КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Т.А. Инхиреева, А.В. Козловских
Научный руководитель В. П. Зимин
Томский политехнический университет
tai2@tpu.ru

Введение

В одной из задач теории циклических ускорителей исследуется поведение заряженных частиц в медианной плоскости тороидальной вакуумной камеры. Исследуется поведение частиц в возмущенном поле в области устойчивых колебаний, и вне её. Математически задача сводится к уравнению

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} + n(x)\cdot x = f(x),$$

где $n(x)$ – дифференциальная характеристика спада магнитного поля, в камере ускорителя. Функция $n(x)$, получаемая при обработке измерений магнитного поля, хорошо аппроксимируется кубическим полиномом, и для одного из типов циклических ускорителей [1] получено нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого и будет предметом исследований

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma x \sin(\Omega\Theta). \quad (1)$$

Представим его в виде (2)

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} + \omega^2(x)\cdot x = \gamma x \sin(\Omega\Theta), \quad (2)$$

где $$\omega^2(x) = (\alpha + \beta x^2) \quad (2а)$$

Решение однородного уравнения

Основная идея построения аналитического решения уравнения (1) заключается в следующем: представив (1) в виде (2) и считая для малого шага $\Delta\Theta$ частоту на этом шаге $\omega^2(x_i(\Theta_i))$ постоянной, получаем однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения находится в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде:

$$x(\Theta) = a\cos(\omega\Theta) + b\sin(\omega\Theta).$$

Рассмотрим подробно решение задачи Коши на первом шаге. Дано: начальные условия (x_0, x_0' – значения координат и производной, значения независимой координаты θ_0). Продифференцировав общее решение, можно найти неизвестные коэффициенты, а затем записать решение задачи Коши на шаге $\Delta\Theta$ в матричной форме:

Полученные в (3) значения координаты и производной являются начальными условиями для решения на следующем шаге $\Delta\Theta$.

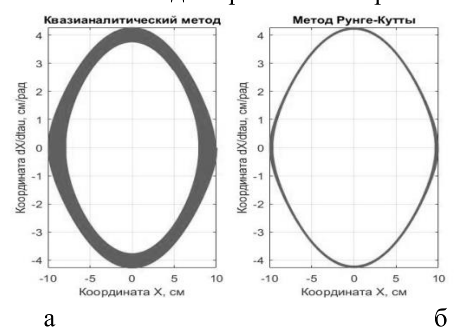
$$\begin{pmatrix} x(\Theta_0+\Delta\Theta) \\ x'(\Theta_0+\Delta\Theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0(\Theta_0+\Delta\Theta)) & \sin(\omega_0(\Theta_0+\Delta\Theta)) \\ -\omega_0\sin(\omega_0(\Theta_0+\Delta\Theta)) & \omega_0\cos(\omega_0(\Theta_0+\Delta\Theta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом частота будет изменяться, согласно (2а).

Вычисляя последовательно в цикле по выражению (3) значения фазовых координат с учётом изменения $\omega^2(x_i(\Theta_i))$, получим решение однородного уравнения на дискретной сетке с шагом $\Delta\Theta$.

Для более полного представления свойств решений уравнения (1), найдём координаты особых точек, определим их тип [2]. Точки имеют координаты: a – (0,0), b – (–11.4, 0), c – (11.4, 0) и типы: 1 – центр; 2,3 – сёдла.

В случае точного решения однородного уравнения фазовая траектория через оборот отображается сама на себя и на фазовой плоскости получается замкнутая параметрическая кривая. На графике рис. 1 видно, что это условие не выполнятся ни для предлагаемого алгоритма (рис. 1а), ни для метода Рунге-Кутты ode45 (Matlab) [3] (рис. 1б), на интервале независимой переменной Θ=100*π и начальных значений фазовых координат (11,0). При этом погрешность предлагаемого метода нарастает быстрее.



а б

Рис. 1. Фазовые траектории в области устойчивого движения

Точное решение уравнения

Получить более точное решение однородного уравнения, используя предложенный алгоритм, можно при компенсации потерь полной энергии на каждом шаге. В полной энергии системы кинетическая, как функция скорости, вычисляется по известной формуле [1], потенциальная как интеграл возвращающей силы – из уравнения (1)

$$\Pi = \int (\alpha x + \beta x^3) dx = \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{4} x^4 .$$

Найдём полную энергию системы W_0

$$W_0 = \frac{x_0^{/2}}{2} + \frac{\alpha}{2} x_0^{\ 2} + \frac{\beta}{4} x_0^{\ 4} . \qquad (4)$$

