

УДК 550.831.01

РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ТЕЛ. АЛГОРИТМЫ

В.И. Старостенко, Ю.В. Пятаков*

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, г. Киев
*Воронежский государственный университет инженерных технологий
E-mail: pyatakovjv@mail.ru

Рассмотрены математические постановки, и приведены алгоритмы решения прямых задач гравиметрии для сферического многогранника и сферической треугольной призмы с произвольно расположенными верхним и нижним основаниями. Плотность многогранника меняется в радиальном направлении по линейному закону. Плотность призмы меняется вдоль параллелей и меридианов пропорционально длинам дуг на верхнем и нижнем основаниях и линейно вдоль любого радиуса, принимая заданные значения в вершинах.

Ключевые слова:

Прямая задача гравиметрии, сферический многогранник, сферическая треугольная призма.

Key words:

Direct gravity problem, spherical polyhedron, spherical triangular prism.

Введение

При выполнении расчетов, которые проводятся с целью построения по наблюдаемому гравитационному полю плотностных моделей земной коры и верхней мантии, обычно принимается, что поверхность Земли плоская, а вектор силы тяжести направлен вниз и не меняет своего направления. Такой подход не приводит к заметным погрешностям, если измерения проводятся на поисковой площади с линейными размерами порядка десятков и первых сотен км.

При построении моделей крупных геологических объектов необходимо учитывать сферичность Земли, а расчеты проводить в сферической системе координат [1–3]. В качестве элементов аппроксимации удобно использовать сферические аппроксимирующие тела [1–4]. В работах [1–3] для аппроксимации плотностного строения среды используется сферический прямоугольный параллелепипед с плотностью, меняющейся в радиальном направлении по линейному закону, в работе [4] плотностная параметризация среды осуществляется с использованием сферической прямоугольной призмы с произвольно расположенными верхним и нижним основаниями. Плотность аппроксимирующего элемента в работе [4] меняется вдоль параллелей и меридианов пропорционально длинам дуг на верхнем и нижнем основаниях, линейно или экспоненциально вдоль любого радиуса и принимает заданные значения в вершинах призмы.

В настоящей статье рассматриваются решения прямой задачи гравиметрии для аппроксимирующих тел в виде сферического многогранника и сферической треугольной призмы.

Данные тела имеют хорошие аппроксимационные свойства, позволяющие с высокой степенью точности учитывать размеры и форму моделируемых объектов, используя при этом минимальное количество элементов аппроксимации.

Прямая задача гравиметрии для сферического многогранника

Постановка задачи. В соответствии с работой [5], дадим определение рассматриваемому аппроксимирующему элементу.

В геоцентрической системе координат $\Sigma_{\text{сф}}(0; r; \varphi, \lambda)$ (определение которой приводится в работах [1–3]) выделим тело D (рис. 1, а), имеющее $2 \times N$ вершин.

N вершин тела расположены на сфере радиуса r_2 и имеют координаты $r_2, \varphi_i, \lambda_i, i=1, 2, \dots, N$; остальные N вершин расположены на сфере радиуса r_1 ($r_1 < r_2$) и имеют координаты $r_1, \varphi_i, \lambda_i$.

Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и начало системы координат.

Верхняя и нижняя грани тела образованы сегментами сфер радиусов r_2 и r_1 – т. н. сферическими многоугольниками. Каждая сторона (ребро) верхней (нижней) грани представляет собой дугу больш-

шого круга, соединяющую смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и $r_1, \varphi_i, \lambda_i; r_1, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$. Боковые ребра тела представлены отрезками прямых, соединяющих вершины с координатами $r_1, \varphi_i, \lambda_i$ и $r_2, \varphi_i, \lambda_i$. Определенное таким образом тело будем называть сферическим многогранником.

Под прямой задачей для сферического многогранника D будем понимать определение радиальной составляющей гравитационного потенциала:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = \int \int \int_D \rho(r)(R-r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda. \quad (1)$$

Здесь R, φ_0, λ_0 – координаты точки расчета поля в сферической системе координат; D – сферический многогранник; r, φ, λ – переменные интегрирования; ω – угол при центре сферы между направлениями на точки R, φ_0, λ_0 и r, φ, λ соответственно;

$$P^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega,$$

$$\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda).$$

Плотность сферического многогранника D будем полагать меняющейся в радиальном направлении по линейному закону:

$$\rho(r) = \rho + k(r_2 - r), \quad (2)$$

где ρ – постоянная плотность; k – коэффициент, характеризующий изменение плотности по направлению r .

