УДК 519.175.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АТРИБУТНЫМИ МАТРИЦАМИ

В.К. Погребной

Томский политехнический университет
E-mail: vkp@tpu.ru

Предложен алгоритм решения задачи определения изоморфизма графов, вершинам и ребрам которых приписаны атрибуты, представляющие графовую модель объекта. В основу алгоритма положен метод интеграции структурных различий, модифицированный для работы с атрибутными матрицами графов. Для установления изоморфизма устойчивых групп разработано правило назначения абстрактных описателей при свободной и зависимой дифференциации вершин в этих группах. Работа алгоритма показана на примере определения изоморфизма двух графов общего вида.

Ключевые слова:
Изоморфизм графов, атрибутная матрица, структурные различия, устойчивая группа, дифференциация вершин, абстрактный описатель.

Key words:
Graph isomorphism, attribute matrix, structural differences, stable group, peak differentiation, abstract descriptor.

Введение

Метод свободной и зависимой интеграции структурных различий (метод ISD), предложенный в работе [1], позволяет дифференцировать вершины обыкновенного графа, учитывая особенности их расположения относительно всех других вершин графа. В результате интеграции каждая вершина графа получает кодовое значение интегрального описателя. Как частный случай в [1] отмечается ситуация, когда в результате зависимой интеграции достигается полная дифференциация вершин и множества интегральных описателей у сравниваемых графов совпадают. Соблюдение этих условий свидетельствует о том, что сравниваемые графы являются изоморфными.

Неполная дифференциация вершин графов соответствует наличию в них устойчивых однородных групп [1] и даже при совпадающих интегральных описателях вопрос об изоморфизме графов остается открытым. В этом случае для определения изоморфизма графов необходимы дополнительные исследования устойчивых однородных групп и разработка правил дифференциации их вершин. Решению этих задач посвящена данная статья. Применение и развитие метода ISD осуществляется для определения изоморфизма графов общего вида [2] с учетом использования произвольной совокупности структурных различий. Заметим, что предварительный анализ эффективности применения метода ISD для определения изоморфизма графов ставит под сомнение отнесение этой задачи к классу неполиномиальной сложности.

Структурные различия в графах

Вершины и ребра графа, отражающего структурные свойства некоторого объекта, часто сопровождаются указанием определенных свойств (атрибутов). Для ребер атрибутами могут быть, например: тип коммуникации, ориентация, пропускная способность, вероятность или интенсивность перехода между вершинами. Примерами атрибутов для вершин являются: вместимость, степень, число петель, типы входов и выходов. Среди атрибутов интерес представляют только те из них, которые приводят к дифференциации вершин графа. Так, если степени у всех вершин совпадают, то такой атрибут не вносит структурные различия в граф, т. е. относительно данного атрибута все вершины оказываются неразличимы.

Совокупность атрибутов, вводимых для исходной дифференциации вершин, зависит от вида графовой модели и делится на две группы – назначаемые атрибуты и вычисляемые. Первые из них отражают заданные свойства объекта. Например, ребра графа, отражающие наличие коммуникаций между узлами сети, могут сопровождаться указанием трех свойств – тип канала связи, степень помехозащищенности, пропускная способность. Каждому свойству ставится в соответствие атрибут и назначается определенный набор его кодовых значений. Вторую группу составляют вычисляемые атрибуты. Примером самого простого и легко вычисляемого атрибута является степень вершины. Представителем наиболее сложно вычисляемого атрибута может служить принадлежность вершины к наибольшему внутренне устойчивому множеству. Менее сложно вычисляется принадлежность вершины к множеству центральных [2].

Структурные различия, порождаемые назначаемыми атрибутами, будем именовать внешними, а получаемые на основе вычислений – внутренними. Особый интерес представляют структурные различия, отражающие расхождения в структуре отношений между вершинами графа. Такие структурные различия, являясь по своей природе внутренними, не поддаются вычислению и названы базовыми или скрытыми. Задача обнаружения этих различий по сложности оказалась сопоставима с исходной задачей определения изоморфизма графов. Можно сказать, что базовые различия недоступны для обнаружения, т. е. скрыты от нас. Поэтому они и названы скрытыми.