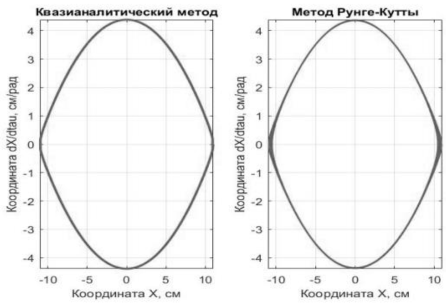
Уменьшение амплитуды происходит по закону, близкому к экспоненте. Тогда связь между текущем значении полной энергии W_i и W_0 запишется в виде:

$$W_i = e^{k\cdot\Delta\Theta} W_0 . \qquad (5)$$

Из (5) найдём поправочный коэффициент и, с учётом квадратов координат и производных в (4), выражения для точных значении фазовых координат будут

$$\begin{aligned} x_{ti} &= \sqrt{e^{-\ln(W_i/W_0)}} \cdot x_i \\ x_{ti}^{/} &= \sqrt{e^{-\ln(W_i/W_0)}} \cdot px_i \end{aligned} \qquad (6)$$

Результаты решения с учётом поправок (6) приводятся на рис. 2. Начальные условия и интервал интегрирования те же самые, что использовались при построении фазового портрета рис. 1.



а б

Рис. 2. Фазовые траектории с учетом поправок

Из рис. 2 видно, что отображающие точки на фазовой траектории аналитического решения отображаются сами на себя, т.е. полная энергия сохраняется, а амплитуда колебаний остаётся постоянной.

Исследование решений в области неустойчивого решения

Если задать начальные условия такие, что отображающая точка на фазовой плоскости будет лежать вне сепаратрис (например, (x_0=12, x'_0=0)), то, согласно (2а), $\omega(x)2<0$. Уравнение примет вид

$$\frac{d^2 x}{d\Theta^2} - \omega^2(x) \cdot x = 0 . \qquad (7)$$

В этом случае функции, образующие фундаментальную систему решений, будут

$$\exp(-\omega\Theta); \exp(\omega\Theta),$$

а общее решение и его производная запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(\Theta) &= a\exp(-\omega\Theta) + b\exp(\omega\Theta), \\ \frac{dx}{d\Theta} &= -\omega a\exp(-\omega\Theta) + \omega b\exp(\omega\Theta). \end{aligned} \qquad (8)$$

Методика решения уравнения (7) такая же. Только вместо тригонометрических функций будут записаны экспоненты.

Уравнение (7), в отличие от предыдущего случая, относится к типу «грубых», т.е. таких, свойства решений которых мало меняются при небольшом изменении параметров или незначительной погрешности. Фазовые траектории, построенные этими методами, практически не отличаются.

Решение неоднородного уравнения

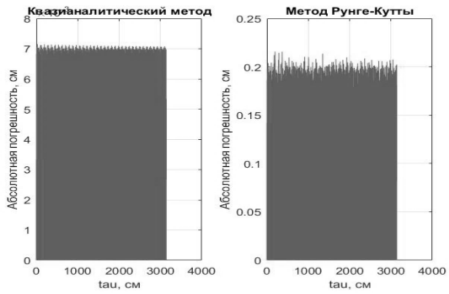
Общее решение исходного уравнения (1) в отсутствие резонанса ($\omega(x) \neq \Omega$) имеет вид

$$x(\Theta) = a\cos(\omega\Theta) + b\sin(\omega\Theta) - \frac{\gamma\sin(\Omega\Theta)}{\Omega^2 - \omega^2} ,$$

в случае резонанса ($\omega(x) = \Omega$)

$$x(\Theta) = a\cos(\omega\Theta) + b\sin(\omega\Theta) - \frac{\gamma(\Omega\Theta\cos(\Omega\Theta) - \sin(\Omega\Theta))}{2\Omega^2} .$$

Для проведения объективного анализа точности решений обеими методами, воспользуемся одним из свойств функций, являющихся решением дифференциального уравнения, а именно: при подстановке таких функций в исходное уравнение оно обращается в тождество.



а б

Рис. 3. Погрешность решения

Качественно оба решения совпадают, при этом погрешность решения как функция шага интегрирования, полученного квазианалитическим методом, меньше погрешности решения, полученного методом Рунге-Кутты на порядок (рис.3). Полученные результаты свидетельствуют о применимости предложенного метода для решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Список использованных источников

1. Ананьев Л.М. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон / Л.М. Ананьев, А.А. Воробьев, В.И. Горбунов. – М.: Госатомиздат, 1961. – 349 с.

2. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович.– М.: Наука, 1990. — 486 с.

3. Эдвардс Ч.Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB: пер. с англ. 3-е изд. / Ч.Г. Эдвардс, Д.Э. Пенни.– М.: Вильямс, 2008. – 1104 с.