Решение задачи. Будем полагать, что все точки многогранника D лежат по одну сторону относительно плоскости каждой из его боковых граней (этого всегда можно добиться, выполнив соответствующее разбиение исходного произвольного сферического многогранника). Тогда (рис 1, б) ин-

теграл в правой части (1) можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int \int \int_D \rho(r)(R-r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda = \sum_{i=1}^N t_i \cdot \int \int \int_{D_i} \rho(r)(R-r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda, \quad (3)$$

где

$$t_i = \text{sign}[(a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0)(a_i x_{i+2} + b_i y_{i+2} + c_i z_{i+2})];$$

$$a_i = y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i; \quad b_i = -x_i z_{i+1} + x_{i+1} z_i;$$

$$c_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i; \quad x_i = \sin \varphi_i \cos \lambda_i; \quad y_i = \sin \varphi_i \sin \lambda_i;$$

$$z_i = \cos \varphi_i; \quad i = 1, 2, \dots, N+2; \quad \varphi_{N+1} = \varphi_1; \quad \varphi_{N+2} = \varphi_2;$$

$$\lambda_{N+1} = \lambda_1; \quad \lambda_{N+2} = \lambda_2.$$

Расчет интегралов в правой части (3) удобно проводить в системе координат $O'X'Y'Z'$, полученной ортогональным вращением системы координат $OXYZ$ вокруг центра O таким образом, чтобы точка M оказалось на оси OZ' , как это показано на рис. 2, а.

Тогда выражения для слагаемых в правой части (3) можно записать в виде:

$$\int \int \int_{D_i} \rho(r)(R-r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda = \int \int \int_{D_i} \rho(r)(R-r \cos \varphi') P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda', \quad (4)$$

где D_i – элементарный сферический многогранник (рис. 1, б, 2, а); φ', λ' – переменные интегрирования, определенные в системе координат $\Sigma_{\text{сф}}(0; r; \varphi'; \lambda')$, связанной с декартовой системой координат $O'X'Y'Z'$.

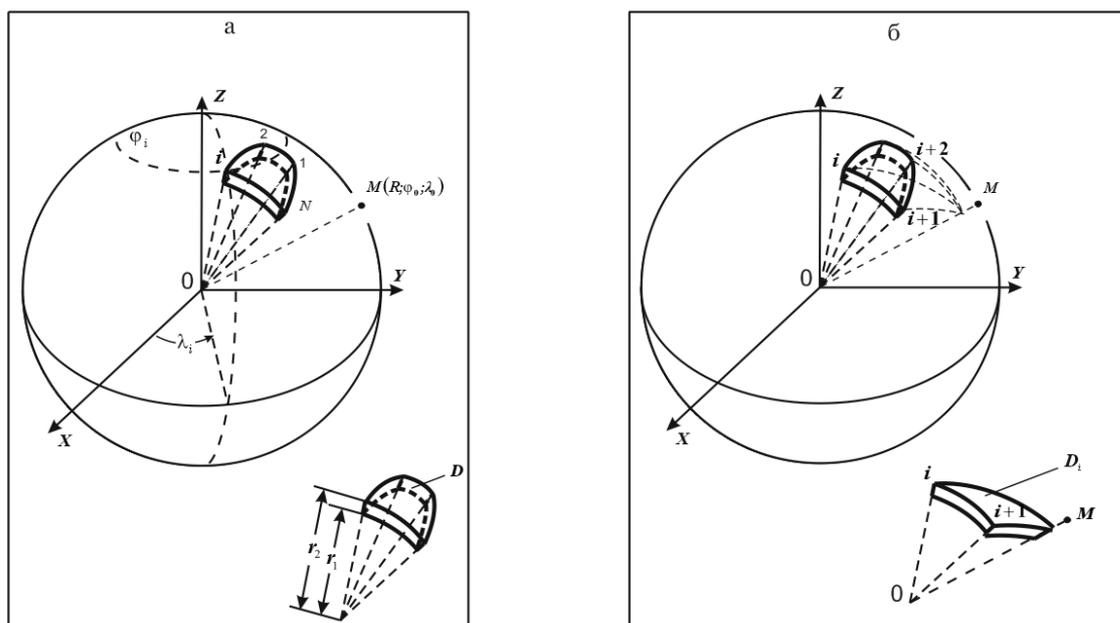


Рис. 1. Сферический многогранник: а) пространственное расположение сферического многогранника; б) к расчету радиальной составляющей гравитационного потенциала для сферического многогранника

