oxidative stability and antiwear properties; the authors have proposed the criteria of antiwear properties and total energy absorbed by oil at thermal and tribotechnical tests.

UDC 621.892.28

Vereshchagin V.I., Kovalsky B.I., Runda M.M.
THE RESULTS OF INVESTIGATION OF MOTOR OIL STATE AT ENGINE OPERATING

The article introduces the data on the change of optical properties, viscosity, concentration of soluble and insoluble aging products and antiwear properties of synthetic motor oil Mobil 1 0W-40 SN/CF at engine operating.

UDC 544.733.422:519.87

Kudryashova O.B., Antonnikova A.A.
MATHEMATICAL MODEL OF AEROSOL EVOLUTION AT ULTRASONIC INFLUENCE

The mathematical model is based on Smoluchowski equation. The latter describes the dynamics of changing the size distribution function of aerosol particles considering ultrasonic influence, evaporation (for liquid-drop aerosols) and sedimentation. The authors have studied the asymptotic behavior of probability function of aerosol particle collision on ultrasonic frequency.

UDC 669:539.67

Kurilenko G.A.
EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THERMAL SOURCE INTENSITY IN DAMAGE CENTER AT CYCLIC LOADS

It is shown that it is possible to determine the capacity of thermal source which seems to function in the center of developing the fatigue damage by thermal field of a sample at its step cyclic loading with the increasing peak stress. According to the kinetics of this capacity it turned out to be possible to predict in non-destructive way some characteristics of the fatigue process, the individual endurance limit of the tested object in particular.

UDC 621.45.042:532.592.2:544.772

Korovina N.V., Kudryashova O.B., Vorozhtsov B.I., Shrager E.R.
LIQUID ATOMIZATION AT PULSE INFLUENCE BY COMPRESSED AIR

The authors propose the physico-mathematical model of pulse atomizer operating on the compressed gas source. The cavitation role in atomization is shown. The article introduces a number of results of the model parametric study determining the dependences of aerosol dispersion, spray angle and mass liquid flow on dimensionless parameters characterizing the atomizer geometric properties. The physico-mathematical model allows selecting the atomizer characteristics for obtaining aerosol media with the prescribed parameters.

UDC 674.815-41

Plotnikov S.M., Lurye M.S.
MODELING THE TRANSLATIONAL-ROTATIONAL MOTION OF WOOD PARTICLES AT ORIENTATION

The article introduces the results of modeling the orientation of flat wood particles used for making plates of large size ship. The authors have obtained the dependences of fall time and particle turning rate on their parameters and height of fall which allow minimizing particle packing angle in chip mat.

UDC 66.021.1

Balyasnikov A.V., Zaripova L.F., Pishchulin V.P., Svarovsky A.Ya.
MODELING MIXING PROCESS BY THE JET METHOD OF LIQUID RADIOACTIVE WASTE IN RECTANGLE RESERVOIRS

The process of mixing liquid radioactive wastes (LRW) in rectangle reservoirs at vertical position of nozzles has been considered. The process modeling was carried out based on the similarity theory. The authors determined the constructive characteristics of mixing devices, solution velocity characteristics when flowing from mixing devices, the conditions of particles weighing in weak-salt LRW for defining the mixing time by the jet method.

UDC 621.039.576

Vorobyev A.V., Antonova A.M.
IMPROVEMENT OF EFFICIENCY OF THE DEVICE WITH WATER-GRAPHITE REACTOR AT PARTIAL LOADS

The authors have proposed and substantiated the method of operation of water-graphite reactor of RBMK type at controlled composition of blow-down gas. The article introduces the static and dynamic characteristics of temperature state for graphite moderator in the reactor RBMK-1000 determined experimentally. The authors developed the software code for engineering analysis of integral characteristics determining the reactivity margin value of the reactor RBMK-1000 in slow transitions.

UDC 534:621.32

Sosnin E.A., Panarin V.A., Pikulev A.A., Tarasenko V.F.
ACOUSTIC CHARACTERISTICS OF PLANAR KrCl-EXCILAMP OF DIELECTRIC BARRIER DISCHARGE

The authors have investigated experimentally and theoretically the acoustic characteristics of planar KrCl-excilamp of dielectric barrier discharge filled with a mix Kr:Cl₂=400:1 at pressure 20 kPa. The acoustic oscillation spectra of excilamp bulb were measured. Resonances were found out experimentally on frequencies of 4,96; 5,36; 9,92; 10,80 and 21,60 kHz. Frequencies of natural oscillations of excilamp bulb walls and acoustic waves in gas were determined by calculations. Energy of gas acoustic waves in dependence on oscillation frequency of bulb walls was defined. The comparison of the experimental results and the calculations shown that maximums of the acoustic signal in the frequency domain >10 kHz coincide with natural frequencies of gas oscillations in excilamp bulb.