Проблема здесь связана с тем, что для их обнаружения необходимо выполнить анализ отношений инциденторов каждой вершины, которые в свою очередь учитывают иерархию отношений с инциденторами всех других вершин. Выполнение данного анализа составляет основное содержание метода ISD. Однако метод работает только при наличии некоторой исходной дифференциации вершин, полученной за счет внешних и (или) внутренних различий. В этом случае скрытые структурные различия «проявляются» относительно исходной дифференциации и в отличие от базовых (скрытых) различий именуются относительными.

Для учета атрибутов при описании графа $G=(E,S,F)$ с множеством вершин $E=\{e_i\}$, $i=1,2,...,n$, множеством ребер $S=\{s_{ij}\}$, функцией F, устанавливающей инцидентность ребер s_{ij} вершинам e_i, каждому ребру и вершине ставятся в соответствие значения атрибутов, сопровождающих построение графовой модели. В множестве атрибутов $A=\{A_v\}$ каждый атрибут v-го вида A_v представлен совокупностью символьных или числовых значений $\{a_q^v\}$. Значения атрибутов a_q^v, приписываемые конкретному ребру или вершине, перечисляются в принятой последовательности видов $v=1,2,...$ и указываются в скобках через запятую, например, (a_3^1,a_1^4). Запись (a_3^1,a_1^4) означает, что используется 3-е значение 1-го атрибута и 1-е значения 4-го атрибута, а атрибуты A_2, A_3 в формировании записи не участвуют.

Граф G с назначенными атрибутами можно представить в виде атрибутной матрицы связности вершин $R=\|r_{ij}\|$. Элемент матрицы r_{ij} включает записи атрибутов всех рёбер $s_{ij}\in S$, связывающих вершины e_i и e_j, а элемент r_{ii} – записи атрибутов вершины e_i. При записи элемента r_{ij} будем руководствоваться следующими правилами:

- если вершины e_i и e_j связаны несколькими рёбрами, то записи атрибутов рёбер в элементе r_{ij} перечисляются через запятую в любой последовательности, например, (a_3^1,a_1^4), (a_1^1,a_1^4), (a_2^1,a_3^4);
- если элемент r_{ij} содержит p рёбер с одинаковыми атрибутами, то такие рёбра могут объединяться в одну запись с указанием перед скобкой величины p, например, $p(a_3^1,a_1^4)$.

На рис. 1 представлен пример графа общего вида G и его атрибутная матрица R. Для построения матрицы R использован один вид атрибута $A_1=(a,b,c,d)$. Значения атрибута A_1 приписываются рёбрам s_{ij} следующим образом:

a – если s_{ij} дуга из вершины e_i в вершину e_j;
b – если s_{ij} дуга из вершины e_j в вершину e_i;
c – если s_{ij} звено, связывающее вершины e_j и e_i;
d – если s_{ii} петля при вершине e_i.

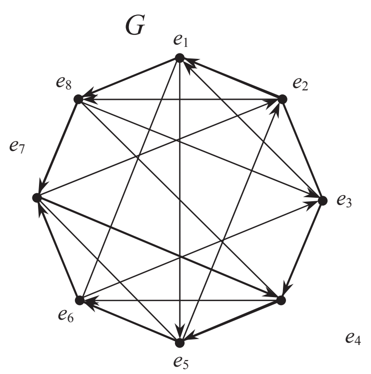
Учитывая, что в примере использован атрибут одного вида, а элемент r_{ij} включает не более одного ребра, скобки в записях атрибутов рёбер опущены.

Атрибут A_1, описывающий типы ребер графа G, в данном примере не порождает внешние структурные различия, т. е. не приводит к дифференциации вершин. Внутренние структурные различия на основе степеней вершин, подсчитанные по всем типам ребер, в графе G также не удается выделить. Таким образом, относительно этих атрибутов, граф G, приведенный на рис. 1, оказывается однородным. Это означает, что для дифференциации вершин в данном случае могут привлекаться только скрытые структурные различия.