Подставляя в правую часть (4) выражение (2) для плотности $\rho(r)$ и выполняя последовательное интегрирование по переменным φ' и r , получим выражение следующего вида:

$$f \iiint_{D_i} \rho(r)(R-r \cos \varphi') P^{-3} r^2 \sin \varphi' dr d\varphi' d\lambda' =$$

$$= f(\sigma + k \cdot r_2) R \int_0^{L_i} F_1(\lambda') d\lambda' - f \cdot k \cdot R^2 \int_0^{L_i} F_2(\lambda') d\lambda', \quad (5)$$

где

$$F_1(\lambda') =$$

$$= t \left[\frac{(2-3t)p_k}{3} - \frac{r_k'^2 p_k + t \cdot r_k' p_k}{3} \right]_{k=1}^{k=2} + \left. \begin{matrix} t = \cos \varphi'(\lambda') \\ t = 1 \end{matrix} \right\},$$

$$+ 2t(1-t^2) \text{Arth } \Lambda(t)$$

$$F_2(\lambda') =$$

$$= t \left[\frac{3t^2 p_k (r_k' - t)}{2} + \frac{3r_k' p_k^3}{4} + \frac{5t \cdot p_k^3}{4} - \frac{3(1-t^2)p_k (r_k' - t)}{8} \right]_{k=1}^{k=2} + \left. \begin{matrix} t = \cos \varphi'(\lambda') \\ t = 1 \end{matrix} \right\},$$

$$- r_k'^3 p_k$$

$$+ 3(1-t^2)^2 \text{Arth } \Lambda(t) / 4$$

$$r_k' = r_k / R; \quad p_k = \sqrt{1 + r_k'^2 - 2t \cdot r_k'};$$

$$\Lambda(t) = (r_2' - r_1') / (p_2 + p_1).$$

Воспользовавшись формулами сферической тригонометрии [6], определим выражение для углов L_i (рис. 2, а):

$$L_i = 2 \arctg \sqrt{\frac{[\cos(a_i - b_i) - \cos c_i]}{[\cos c_i - \cos(a_i + b_i)]}},$$

где

$$\cos a_i = \cos \varphi_0 \cos \varphi_i + \sin \varphi_0 \sin \varphi_i \cos(\lambda_0 - \lambda_i);$$

$$\cos b_i = \cos \varphi_0 \cos \varphi_{i+1} + \sin \varphi_0 \sin \varphi_{i+1} \cos(\lambda_0 - \lambda_{i+1});$$

$$\cos c_i = \cos \varphi_i \cos \varphi_{i+1} + \sin \varphi_i \sin \varphi_{i+1} \cos(\lambda_i - \lambda_{i+1}).$$

Аналогично определим выражение для $\cos \varphi'(\lambda')$:

$$\cos \varphi'(\lambda') = (1 - \beta_1 \beta_2) / \sqrt{(1 + \beta_1^2)(1 + \beta_2^2)},$$

где

$$\beta_1 = \sin[(A - \lambda') / 2] \cdot \text{tg}(b_i / 2) / \sin[(A + \lambda') / 2],$$

$$\beta_2 = \cos[(A - \lambda') / 2] \cdot \text{tg}(b_i / 2) / \cos[(A + \lambda') / 2],$$

$$\text{tg}(b_i / 2) = \sqrt{(1 - \cos b_i)(1 + \cos b_i)},$$

$$\sin[(A \pm \lambda') / 2] =$$

$$= \sin(A / 2) \cdot \cos(\lambda' / 2) \pm \cos(A / 2) \cdot \sin(\lambda' / 2),$$

$$\sin(A / 2) = \sqrt{[\cos(b_i - c_i) - \cos a_i] / 2} / \sin b_i / \sin c_i,$$

$$\cos(A / 2) = \sqrt{[\cos a_i - \cos(b_i + c_i)] / 2} / \sin b_i / \sin c_i,$$

$$\cos[(A \pm \lambda') / 2] =$$

$$= \cos(A / 2) \cdot \cos(\lambda' / 2) \mp \sin(A / 2) \cdot \sin(\lambda' / 2),$$

A – угол при i -й вершине сферического треугольника (рис. 2, б).

Интегралы в правой части (5) не выражаются в конечном виде, поэтому для их вычисления будем использовать квадратурную формулу Гаусса–Легандра, обладающую наивысшей алгебраической степенью точности при заданном количестве узлов интегрирования [1–4, 7, 8]:

$$\int_0^{L_i} F_k(\lambda') d\lambda' \approx \frac{L_i}{2} \sum_{j=1}^n A_j F_k(\lambda_j'), \quad k = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где $\lambda_j' = L_i x_j / 2$; n – порядок квадратуры; x_j и A_j – узлы и коэффициенты квадратурной формулы.