UDC 622.243.1

Adam A.M.
RECTOR OF TPI A.A. VOROBYEV IS THE INVENTOR OF ELECTROPULSE METHOD OF ROCKS DESTRUCTION

The article introduces the history of developing the electropulse method of rocks destruction by the rector of TPI A.A. Vorob'yov.

Сведения об авторах

- Адам Альберт Мартьянович**, 1940 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. лаборатории 11 Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 41-84-99. E-mail: muratov@hvd.tpu.ru. Область научных интересов: электроразрядные технологии в горном деле, обработка воды высоковольтными разрядами, патентоведение.
- Аль-Хассани Мудхар Аббас**, 1973 г.р., аспирант кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: mudhar73@yahoo.com. Область научных интересов: дифференциальная геометрия погруженных многообразий.
- Антонникова Александра Александровна**, 1988 г.р., мл. науч. сотр. Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск. Р.т. 8-(385-4)-30-18-69. E-mail: antonnikova.a@mail.ru. Область научных интересов: ультразвуковое воздействие на аэрозольные среды, кинетика аэрозолей, физико-математическое моделирование.
- Антонова Александра Михайловна**, 1952 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры атомных и тепловых электростанций Энергетического института ТПУ. Р.т. 42-08-37. E-mail: anton@tpu.ru. Область научных интересов: моделирование процессов в парогенерирующем оборудовании атомных электростанций.
- Балясников Александр Валерьевич**, 1980 г.р., аспирант кафедры машин и аппаратов химических и атомных производств технологического факультета Северского технологического института НИЯУ «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-55-47-90. E-mail: familybav@mail.ru. Область научных интересов: технология урана, переработка отходов химических предприятий, включая жидкие радиоактивные отходы.
- Баубек Аскар Апошевич**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Автомобильный транспорт» Евразийского Национального Университета им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан. E-mail: baubek.as@mail.ru. Область научных интересов: очистка воздуха от промышленных газов, вихревые камеры сгорания, разработка источников питания двигателя внутреннего сгорания на крекинг-газе.
- Беломестных Владимир Николаевич**, 1939 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры естественно-научного образования Юргинского технологического института (филиала) ТПУ. Р.т. 8-(384-51)-6-44-32. E-mail: bvnilat@yandex.ru. Область научных интересов: физическая и физико-химическая акустика кристаллов.
- Боловин Евгений Владимирович**, 1991 г.р., магистрант кафедры «Электропривод и электрооборудование» Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-32-55. E-mail: djon-garator@mail.ru. Область научных интересов: динамическая идентификация параметров электрических приводов.
- Бочкарева Светлана Алексеевна**, 1970 г.р., канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. E-mail: svetlanab7@yandex.ru. Область научных интересов: компьютерное проектирование полимерных композиционных систем; методы математического моделирования, оценивания и управления механическими свойствами полимерных композиционных материалов; прочность конструкций из полимерных композиционных материалов.
- Бреев Александр Игоревич**, 1985 г.р., ассистент кафедры высшей математики и математической физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-89-13. E-mail: bre-ev@tpu.ru. Область научных интересов: метод орбит, методы точного интегрирования дифференциальных уравнений, квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени.
- Верещагин Валерий Иванович**, 1964 г.р., аспирант кафедры топливного обеспечения и горюче-смазочных материалов Института нефти и газа ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-249-76-67. E-mail: labsm@mail.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.
- Виноградов Юрий Анатольевич**, 1966 г.р., канд. техн. наук, зам. директора по научной работе Кольского филиала Геофизической службы РАН. Р.т. 8-(815)-557-94-94. E-mail: vin@krsc.ru. Область научных интересов: сейсмология, инфразвук, геодинамика, землетрясения, взрыв, метеориты.
- Власов Виктор Алексеевич**, 1958 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, и.о. ректора Томского государственного архитектурно-строительного университета, зав. кафедрой технической физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-39-14. E-mail: vik@tpu.ru. Область научных интересов: масс-спектрокопия, термодинамика, физика и химия плазмы.
- Волошина Марина Сергеевна**, 1967 г.р., канд. пед. наук, доцент кафедры высшей математики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-46-19-00. E-mail: myasnikova.v.i@gmail.com. Область научных интересов: физика разрушения под действием агрессивных сред.
- Воробьев Александр Владимирович**, 1949 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры атомных и тепловых электростанций Энергетического института ТПУ. Р.т. 42-08-37. E-mail: worob@tpu.ru. Область научных интересов: исследование процессов в парогенерирующем оборудовании атомных электростанций (ядерных реакторов, парогенераторов).
- Ворожцов Борис Иванович**, 1929 г.р., д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск. Р.т. 8-(385-4)-30-18-69. E-mail: olgak@yourline.ru. Область научных интересов: неразрушающий контроль, ультразвук, методы генерации аэрозольных сред, кинетика аэрозолей, оптические измерения дисперсных сред.
- Галсанов Солбон Владимирович**, 1988 г.р., аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Р.т. 53-35-77. E-mail: s_galsanov@sibmail.com. Область научных интересов: изучение триботехнических свойств никелида титана.
- Глазырин Александр Савельевич**, 1978 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Электропривод и электрооборудование» Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-32-55. E-mail: asglazyrin@tpu.ru. Область научных интересов:

- методы и алгоритмы динамической идентификации и управления состоянием электрических приводов.
- Гнусов Сергей Федорович**, 1960 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ. Р.т. 41-95-41. E-mail: gnusov@rambler.ru. Область научных интересов: использование фазового превращения и эффекта сверхпластичности при формировании композиционных материалов, износостойких покрытий и сварке биметаллического инструмента.
- Горячев Борис Валентинович**, 1947 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-32-14. E-mail: bvg@tpru.ru. Область научных интересов: перенос излучения, атмосферная оптика.
- Грбавецкая Галина Петровна**, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-49. E-mail: grabg@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: диффузия и диффузионно-контролируемые процессы в нано- и поликристаллических металлических материалах.
- Грибков Алексей Николаевич**, 1981 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» Тамбовского государственного технического университета. Р.т. 8-(475-2)-63-94-17. E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru. Область научных интересов: методы и алгоритмы анализа и синтеза оптимального помехоустойчивого управления, информационно-управляющие системы многомерными объектами, интеллектуальные и экспертные системы.
- Григорьев Александр Владимирович**, 1972 г.р., аспирант кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. E-mail: gav@am.tpu.ru. Область научных интересов: физика плазмы и пучков заряженных частиц.
- Григорьев Владимир Петрович**, 1941 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: grig@am.tpu.ru. Область научных интересов: физика плазмы и пучков заряженных частиц, моделирование динамических процессов в физике и экологии.
- Громов Виктор Евгеньевич**, 1947 г.р., профессор, д. физ.-мат. н., заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Правительства в области науки, заведующий кафедрой физики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-78-43-66. E-mail: gromov@physics.sibsiu.ru. Область научных интересов: физическое материаловедение, физика прочности и пластичности материалов в условиях внешних энергетических воздействий.
- Гонтер Виктор Эдуардович**, 1947 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры физики металлов физического факультета Томского государственного университета, директор НИИ медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института при Томском государственном университете. Р.т. 41-34-57. E-mail: nii_mm@sibmail.com. Область научных интересов: сплавы и конструкции с памятью формы в медицине, физика твердого тела, изучение свойств сплавов на основе никелида титана.
- Деева Вера Степановна**, 1983 г.р., аспирант кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-32-67. E-mail: sms_46@ngs.ru; sms1@tpru.ru. Область научных интересов: анализ и синтез вероятностных процессов и систем.
- Дехонова Светлана Зиновьевна**, 1963 г.р., инженер кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ. Р.т. 41-95-41. E-mail: dana0863@mail.ru. Область научных интересов: электронно-лучевая наплавка и сварка.
- Джураев Рустам Факритдинович**, 1992 г.р., студент кафедры электроэнергетических систем Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-34-33. E-mail: mna.05@mail.ru. Область научных интересов: адаптивная оптика, атмосферная оптика.
- Дураков Василий Григорьевич**, 1963 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. лаборатории физической мезомеханики Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-13. E-mail: electron@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: электронно-лучевая наплавка и сварка.
- Душкин Игорь Валерьевич**, 1973 г.р., докторант ТПУ, ООО «НаноСканТехнология», г. Долгопрудный Московской обл. E-mail: igor@nanoscantech.ru. Область научных интересов: разработка новых спектроскопических методов.
- Дьяков Сергей Александрович**, 1986 г.р., соискатель кафедры «Топливообеспечение и горючесмазочные материалы» Института нефти и газа ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»; коммерческий директор ООО «Магнат-РД», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-206-29-31. E-mail: labsm@mail.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.
- Егоров Иван Сергеевич**, 1985 г.р., инженер-исследователь лаборатории № 1 Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 41-91-01. E-mail: egoris@tpru.ru. Область научных интересов: импульсные ускорители электронов, генерация электронных пучков с высокой частотой следования, разработка импульсных электронных ускорителей, применение импульсных электронных пучков.
- Жумашев Калкаман**, 1948 г.р., д-р техн. наук, зав. лабораторией физико-химии комплексного использования конденсированных отходов Химико-металлургического института, директор ТОО «Инновация», г. Караганда, Республика Казахстан. Р.т. 8-(721-2)-43-19-73. E-mail: innovaciya-zh@mail.ru. Область научных интересов: цветная металлургия.
- Зарипова Людмила Федоровна**, канд. техн. наук, доцент кафедры машин и аппаратов химических и атомных производств технологического факультета Северского технологического института НИЯУ «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-78-01-51. E-mail: mila_zf@sibmail.com. Область научных интересов: электротехнологические процессы, технология получения фтороводорода, переработка отходов химических предприятий.
- Зеленецкая Екатерина Петровна**, ассистент кафедры электроники и автоматики физических установок Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-91-45. E-mail: kica- ket@mail.ru. Область научных интересов: численное моделирование физических процессов, электродинамика высокочастотных разрядов.
- Зимин Вячеслав Прокопьевич**, 1955 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доцент кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-61-00. E-mail: zim@tpru.ru. Область научных интересов: моделирование процессов в низкотемпературной плазме, информационные технологии, применение нейросетевой технологии и вычислительного эксперимента при решении практических задач.