Метод обнаружения и интеграции относительных структурных различий

Ранее отмечалось, что скрытые структурные различия могут быть обнаружены как относительные в условиях, когда имеется некоторая исходная дифференциация вершин, относительно которых с помощью метода ISD улавливаются структурные различия и происходит дифференциация вершин. В примере графа G на рис. 1 исходная дифференциация вершин отсутствует и, соответственно, все значения вектора исходной дифференциации D^0 приняты равными 1. Поэтому для применения метода ISD введем искусственную дифференциацию вершин путем присвоения одной из них, например e_1, абстрактного описателя (кодового числа) $d_{1*}^0=d_1^0+1=2$.

Введение в вектор D^0 абстрактного описателя d_{1*}^0 выделяет вершину e_1 среди всех других вершин графа, аналогично тому, как если бы при вершине e_1 была, например, одна петля и тогда, согласно атрибуту A_1, элемент $r_{ii}=d$, что также привело бы к выделению вершины e_1 в векторе D^0. Из этого следует, что вектор $D^0=(2,1,...,1)$, полученный с учётом на-



R

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		b	b		a	c		a
2	a		c		b		b	a
3	a	c		a		b		b
4			b		a	a	b	c
5	b	a		b		a	c	
6	c		a	b	b		a	
7		a		a	c	b		b
8	b	b	a	c			a	

D^0	D_{1*}^0	Z^0	D^1	Z^1	D^2
1	2		2		2
1	1	$2b, c, a, a, b$	1	$2b, c, 4a, 3a, 4b$	1
1	1	$2b, c, b, a, a$	1	$2b, c, 3b, 5a, 4a$	3
1	1	a, b, b, a, c	3	$a, 4b, 5b, 3a, 4c$	4
1	1	$2a, b, a, b, c$	4	$2a, b, 3a, 5b, 3c$	6
1	1	$2c, b, a, a, b$	5		5
1	1	b, b, c, a, a	3	$b, 3b, 4c, 5a, 4a$	7
1	1	$2a, a, b, c, b$	4	$2a, 2a, b, 3c, 3b$	8

Рис. 1. *Граф общего вида G, его атрибутная матрица R и результат свободной дифференциации вершин*

личия петли при вершине e_1, и вектор $D_{1*}^0=(2,1,...,1)$, полученный в результате введения абстрактного описателя d_{1*}^0, оказываются неразличимыми и одинаково воспринимаются методом ISD.

При этом следует помнить, что в случае использования вектора D_{1*}^0 результат дифференциации получен относительно произвольно выбранной вершины. Поэтому при определении изоморфизма двух однородных графов G и H для вершины e_1 в графе G необходимо найти вершину e_j в графе H с совпадающими результатами свободной и зависимой дифференциации. В частности, если графы G и H неизоморфны, то, чтобы убедиться в этом, потребуется в графе H выполнять зависимую дифференциацию относительно всех вершин e_j.

Дифференциация вершин достигается с помощью пошагового выполнения метода интеграции структурных различий, настроенного на работу с атрибутной матрицей. На очередном k-м шаге метод ISD для каждой вектор-строки R_i атрибутной матрицы R и вектора D^k выполняет операцию композиции векторов. Данную операцию обозначим символом $\circ$ и в результате её выполнения над векторами D^k и R_i получим вектор $\vec{Z}_i^k$, т. е. $D^k\circ R_i=\vec{Z}_i^k$, $D^k=\{d_i^k\}$, $R_i=\{r_{ij}\}$, $\vec{Z}_i^k=\{z_{ij}^k\}$, $i, j=1,2,...,n$. Элементы z_{ij}^k вектора $\vec{Z}_i^k$ определяются согласно логическому выражению:

$$\forall j[r_{ij} \neq \varnothing] => (z_{ij}^k = d_i^k(r_{ij})),\ \text{иначе}\ \ (z_{ij}^k = \varnothing).$$

Запись $d_i^k(r_{ij})$ здесь означает, что в результате выполнения операции $\circ$ элемент r_{ij} необходимо указать в скобках и слева приписать элемент d_i^k. Например, запись $d_4^2((a_3^1,a_1^4),2(a_1^1,a_1^4),(a_2^1,a_3^4))$ соответствует композиции описателя d_4^2 вершины e_4 и элемента r_{4j}, включающего значения атрибутов A_1 и A_4 для 4-х рёбер, связывающих вершины e_4 и e_j. Заметим, что включать описатель d_i^k в совокупность атрибутов рёбер элемента r_{ij} нельзя, т. к. значение некоторого атрибута может совпасть с кодовым числом описателя, что нарушит дифференциацию вершин.