Для обеспечения расчета интегралов по формуле (6) с заданной точностью используем процедуру, описанную в работе [3].

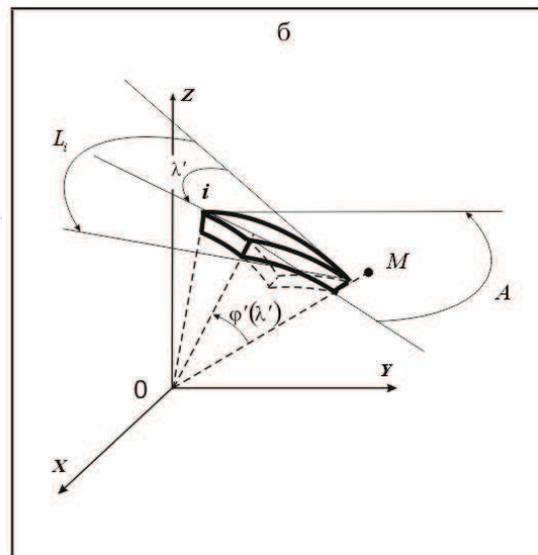
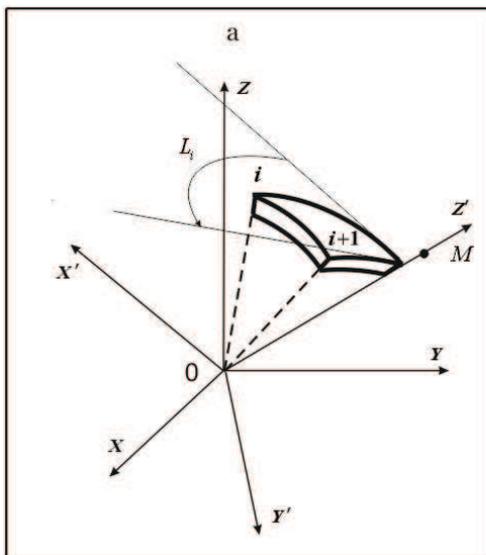


Рис. 2. К расчету радиальной составляющей гравитационного потенциала для элементарного сферического многогранника D_i . а) определение угла L_i ; б) определение угла $\varphi'(\lambda')$

При $k=0$ решение (1–6) дает, как частный случай, решение задачи для сферического многогранника постоянной плотности, рассматриваемой в работе [9].

Прямая задача гравиметрии для сферической треугольной призмы с произвольными верхним и нижним основаниями

Постановка задачи. Как и в случае сферического многогранника, в соответствии с работой [5], дадим определение рассматриваемому аппроксимирующему элементу.

В геоцентрической системе координат $\Sigma_{сф}(0;r;\varphi;\lambda)$ выделим тело (рис. 3), имеющее вершины с координатами $(r_1^B, \varphi_1, \lambda_1)$, $(r_1^H, \varphi_1, \lambda_1)$, $(r_2^B, \varphi_2, \lambda_2)$, $(r_2^H, \varphi_2, \lambda_2)$, $(r_3^B, \varphi_3, \lambda_3)$, $(r_3^H, \varphi_3, \lambda_3)$. Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $r_1^B, \varphi_1, \lambda_1$; $r_2^B, \varphi_2, \lambda_2$; $r_3^B, \varphi_3, \lambda_3$ ($i=1,2,3$; $r_4^B=r_1^B$; $r_4^H=r_1^H$; $\varphi_4^B=\varphi_1^B$; $\lambda_4^B=\lambda_1^B$) и начало системы координат.

Верхнее и нижнее основания призмы (поверхности) опираются на верхние и нижние вершины тела и описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} r^B(\varphi, \lambda) &= a^B \varphi + b^B \lambda + c^B; \\ r^H(\varphi, \lambda) &= a^H \varphi + b^H \lambda + c^H. \end{aligned} \quad (7)$$

Поверхности (основания) $r^B(\varphi, \lambda)$, $r^H(\varphi, \lambda)$ будем называть сферическими, а рассматриваемое тело – треугольной сферической призмой с произвольно расположенными верхним и нижним основаниями.