- Зырянов Юрий Трифонович**, 1960 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» Тамбовского государственного технического университета. Р.т. 8-(475-2)-63-94-17. E-mail: zut-tmb@mail.ru. Область научных интересов: управление состоянием организационно-технических систем при ограниченных ресурсах.
- Исмаилов Гафуржан Маматкулович**, 1964 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной механики факультета технологии и предпринимательства Томского государственного педагогического университета. Р.т. 57-43-25. E-mail: gmismailov@gambler.ru. Область научных интересов: механика кабелей, трибология, динамика, прочность машин, механизмов и аппаратуры.
- Кайканов Марат Исламбекович**, 1987 г.р., инженер-исследователь лаборатории № 1 Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 41-91-01. E-mail: kaikanov_m@mail.ru. Область научных интересов: импульсные ускорители электронов, применение импульсных электронных пучков, радиационная химия, радиационный крекинг нефти.
- Кайралапов Ерлан Токпаевич**, 1973 г.р., ст. науч. сотр. лаборатории физико-химии комплексного использования конденсированных отходов Химико-металлургического института, ТОО «Инновация», г. Караганда, Республика Казахстан. Р.т. 8-(721-2)-43-31-61. E-mail: hmi@mail.krg.kz. Область научных интересов: цветная металлургия.
- Каримова Люция Монировна**, 1979 г.р., канд. хим. наук, ведущ. науч. сотр. лаборатории физико-химии комплексного использования конденсированных отходов Химико-металлургического института, ТОО «Инновация», г. Караганда, Республика Казахстан. Р.т. 8-(721-2)-43-31-61. E-mail: lutsia.08@mail.ru. Область научных интересов: цветная металлургия.
- Карпов Иван Георгиевич**, 1949 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Тамбовского государственного технического университета. Р.т. 8-(475-2)-63-13-58. E-mail: zera-tul68@mail.ru. Область научных интересов: разработка вероятностных моделей негауссовских случайных величин и процессов, а также методов их идентификации.
- Касимова Ботагоз Рахметоллаевна**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Системный анализ и управление» Физико-технического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан. E-mail: kasimova_br@enu.kz. Область научных интересов: математическое моделирование технологических процессов, теоретические основы электротехники, оптимальное использование ресурсов в строительной индустрии, разработка электронных учебных пособий на базе программных продуктов National Instruments.
- Кладиев Сергей Николаевич**, 1960 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры электропривода и электрооборудования Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-37-59. E-mail: kladiev@tptu.ru. Область научных интересов: автоматизация технологических процессов, автоматизированный электропривод переменного тока общепромышленных механизмов.
- Ковальский Болеслав Иванович**, 1943 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры «Топливообеспечение и горючесмазочные материалы» Института нефти и газа ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-206-29-31. E-mail: labism@mail.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.
- Коновалов Сергей Валерьевич**, 1976 г.р., доцент, к.т.н., доцент кафедры физики Сибирского государственного промышленного университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-78-43-66. E-mail: konovalov@physics.sibsiu.ru. Область научных интересов: физика конденсированного состояния, физика прочности и пластичности материалов в условиях внешних энергетических воздействий.
- Коровина Наталья Владимировна**, 1988 г.р., мл. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск. Р.т. 8-(385-4)-30-18-69. E-mail: korovina.nata@mail.ru. Область научных интересов: методы генерации аэрозольных сред, кинетика аэрозолей, физико-математическое моделирование.
- Кудряшова Ольга Борисовна**, 1962 г.р., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск. Р.т. 8-(385-4)-30-18-69. E-mail: olgakudr@inbox.ru. Область научных интересов: физико-математическое моделирование, теория горения и взрыва, кинетика аэрозолей, оптические измерения дисперсных сред.
- Куриленко Георгий Алексеевич**, 1939 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Новосибирского государственного технического университета. Р.т. 8-(383)-346-17-77. E-mail: teormech@ngs.ru. Область научных интересов: исследование повреждаемости металлов термографическим способом.
- Кусатаева Алия Кибатуллоевна**, магистрант кафедры «Системный анализ и управление» Физико-технического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан. E-mail: zhubatcan@gmail.com. Область научных интересов: математическое моделирование технологических процессов.
- Лурье Михаил Семенович**, 1951 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры электротехники Сибирского государственного технологического университета, г. Красноярск. Р.т. 8-(391-2)-27-57-67. E-mail: m_o_l@rambler.ru. Область научных интересов: расходомерия, моделирование гидро- и аэродинамических процессов.
- Луценко Юрий Юрьевич**, 1962 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры технической физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 70-17-77(*1), доб. 2278. E-mail: luts@mail.ru. Область научных интересов: электродинамика высокочастотных разрядов, физика и химия плазмы.
- Макенова Наиля Алтынхановна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-34-33. E-mail: mna.05@mail.ru. Область научных интересов: адаптивная оптика, коррекция атмосферных искажений лазерного излучения, нелинейная оптика.
- Маков Дмитрий Анатольевич**, 1983 г.р., главный сварщик ООО «Сибирский механический завод», г. Северск. Р.т. 8-(382-3)-54-11-91. E-mail: makov@mail.ru. Область научных интересов: использование фазового превращения при формировании износостойких покрытий.
- Мальшева Наталья Николаевна**, 1983 г.р., канд. техн. наук, ст. преподаватель кафедры «Топливообеспечение и горючесмазочные материалы» Института нефти и газа ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-206-28-75. E-mail: nataly.nm@mail.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.