Вектор $\vec{Z}_i^k$, полученный в результате выполнения операции композиции, преобразуется в множество $Z_i^k=\{z_{ij}^k\neq\varnothing\}$. Элементы z_{ij}^k в множестве Z_i^k могут располагаться в любой последовательности. При выполнении шага интеграции множества Z_i^k оформляются только для вершин e_i, у которых кодовые числа d_i^k не являются уникальными интегральными описателями. Множества Z_i^k составляют совокупность $Z^k=\{Z_i^k\}$, которая используется для присвоения кодовых чисел d_i^{k+1}.

На рис. 1 справа от матрицы R приведена совокупность Z^0 множеств Z_i^0, полученных в результате выполнения операции композиции вектор-столбцов матрицы R и вектора D_{1*}^0. При этом скобки в записях $d_i^0(r_{ij})$ опущены, т. к. атрибуты рёбер в данном примере не являются числовыми, а кратность рёбер отсутствует. Например, полная запись множества Z_5^0 должна иметь вид: $2(a)$, $1(b)$, $1(a)$, $1(b)$, $1(c)$. Замена векторов-строк R_i на вектор-столбцы $R_{j=i}$ является допустимой и используется в примере на рис. 1 для наглядности выполнения операции композиции.

Рассмотрим правила, по которым множествам $Z_i^k\in Z^k$ назначаются кодовые числа d_i^{k+1} при свободной дифференциации вершин. Кодовые числа d_i^{k+1} выбираются из множества чисел $I=(1,2,...,n)$. Множество выбранных (назначенных) кодовых чисел d_i^{k+1} на k-м шаге интеграции обозначим I^{k+1}. Множество уникальных интегральных описателей d_i^k, содержащихся в векторе D^k, обозначим I_*^k, $I_*^k\subseteq I^k$. Если $I_*^k=I$, то будем считать, что имела место полная дифференциация вершин, если $I_*^k\subset I$, то частичная.

Назначение кодовых чисел d_i^{k+1} множествам Z_i^k производится следующим образом:

1. Если $d_i^k\in I_*^k$, то $d_i^{k+1}=d_i^k$ и d^{k+1} включается в I^{k+1};
2. Если $(I^{k+1}\setminus I_*^{k+1})=\varnothing$, то одному из множеств $Z_i^k\in Z^k$ назначается $d_i^{k+1}=\min\ (I\setminus I_*^{k+1})$. Выбранное множество Z_i^k исключается из Z^k и включается в $\tilde{Z}^k$.
3. Если $(I^{k+1}\setminus I_*^{k+1})\neq\varnothing$ и $Z^k\neq\varnothing$, то множество $Z_j^k\in\tilde{Z}^k$, $j\neq i$ сравнивается с каждым из множеств $Z_i^k\in\tilde{Z}^k$. При совпадении с одним из $Z_j^k\in\tilde{Z}^k$ множеству Z_j^k назначается $d_j^{k+1}=d_i^{k+1}$, в противном случае множеству Z_j^k ставится в соответствие $d_j^{k+1}=\min\ (I\setminus I^{k+1})$.
4. Множество I^{k+1} анализируется на наличие уникальных интегральных описателей, которые включаются в множество I_*^{k+1}.

Следующий шаг интеграции по пунктам 1–4 выполняется, если $I^{k+1}\neq I^k$ и $I^{k+1}\neq I$.

Для примера на рис. 1 после первого шага интеграции получилось $I^1\neq I^0$ и $I^1\neq I$, $I_*^1=(d_1^1=2,\ d_6^1=5)$. После выполнения второго шага получено множество $I^2=I_*^2=I$, т. е. имеет место полная дифференциация вершин. Относительные структурные различия можно обнаружить на каждом шаге интеграции, сравнивая, например, множества $Z_2^1=(2(b),1(c),4(a),3(a),4(b))$ и $Z_3^1=(2(b),1(c),3(b),5(a),4(a))$, которые на первом шаге были равны, $d_2^1=d_3^1=1$, а на втором шаге оказались разными с $d_2^2=1$ и $d_3^2=3$.