Будем полагать, что плотность призмы меняется в радиальном направлении по линейному закону:

$$\rho(r) = \rho - k \cdot r. \quad (8)$$

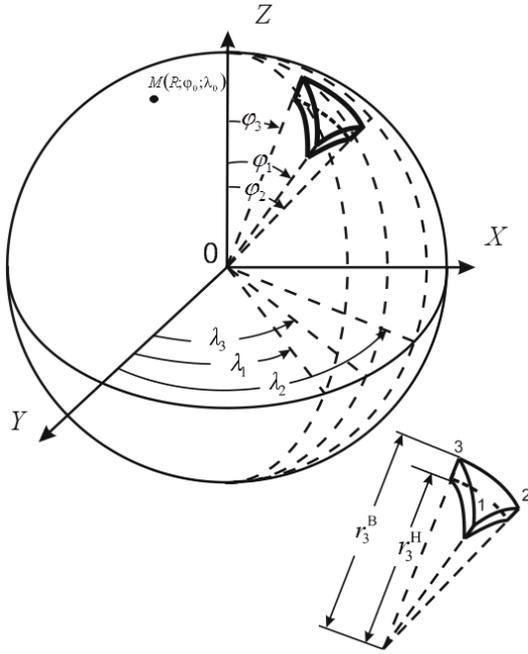


Рис. 3. Сферическая треугольная призма

Под прямой задачей гравиметрии для сферической треугольной призмы D будем понимать опре-

деление радиальной составляющей гравитационного потенциала:

$$\begin{aligned} V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) &= \\ &= f \iiint_D \rho(r)(R-r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $R, \varphi_0, \lambda_0, r, \varphi, \lambda$ – те же, что и в выражении (1); $\rho(r)$ – плотность, описываемая соотношением (8).

Аналогом данного аппроксимирующего элемента в декартовой системе координат является вертикальная треугольная призма с плотностью, меняющейся с глубиной по линейному закону – типовой аппроксимирующий элемент, рассмотренный в работе [10].

Решение задачи. Интеграл в выражении для гравитационного эффекта сферической призмы допускает аналитическое интегрирование только по одной переменной, поэтому для численного решения прямой задачи (9) будем использовать квадратурный вычислительный метод, описанный в работах [1–4]. Так же как и при решении прямой задачи для сферического многогранника, выполним поворот системы координат так, чтобы расчетная точка M оказалось на оси OZ' новой системы координат. Подставим в правую часть (9) выражение для плотности (8) и, выполнив интегрирование по переменной r , получим следующее выражение для $V_r(R, \varphi_0, \lambda_0)$:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \iint_S F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda', \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} F(\varphi', \lambda') &= \\ &= \rho[R \cdot F_3^2 - \cos \varphi' \cdot F_3^3] - k[R \cdot F_3^3 - \cos \varphi' \cdot F_3^4], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_n^m &= F_n^m(\varphi', \lambda') = \int_{r^H(\varphi, \lambda)}^{r^B(\varphi, \lambda)} \frac{r^m}{P^n} dr; \\ m &= 0, 1, 2, 3, \dots; n = 2i + 1; i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения для интегралов (12) записываются с помощью рекуррентных соотношений, приведенных в работе [3]:

$$\begin{aligned} F_{2i+1}^m &= -\frac{m-i-0,5}{m-2i} \cdot r^{m-1} P^{-2i-1} b F_{2i+1}^{m-1} - \\ &- \frac{m-1}{m-2i} r^{m-1} P^{-2i-1} a F_{2i+1}^{m-2} + \frac{r^{m-1}}{m-2i} / P^{-2i+1}, \quad m \neq 2i; \\ F_{2i+1}^{2i} &= -b / 2 F_{2i+1}^{2i-1} + F_{2i-1}^{2i-2} - r^{2i-1} / (2i-1) P^{-2i+1}; \\ F_{2i+1}^0 &= \begin{cases} \frac{2(2r+b)}{\Delta P^{-2i+1}} + \\ \frac{8(i-1)}{\Delta} / (2i-1) F_{2i-1}^0, & \Delta \neq 0, \\ (2i+2)^{-1} P^{-2i-2}, & \Delta = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^0 &= -\ln(P-b/2-r); \quad a = R^2; \quad b = -R \cos \varphi'; \\ \Delta &= 4a - b^2. \end{aligned}$$

В зависимости от расположения расчетной точки M относительно тела, показанного на рис. 4, расчетная формула (10) может принимать одну из следующих форм:

$$а) V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \sum_{m=1}^3 \int_0^{L_m} \int_0^{\varphi_m(\lambda')} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda';$$

$$б) V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \sum_{m=j}^{j+1} \int_0^{L_m} \int_0^{\varphi_m(\lambda')} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda';$$

$$в) V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \int_0^{L_j} \int_0^{\varphi_j(\lambda')} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda';$$

$$г) V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \int_0^{\varphi_j(\lambda')} \int_0^{L_j} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda'.$$

$$д) V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = f \int_0^{\varphi_i(\lambda')} \int_0^{L_j} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda' +$$

$$+ f \int_0^{L_i} \int_0^{\varphi_i(\lambda')} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda'.$$

Здесь $L_j, \varphi_j(\lambda')$ – те же, что и в формуле (5) для сферического многогранника.