- Мишин Иван Петрович**, 1980 г.р., мл. науч. сотр. Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-03. E-mail: grabd@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: получение и свойства ультрамелкозернистых материалов.
- Могильницкий Сергей Борисович**, 1951 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-38-35. E-mail: msb@tpu.ru. Область научных интересов: перенос излучения, атмосферная оптика.
- Моисеев Александр Николаевич**, 1971 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. Р.т. 52-94-96. E-mail: alexander-moiseev@mail.ru. Область научных интересов: системы массового обслуживания, имитационное моделирование, программная инженерия.
- Моисеева Екатерина Александровна**, 1992 г.р., магистрант Факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: moiskate@mail.ru. Область научных интересов: исследование систем массового обслуживания с источником повторных вызовов.
- Молдованова Евгения Александровна**, преподаватель кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: eam@tpu.ru. Область научных интересов: локальная дифференциальная геометрия.
- Мясникова Вероника Ивановна**, 1992 г.р., студентка Архитектурно-строительного института Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-78-43-67. E-mail: myasnikova.v.i@gmail.com. Область научных интересов: физика разрушения под действием агрессивных сред.
- Назаров Анатолий Андреевич**, 1947 г.р., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Р.т. 52-95-99. E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru. Область научных интересов: математическое моделирование, прикладной вероятностный анализ систем массового обслуживания.
- Никитенков Николай Николаевич**, 1953 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-34-40. E-mail: nikitentkov@tpu.ru. Область научных интересов: взаимодействие излучений и ускоренных частиц с твердым телом, спектроскопические методы исследования.
- Осиненко Виталий Владимирович**, 1988 г.р., студент кафедры «Электроника и автоматика физических установок» факультета технологий и автоматизации атомной промышленности Северского технологического института Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-56-39-29. E-mail: roytek@mail.ru. Область научных интересов: электропривод переменного тока, компрессорные установки.
- Павлов Михаил Сергеевич**, 1984 г.р., ассистент кафедры теоретической и прикладной механики Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 56-45-88. E-mail: mspravlov@tpu.ru. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела.
- Панарин Виктор Александрович**, 1962 г.р., инженер лаборатории оптических излучений Института сильноточной электроники СО РАН, г. Томск. Р.т. 49-14-43. E-mail: panarin@ya.ru. Область научных интересов: эксилампы барьерного разряда, схемотехника.
- Пикулев Алексей Александрович**, 1970 г.р., нач. отдела Института ядерной и радиационной физики «ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской области. Р.т. 8-(313-0)-2-81-72. E-mail: a.a.pikulev@gmail.com. Область научных интересов: физика лазеров, источники спонтанного излучения, термо- и газодинамика плазмы, ядерная физика.
- Пищулин Владимир Петрович**, 1943 г.р., канд. техн. наук, профессор кафедры машин и аппаратов химических и атомных производств технологического факультета Северского технологического института НИЯУ «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-78-01-52. E-mail: pischulin@ssti.ru. Область научных интересов: электротехнология, технология получения фтороводорода, урана, переработка отходов химических предприятий, включая жидкие радиоактивные отходы.
- Плотников Сергей Михайлович**, 1951 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры электротехники Сибирского государственного технологического университета, г. Красноярск. Р.т. 8-(391-2)-27-57-67. E-mail: smplotnikov@rambler.ru. Область научных интересов: автоматизация деревообрабатывающих производств, древесные композиционные материалы.
- Полищук Владимир Иосифович**, 1966 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры электроэнергетических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-37-63. E-mail: polischukvi@tpu.ru. Область научных интересов: развитие теории построения релейной защиты и диагностики синхронных машин.
- Потекаев Александр Иванович**, 1951 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова при Томском государственном университете. Р.т. 41-46-53. E-mail: potekaev@spti.tsu.ru. Область научных интересов: трибология, слабоустойчивые структуры, межфазовые превращения.
- Провоторов Денис Сергеевич**, 1987 г.р., мл. науч. сотр. кафедры космической физики и экологии радиофизического факультета Томского государственного университета. Р.т. 41-39-76. E-mail: provotorov@sibmail.com. Область научных интересов: распространение инфразвуковых волн, источники инфразвуковых волн, связь инфразвукового фона с метеорологическими величинами.
- Ремнев Геннадий Ефимович**, 1948 г.р., д-р техн. наук, профессор, заведующий лабораторией № 1 Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 41-91-58. E-mail: remnev@hvd.tpu.ru. Область научных интересов: пучково-плазменные технологии, модификация материалов мощными ионными пучками (МИП), импульсная плазмохимия, радиационная химия.
- Реутов Юрий Анатольевич**, 1989 г.р., магистрант кафедры транспорта и хранения нефти и газа Института природных ресурсов ТПУ. E-mail: reutov@tpu.ru. Область научных интересов: прочность и надежность конструкций из полимерных композиционных материалов.
- Рожкова Светлана Владимировна**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: rozhkova@tpu.ru. Область научных интересов: фильтрация, интерполяция, экстраполяция, распознавание стохастических процессов, передача стохастических сигналов по непрерывно-дискретным каналам с памятью; обнаружение аномальных помех; математическая теория финансового анализа.