В изложенном методе интеграции реализован алгоритм свободной дифференциации вершин, когда кодовое число d_i^{k+1} для очередного множества Z_i^k, несовпадающего с предыдущими множествами, выбирается как минимальное число среди незанятых (свободных) чисел множества $I\setminus I^{k+1}$. При решении задачи определения изоморфизма графов G и H наряду со свободной дифференциацией вершин графа G используется зависимая дифференциация вершин графа H. Алгоритм зависимой дифференциации отличается тем, что назначение d_j^{k+1} множеству Z_j^k в графе H полностью определяется в зависимости от кодового числа d_i^{k+1}, назначенного множеству Z_i^k в графе G, совпадающему с множеством Z_j^k. При наличии в графе G множества $Z_i^k=Z_j^k$ множеству Z_j^k назначается кодовое число d_i^{k+1}. Если для множества Z_j^k из графа H в графе G не находится множество $Z_i^k=Z_j^k$, то очевидно, что графы G и H неизоморфны.

Алгоритм определения изоморфизма графов, представленных атрибутными матрицами

Задача определения изоморфизма графов G и H легко решается, если в графе G в результате свободной интеграции относительно исходного вектора D^0 достигается полная дифференциация вершин. В этом случае, при условии, что множества кодовых чисел в векторах $D^0(G)$ и $D^0(H)$ для графов G и H совпадают, достаточно выполнить в графе H зависимую интеграцию, убеждаясь на каждом k-м шаге, что множество $I^{k+1}(G)= I^{k+1}(H)$. Если на каком-либо шаге интеграции данные множества не совпадут, то графы G и H неизоморфны. Соответствие между вершинами изоморфных графов устанавливается по расположению одинаковых элементов в векторах $D^{k+1}(G)=\{d_i^{k+1}\}$ и $D^{k+1}(H)=\{d_j^{k+1}\}$.

В последующем основные исследования по разработке алгоритма определения изоморфизма будут сосредоточены на принятии решений в условиях, когда не удаётся достигнуть полной дифференциации вершин. Частичная дифференциация указывает на наличие в векторе D^k элементов с равными значениями d_i^k. Совокупность вершин с равными значениями d_i^k назовём однородной группой и обозначим $I^k(d_i^k)$. Однородные группы, полученные при условии $I^k=I^{k+1}$, назовём устойчивыми. Вершины в устойчивой группе $I^k(d_i^k)$ структурно неразличимы относительно исходной дифференциации вершин, определяемой вектором D^0.

Исходя из этого определения, однородный граф, приведённый на рис. 1, можно отнести к устойчивой группе, т. к. выполнение шага интеграции относительно вектора D^0 не приводит к дифференциации вершин, т. е. $I^0 = I^1$. Вместе с тем, ранее отмечалось, что метод ISD работает при наличии некоторой исходной дифференциации. Вектор D^0 в нашем примере состоит из одинаковых элементов d_i^0 и поэтому не может быть принят в качестве вектора исходной дифференциации. Следовательно, однородный граф нельзя рассматривать в качестве устойчивой группы, т. к. относительная структурная неразличимость для вершин графа не была установлена. Это подтверждается результатами первого и второго шага интеграции, приведёнными на рис. 1, которые выполнены относительно исходной дифференциации, представленной вектором D_{1*}^k.

Наличие исходной дифференциации вовсе не означает, что последующие шаги интеграции приведут к дополнительной дифференциации вершин. Но устойчивые группы в данном случае будут содержать вершины, которые относительно исходной дифференциации структурно неразличимы.

Существование устойчивых групп обусловлено рядом жёстких требований, которые могут быть использованы при разработке способов дифференциации вершин в этих группах. Знание условий существования устойчивых групп и их свойств важно при исследовании проблемы оценки сходства структур графов, которая в данной статье не рассматривается. Что касается алгоритма определения изоморфизма графов, то здесь можно ограничиться применением основного правила дифференциации вершин устойчивой группы, связанного с введением абстрактного описателя, аналогично тому, как это сделано для дифференциации вершин однородного графа на рис. 1.