Значения $r^{\mu}(\varphi, \lambda)$, $r^{\mu}(\varphi, \lambda)$ в выражениях (12) определяются соотношениями (7), представленными в исходной системе координат $\Sigma_{сф}(0; r; \varphi; \lambda)$. Для определения этих значений в системе координат $\Sigma_{сф}(0; r; \varphi; \lambda)$ приведем формулы расчета для $\varphi(\varphi', \lambda)$, $\lambda(\varphi, \lambda')$, полученные с помощью формул [7]:

$$\varphi(\varphi', \lambda') = \arccos d, \quad \lambda(\varphi', \lambda') = \arctg(s/c), \quad (13)$$

где

$$d = \cos \varphi' \cos \varphi_0 + \sin \varphi' \sin \varphi_0 \cos \lambda',$$

$$s = \sin \varphi_j' / \sin \varphi' \cdot \sin \lambda',$$

$$c = (\cos \varphi_j' - \cos \varphi_0 \cos \varphi') / \sin \varphi_0 / \sin \varphi'.$$

Таким образом, решение прямой задачи гравиметрии (9) сводится к расчету двойных интегралов

вида $\int_0^{\lambda} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda'$, который будем осу-

ществлять с помощью квадратурных формул Гаусса–Лежандра:

$$\int_0^{\lambda} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi', \lambda') \sin \varphi' d\varphi' d\lambda' \approx \lambda / 4 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (\varphi_2(\lambda_i') - \varphi_1(\lambda_i')) \sum_{j=1}^{n_2} A_i A_j F(\varphi_j', \lambda_i') \sin \varphi_j', \quad (14)$$

где

$$\lambda_i' = \lambda(x_i + 1) / 2;$$

$$\varphi_j' = (\varphi_2(\lambda_i') - \varphi_1(\lambda_i'))x_j / 2 + (\varphi_2(\lambda_i') + \varphi_1(\lambda_i')) / 2;$$

x_i, x_j – узлы; A_i, A_j – весовые коэффициенты квадратурных формул Гаусса–Лежандра.

Как и в случае сферического многогранника, расчет интегралов по формуле (14), обеспечивающий заданную точность, осуществляется с помощью процедуры, описанной в работе [3].

Известно [3], что скорость и точность вычисления гравитационного эффекта с помощью квадратурных формул Гаусса–Лежандра зависят от горизонтальных размеров тела, глубины его погружения и места положения точки, для которой ведутся вычисления. В частности, если точка расположена

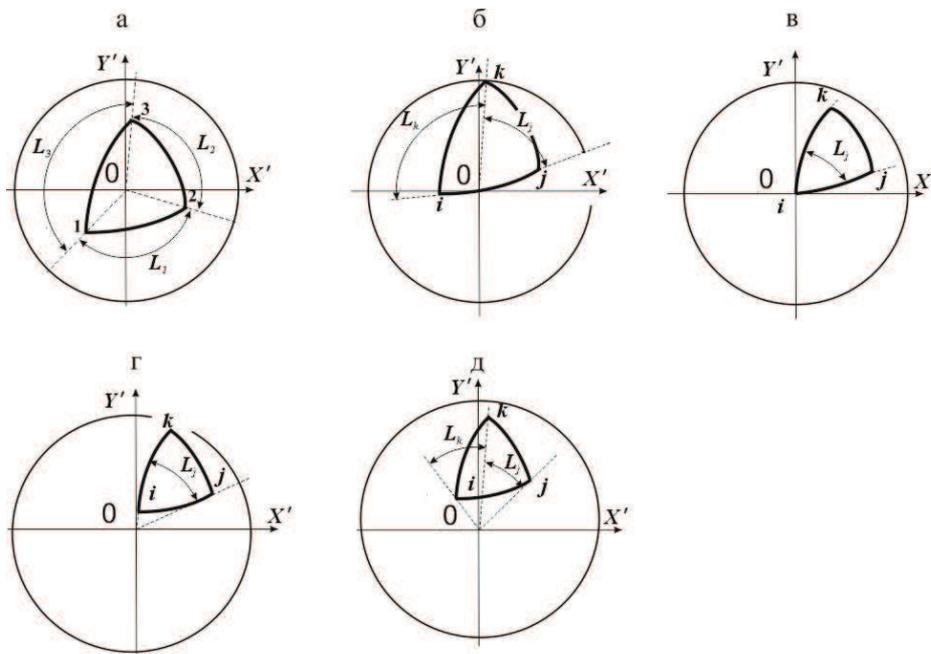


Рис. 4. Положение точки относительно тела: а) над телом; б) над телом в плоскости боковой грани; в) над телом на продолжении бокового ребра; г, д) за проекцией тела на поверхность Земли (в случае г точка принадлежит плоскости боковой грани тела). i, j, k – номера вершин