- Романишина Светлана Анатольевна**, 1970 г.р., ассистент кафедры механизации и автоматизации Житомирского национального агроэкологического университета. Р.т. 8-(412)-22-38-44. E-mail: sms_46@ngs.ru. Область научных интересов: анализ и синтез вероятностных процессов и систем.
- Рунда Михаил Михайлович**, 1951 г.р., соискатель кафедры топливного обеспечения и горюче-смазочных материалов Института нефти и газа ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-249-76-67. E-mail: labsm@mail.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.
- Сарычев Константин Юрьевич**, 1944 г.р., канд. хим. наук, доцент кафедры высшей математики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-46-19-00. E-mail: myasnikova.v.i@gmail.com. Область научных интересов: физика разрушения под действием агрессивных сред.
- Сваровский Александр Яковлевич**, 1938 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры машин и аппаратов химических и атомных производств Северского технологического института НИЯУ «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-78-01-52. E-mail: pischulin@ssti.ru. Область научных интересов: процессы и аппараты технологий ядерно-топливного цикла, обезвреживание радиоактивных отходов и защита окружающей среды, включая жидкие радиоактивные отходы.
- Слободян Степан Михайлович**, 1946 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-32-67. E-mail: sms_46@ngs.ru. Область научных интересов: стохастическая динамика физических процессов и систем.
- Солдатова Мария Ивановна**, аспирант кафедры физики металлов физического факультета Томского государственного университета. Р.т. 41-31-99. E-mail: nii_mm@sibma.ru. Область научных интересов: физика твердого тела, изучение свойств сплавов на основе никелида титана.
- Соловьев Андрей Вениаминович**, 1974 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры космической физики и экологии радиофизического факультета Томского государственного университета. Р.т. 41-39-76. E-mail: andrio@mail.tsu.ru. Область научных интересов: распространение инфразвуковых волн, инфразвуковые шумы, влияние инфразвука на организм человека.
- Соснин Эдуард Анатольевич**, 1971 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры управления инновациями Томского государственного университета, ст. науч. сотр. Института сильноточной электроники СО РАН. Р.т. 49-16-85. E-mail: badik@loi.hcei.tsc.ru. Область научных интересов: создание и применение источников ультрафиолетового излучения, управление научными исследованиями, феномен творчества.
- Степанова Екатерина Николаевна**, канд. техн. наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-38-45. E-mail: enstepanova@tpu.ru. Область научных интересов: влияние легирования водородом на структурно-фазовое состояние и деформационное поведение металлов.
- Сыпченко Владимир Сергеевич**, 1988 г.р., аспирант кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-34-40. E-mail: syrchenkov@mail.ru. Область научных интересов: физика твердого тела, водород в металлах, взаимодействие излучений и ускоренных частиц с твердым телом.