Рассмотрим применение данного правила в составе алгоритма определения изоморфизма графов G и H. Пусть на k-м шаге свободной интеграции в графе G получена одна или несколько устойчивых групп. Для продолжения дифференциации в любой из групп $I^k(d^k)$ выбирается одна из вершин $e_i \in I^k(d_i^k)$, у которой описатель d_i^k заменяется на абстрактный описатель $d_{i*}^k=\min(I\backslash I^k)$. Вектор D^k заменяется на вектор D_{1*}^k, и относительно него выполняются шаги интеграции. Если при этом полная дифференциация не достигается, то введение абстрактного описателя в одну из устойчивых групп повторяется до тех пор, пока не произойдёт полная дифференциация.

На рис. 2, *а*, показан возможный сценарий свободной дифференциации вершин устойчивой группы A. В группе A графа G символом * помечена вершина, которой назначен абстрактный описатель. После выполнения шагов свободной интеграции, как следует из рис. 2, *а*, полная дифференциация вершин группы не произошла. В итоге получены 2 устойчивые группы B и C. Связь между группами указывает на источник, порождающий группу, и соответствует выполнению последовательности шагов интеграции, приводящих к её получению. Введение абстрактного описателя в группу B не привело к дифференциации вершин, т. к. сохранилась группа D. Обе группы D и C содержат по 2 вершины, поэтому для их дифференциации достаточно ввести в группы по одному абстрактному описателю и выполнить шаг интеграции.

Возможный сценарий зависимой дифференциации вершин устойчивой группы A' графа H приведён на рис. 2, *б*. Данный сценарий отражает работу алгоритма определения изоморфизма при условии, что в графах G и H оказались устойчивые группы A и A' с равными описателями. Последовательность введения абстрактных описателей и выполнение шагов интеграции при дифференциации вершин группы A' на рис. 2, *б*, показана исходя из предположения, что группы A и A' изоморфны. После введения в группу A' абстрактного описателя получаются группы B' и C' аналогичные группам B и C. Попытки дифференциации вершин в группе B' по аналогии с группой B к успеху не привели. На рис. 2, *б*, это отмечено назначением абстрактного описателя для каждой вершины группы B' и стрелками со знаком $\neq$, что указывает на появление несовпадающих множеств Z_i^k при зависимой интеграции.

Попытки установить изоморфизм относительно второй, третьей и четвёртой вершины группы A' также оказались несостоятельными, что отмечено стрелками со знаком $\neq$, а относительно пятой вершины изоморфизм подтвердился. Заметим также,

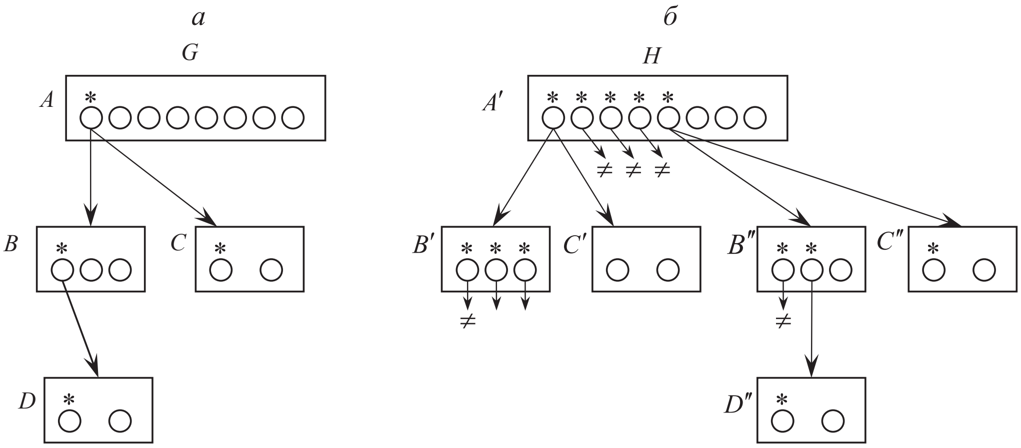
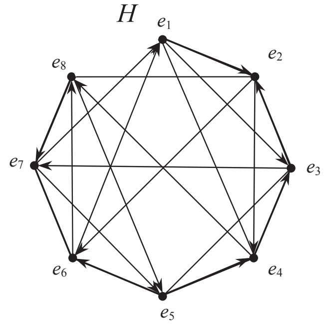