вблизи основания призмы, для обеспечения заданной точности расчетов может потребоваться большое количество узлов интерполяции.

Подинтегральная функция в (10) содержит слагаемые вида $r^2(\varphi', \lambda') \sin \varphi' / P$, где P – расстояние от точки M до точки поверхности основания призмы с координатами

$$r(\varphi', \lambda'), \varphi', \lambda';$$

$$P = \sqrt{r^2(\varphi', \lambda') + R^2 - 2 \cos \varphi' \cdot R \cdot r(\varphi', \lambda')};$$

$$r(\varphi', \lambda') = r^B(\varphi, \lambda); \quad \varphi = \varphi(\varphi', \lambda'); \quad \lambda = \lambda(\varphi', \lambda').$$

При $\varphi' \rightarrow 0$ величина $P \rightarrow 0$. Поскольку $\sin \varphi'$ и P имеют одинаковый порядок малости, особенность $r^2 \sin \varphi' / P$ является устранимой, однако, учитывая повышенные требования метода Гаусса–Лежандра к точности вычисления подинтегральных функций, а также к их гладкости, желательнее исключить из расчетов точки, в которых соответствующие функции могут иметь особенности. Для этого удобно воспользоваться известным в вычислительной математике методом аддитивного выделения особенностей [10].

Пусть расчетная точка $M(R, \varphi_0, \lambda_0)$ находится вблизи поверхности $r^B(\varphi, \lambda)$ (рис. 5) или непосредственно на самой поверхности. Вычислим значения $r_2 = r^B(\varphi_0, \lambda_0)$, $r_1 = r^A(\varphi_0, \lambda_0)$ и построим сферический многогранник D' координаты вершин которого φ_i, λ_i ($i=1,2,3$) совпадают с соответствующими координатами призмы D , а радиальные координаты равны r_1 и r_2 соответственно.

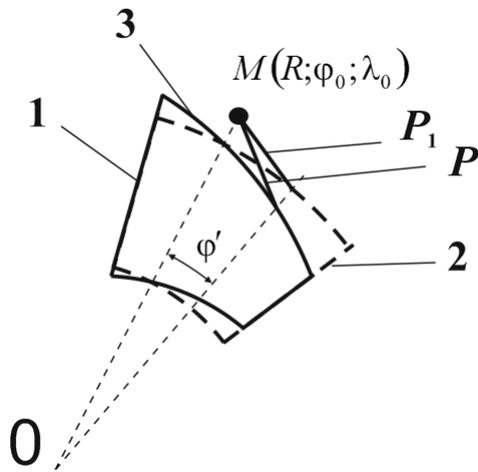


Рис. 5. 1) сферическая призма D ; 2) сферический многогранник D' ; 3) поверхность верхнего основания призмы

Преобразуем формулу (10) следующим образом:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) =$$

$$= f \iint_S [F(\varphi', \lambda') - F'(\varphi', \lambda')] \sin \varphi' d\varphi' d\lambda' +$$

$$+ V_r'(R, \varphi_0, \lambda_0), \quad (15)$$

где $V_r'(R, \varphi_0, \lambda_0)$ – гравитационный эффект многогранника D' , вычисленный по формулам (1–6), а

$F'(\varphi', \lambda')$ вычисляются аналогично $F(\varphi', \lambda)$ по формулам (11), (12), в которых вместо $r^B(\varphi_0, \lambda_0)$ положено r_2 , а вместо $r^A(\varphi, \lambda) - r_1$. Расчет интеграла в (14) выполняем с помощью квадратурной формулы (14). Соответствующие слагаемые в подинтегральном выражении в (15) будут иметь вид $\sin \varphi' (r^2/P - r^2/P')$, где P – расстояние от расчетной точки M до точки с координатами $r(\varphi', \lambda)$, φ', λ' , лежащей на поверхности верхней грани сферической призмы D , а P' – расстояние от M до соответствующей точки, принадлежащей верхней грани сферического многогранника D' (рис. 5). При $\varphi' \rightarrow 0$, $r' \rightarrow r$, а $P' \rightarrow P$, таким образом, соответствующие слагаемые в подинтегральной функции в (15) при $\varphi' \rightarrow 0$ стремятся к нулю, что должно обеспечить хорошую сходимость метода квадратур.