- Табаченко Анатолий Никитович**, 1946 г.р., канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. металлографии Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова при Томском государственном университете. Р.т. 53-13-02. E-mail: tabachenko@spti.tsu.ru. Область научных интересов: трибология, сплавы титана.
- Тарасенко Виктор Федотович**, 1946 г.р., д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией оптических излучений Института сильноточной электроники СО РАН, г. Томск. Р.т. 49-16-85. E-mail: vft@loi.hcei.tsc.ru. Область научных интересов: физика лазеров, спектроскопия, физика низкотемпературной плазмы.
- Тарасов Евгений Валерьевич**, 1986 г.р., соискатель кафедры «Топливообеспечение и горючесмазочные материалы» Института нефти и газа ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»; начальник отдела реализации масел и автохимии ООО «Магнат-РД», г. Красноярск. Р.т. 8-(391)-250-62-13. E-mail: tarasov@magnat-rd.ru. Область научных интересов: трение и износ, термоокисление и температурная стойкость смазочных материалов, процессы самоорганизации.
- Теслева Елена Павловна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры естественно-научного образования Юргинского технологического института (филиала) ТПУ. Р.т. 8-(384-51)-6-44-32. E-mail: tesleva@mail.ru. Область научных интересов: исследование акустических и упругих свойств неорганических диэлектриков со смешанной химической связью, изучение особенностей полиморфных превращений типа «ориентационный порядок-беспорядок», акустическая диагностика ангармонизма в кристаллах.
- Тимофеев Андрей Анатольевич**, 1990 г.р., магистрант кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. E-mail: andreymoff@mail.ru. Область научных интересов: физика плазмы и пучков заряженных частиц.
- Токбулатов Талгат Есенгалиевич**, 1961 г.р., исполнительный директор ТОО «КазГидроМедь», г. Караганда, Республика Казахстан. Р.т. 8-(721-2)-40-24-29. E-mail: tokbulatov61@mail.ru. Область научных интересов: цветная металлургия.
- Тюрин Андрей Евгеньевич**, 1987 г.р., аспирант кафедры механики факультета точной механики и технологий Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Р.т. 8-(951)-679-34-93. E-mail: a.e.tyurin@gmail.com. Область научных интересов: приборы и методы измерения механических величин, трибология.
- Филипас Александр Александрович**, 1964 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Электроника и автоматика физических установок» факультета технологий и автоматизации атомной промышленности Северского технологического института Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Р.т. 8-(382-3)-78-01-94. E-mail: alf@ssti.ru. Область научных интересов: автоматизация технологических процессов, автоматизированный электропривод переменного тока общепромышленных механизмов.
- Фомин Александр Алексеевич**, 1993 г.р., студент Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-37-59. E-mail: can4es@qwertynet.ru. Область научных интересов: энергоэффективность электрооборудования промышленных установок.