Рис. 2. *Сценарии свободной и зависимой дифференциации вершин устойчивых групп*



R

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		*a*	*a*	*c*		*b*	*b*	
2	*b*		*b*	*a*		*a*		*c*
3	*b*	*a*		*b*	*c*		*a*	
4	*c*	*b*	*a*		*b*			*a*
5			*c*	*a*		*a*	*b*	*b*
6	*a*	*b*			*b*		*c*	*a*
7	*a*		*b*		*a*	*c*		*b*
8		*c*		*b*	*a*	*b*	*a*	

D^0	D^0_{3*}	Z^0	D^1	Z^1	D^2
1	1	$b, 2b, c, a, a$	1	$4b, 2b, c, 3a, 4a$	1
1	1	$a, 2a, b, b, c$	4	$a, 2a, b, 3b, 3c$	8
1	2		2		2
1	1	$c, a, 2b, a, b$	1	$c, 4a, 2b, 5a, 3b$	3
1	1	$2c, b, b, a, a$	5		5
1	1	b, a, a, c, b	3	$b, 4a, 5a, 4c, 3b$	7
1	1	$b, 2a, b, c, a$	4	$b, 2a, 5b, 3c, 3a$	6
1	1	c, a, b, a, b	3	$4c, a, 5b, 3a, 4b$	4

Рис. 3. *Зависимая дифференциация вершин однородного графа H относительно графа G, рис. 1*

что в группе B'' подтверждение изоморфизма получено относительно второй вершины этой группы.

Подобрать реальный пример устойчивой группы с приведённой на рис. 2 иерархией и вложенностью групп чрезвычайно трудно. Такая конфигурация вложенности групп подобрана для более наглядной иллюстрации работы алгоритма свободной и зависимой дифференциации вершин устойчивой группы. В целом можно предположить, что условия существования внутри устойчивой группы других устойчивых групп являются более жёсткими, чем в графах.

Например, при свободной дифференциации вершин однородного графа *G* (рис. 1) после введения абстрактного описателя достигнута полная дифференциация вершин.

Аналогично зависимая относительно графа *G* дифференциация вершин однородного графа *H*, приведённая на рис. 3, не выявила устойчивых групп. Графы *G* и *H* имеют равные D^0 и, как показывают результаты работы алгоритма (рис. 1 и 3), являются изоморфными. Алгоритм показал, что изоморфизм устанавливается после назначения абстрактного описателя вершине e_3 в графе *H*. Две первые попытки назначения абстрактных описателей вершинам e_1 и e_2 (на рис. 3 не показаны) не привели к установлению изоморфизма. В этих попытках устойчивые группы также отсутствовали.

Заключение

Метод ISD, выполняющий шаги свободной и зависимой интеграции структурных различий, преобразован в статье для работы с атрибутной матрицей, описывающей графовую модель. При разработке алгоритма решения задачи определения изоморфизма основное внимание было уделено дифференциации вершин в устойчивых группах. Предложено правило назначения абстрактных описателей вершинам устойчивых групп при свободной и зависимой дифференциации. Правило разработано исходя из предположения, что сокращение числа шагов интеграции, которое возможно при учёте свойств устойчивых групп, существенно не повысит эффективность работы алгоритма, т. к. объём вычислений при определении свойств может оказаться значительным. Поэтому перспективным для развития алгоритма представляется учёт легко определяемых свойств устойчивых групп.

Работа выполнена в рамках госзадания «Наука».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погребной В.К. Метод интеграции структурных различий в графовых моделях и его применение для описания структур // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 5. – С. 10–16.
2. Зыков А.А. Основы теории графов. – М: Изд-во КомКнига, 2004. – 644 с.

Поступила 27.09.2012 г.