Теперь рассмотрим алгоритм решения прямой задачи для случая, когда плотность тела может изменяться как по переменной r , так и по φ и λ , принимая заданные значения в вершинах призмы:

$$\rho(\varphi, \lambda, r) = \rho(\varphi, \lambda) - k(\varphi, \lambda) \cdot r, \quad (16)$$

где

$$\rho(\varphi, \lambda) = \rho_0 + \rho_1 \cdot \varphi + \rho_2 \cdot \lambda,$$

$$k(\varphi, \lambda) = k_0 + k_1 \cdot \varphi + k_2 \cdot \lambda, \quad (17)$$

$\rho_0, \rho_1, \rho_2, k_0, k_1, k_2$ вычисляются с помощью соответствующих интерполяционных формул [8].

В этом случае выражение радиальной составляющей гравитационного потенциала для призмы примет вид:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) =$$

$$= f \iiint_D \rho(\varphi, \lambda, r) (R - r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda. \quad (18)$$

где $\rho(\varphi, \lambda, r)$ определяется соотношением (16).

Численный алгоритм решения задачи (18) для плотности (16, 17) аналогичен алгоритму решения задачи (9) для плотности (8). Выражение (11) для функции $F(\varphi', \lambda)$ здесь будет иметь вид:

$$F(\varphi', \lambda') = \rho(\varphi, \lambda) [R \cdot F_3^2 - \cos \varphi' \cdot F_3^3] -$$

$$- k(\varphi, \lambda) [R \cdot F_3^3 - \cos \varphi' \cdot F_3^4],$$

где зависимости $\varphi = \varphi(\varphi', \lambda')$, $\lambda = \lambda(\varphi', \lambda')$ определяются формулами (13).

В формуле (15) $V_r'(R, \varphi_0, \lambda_0)$ – гравитационный эффект сферического многогранника с плотностью, меняющейся вдоль радиального направления по линейному закону $\rho(r) = \rho(\varphi_0, \lambda_0) - k(\varphi_0, \lambda_0)r$.

Заключение

1. При моделировании региональных (континентально-планетарных) геологических структур расчеты проводятся в сферической системе координат, поэтому в качестве аппроксимирующих тел целесообразно использовать сферические тела.
2. Разработан алгоритм решения прямой задачи гравиметрии для аппроксимирующего тела в виде сферического многогранника с плотно-

стью, меняющейся в радиальном направлении по линейному закону.

3. Разработан алгоритм решения прямой задачи гравиметрии для аппроксимирующего тела в виде сферической треугольной призмы с произвольными верхним и нижним основаниями и плотностью, меняющейся вдоль параллелей и меридианов пропорционально длинам дуг на верхнем и нижнем основаниях, линейно

вдоль любого радиуса и принимающей заданные значения в вершинах призмы.

4. Алгоритмы решения задач реализуются с использованием численных методов: квадратурного метода Гаусса—Лежандра и (в прямой задаче для сферической призмы) метода аддитивно-выделения особенностей.

В следующей статье будут приведены результаты тестирования алгоритмов на квазиреальных моделях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. – № 12. – С. 34–50.
2. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Задачи гравиметрии для лучевых ускорений и изучение маскона Моря Нектара на Луне // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 7. – С. 60–72.
3. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н. Методика решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах – Киев: Наукова думка, 1986. – 112 с.
4. Старостенко В.И., Легостаева О.В. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1998. – № 12. – С. 31–44.
5. Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 105–110.
6. Кранц П. Сферическая тригонометрия – М: ЛКИ, 2007. – 98 с.
7. Страхов В.Н. Метод приближенного решения прямой трехмерной задачи гравиметрии // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. – № 9. – С. 52–62.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: БИНОМ, 2006. – 636 с.
9. Kosugin V.Yu., Pyatakov Yu.V., Krasikov V.N. Direct Gravity Problem for a Spherical Polyhedron // Geol. of Pac. Ocean. – 1997. – V. 13. – P. 857–868.
10. Пятаков Ю.В., Исаев В.И., Косыгин В.Ю. Методы теории потенциала при решении прямых задач гравиметрии и геодинамики трехмерных неоднородных сред // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 1. – С. 76–83.

Поступила 03.09.2012 г.