Ходоренко Валентина Николаевна, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., зав. лабораторией фазовых превращений НИИ медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института при Томском государственном университете. Р.т. 41-31-99. E-mail: hodog_val@mail.ru. Область научных интересов: физика твердого тела, изучение свойств сплавов на основе никелида титана.

Хохлов Виктор Александрович, 1945 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Р.т. 53-12-67. E-mail: khokhlov@sibmail.com. Область научных интересов: изучение триботехнических свойств никелида титана.

Хохлова Татьяна Евгеньевна, 1973 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-34-33. E-mail: hoxlova@tpu.ru. Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование электрических устройств и систем.

Чуриков Виктор Анатольевич, 1960 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 55-37-29. E-mail: vachurikov@list.ru. Область научных интересов: дробный анализ, математические модели в психологии, рентгеновская и нейтронная оптика, гамма-лазеры, квантовая теория поля.

Шрагер Эрнст Рафаилович, 1940 г.р., д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, г. Бийск. Р.т. 8-(382-2)-41-06-21. E-mail: sher@ftf.tsu.ru. Область научных интересов: физико-математическое моделирование, теория горения и взрыва, кинетика аэрозолей, тепломассообмен и газодинамика в двигателях и химических реакторах.

Шулепов Иван Анисимович, 1954 г.р., канд. физ. мат. наук, ст. науч. сотр. лаборатории 22 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 42-39-63. E-mail: shulepov@tpu.ru. Область научных интересов: исследование свойств поверхности твердых тел.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Принимаются статьи, подготовленные в MS Word-2003 (файл и распечатка). Статья должна быть подписана авторами и иметь сопроводительное письмо на бланке организации.

Объем статьи до 8 стр., включая рисунки и таблицы, размещенные в тексте по упоминанию. Размер бумаги А4, поля по 25 мм. Текст в 1 интервал **без переносов, лишних пробелов и абзацных интервалов**, шрифт Times New Roman, 12 пунктов. Файлы рисунков (в градациях серого) в jpg, tif, cdr или иных форматах редакторов Photoshop, Corel Draw с разрешением 300 dpi прилагаются к статье. Рисунки и таблицы: **Рис. 1. Название; Таблица. Название.** Кавычки вида «...». Интервалы – 1,2...1,8 мм или 5–7 шт. Формулы – в MathType, настройка по умолчанию. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылка в тексте.

Курсивом – буквы латинского алфавита, кроме входящих в имена собственные, обозначения стандартных математических функций и химических элементов ($U_{пр.}$, Φ_i , но Al_2O_3 , $\cos\alpha_i$, \max , \lg , «BASF»). Векторы – полужирным курсивом. Список литературы – по ГОСТ Р 7.0.5-2008 (см. пример). Литература – по упоминанию: [1, 2], [2. С. 245], [3–7].

УДК 621.37 (Пример оформления статьи)

АНАЛИЗ РАБОТЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ

И.И. Иванов, П.П. Петров*

Томский политехнический университет

*ОАО «Центр», г. Москва

E-mail: ivanov@tpu.ru

Показана возможность расчета ... Установлено, что ... Сделан вывод о том, что ... (Аннотация, 10 кегль).

Ключевые слова (ниже ключевые слова на английском языке):

Усилительный каскад, регулировка тока.

В [1, 2] показано, что усилительный каскад с автоматической регулировкой потребляемого тока (АРПТ) позволяет получить ...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. Название книги. – М.: Издательство, 2013. – 123 с.
2. Название книги / под ред. И.О. Фамилия. – М.: Издательство, 2013. – 123 с.
3. Фамилия И.О. Название статьи // Журнал. – 2013. – Т. 316. – № 1. – С. 71–77.
4. Фамилия И.О. Название диссертации: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 19 с.
5. Название изобретения: пат. 2000000 Рос. Федерация. № 2009129009/10; заявл. 27.07.13; опубл. 10.10.13, Бюл. № 4. – 3 с.
6. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование конференции: Труды VII Междунар. научно-практ. конф. молодых ученых. – Томск, 2013. – Т. 1. – С. 226–228.
7. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование ресурса. 2013. URL: <http://www.tpu.ru/html/izvestia.htm> (дата обращения: 25.09.2013).

Поступила 25.01.2013 г.

Сведения об авторах:

Иванов Иван Иванович, 1975 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. кафедры автоматики и компьютерных систем Института кибернетики ТПУ. Р.т. 22-22-22. E-mail: ivanov@tpu.ru. Область научных интересов: анализ...

Редактирование и корректура *А.С. Глазырин*
Компьютерная верстка *О.Ю. Аршинова*
Перевод на англ. язык *С.В. Жаркова*

Подписано к печати 13.03.2013. Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 24,19. Уч.-изд. л. 21,88.
Заказ 223-13. Тираж 500 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

