УДК 530.145

МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКОЙ И НУЛЕВЫМ ДЕФЕКТОМ

А.И. Бреев

Томский политехнический университет
E-mail: breev@tpu.ru

При помощи метода орбит найдено выражение для локальной дзета-функции оператора Клейна–Гордона на статических однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом. В рамках метода обобщенной дзета-функции рассчитаны вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля.

Ключевые слова:
Поляризация вакуума, уравнение Клейна–Гордона, метод орбит, однородные пространства, дзета-функция.
Key words:
Vacuum polarizations, Clein–Gordon equation, orbits method, homogeneous spaces, zeta function.

Введение

Данная работа посвящена вычислению обобщенной дзета-функции, соответствующей уравнению Клейна–Гордона на статических однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом. Полученное выражение для обобщенной дзета-функции используется для расчета вакуумных средних тензора энергии-импульса, описывающих поляризацию вакуума скалярного поля внешним гравитационным полем. Частный случай, когда однородное пространство является группой Ли, рассмотрен в работах авторов [1, 2].

К классу однородных пространств, имеющих нулевой дефект, относятся симметрические пространства, а также четырехмерные однородные пространства с группой преобразований де Ситтера [3].

Для решения поставленной задачи применяется метод орбит коприсоединенного представления (К-орбит), позволяющий редуцировать уравнение Клейна–Гордона к более простому уравнению на лагранжевом подмногообразии к К-орбите с меньшим количеством переменных [1, 2].

1. Инвариантные метрики на однородных пространствах

Пусть G – связная односвязная вещественная группа Ли, L – алгебра Ли группы Ли G. Рассмотрим правое однородное пространство P с группой движений G. Обозначим через H замкнутую стационарную подгруппу некоторой точки $y_0\in P$ размерности $\dim G-\dim H$. Тогда P диффеоморфно фактор-многообразию G/H и с однородным пространством P естественно сопоставляется главное расслоение группы $G(P,H,\pi)$, где π – каноническая проекция π: $G\to P$.

Над областями тривиализации $U\in P$ в расслоенном пространстве G введем координаты $x^A=(y^a,h^\alpha)$ прямого произведения $U\times H$ $(a=1,\dots,\dim P$, $\alpha=1,\dots,\dim H)$. При этом координаты произвольной точки $x\in G$ можно представить в виде $x=hv(y)$, где v: $P\to$G – локальное гладкое сечение расслоения G $(\pi\circ v=1)$. В свою очередь линейное пространство алгебры Ли L допускает разложение в прямую сумму подпространств $L=\boldsymbol{h}\oplus\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{h}$ – алгебра Ли группы H, $\boldsymbol{m}$ – дополнение к $\boldsymbol{h}$.

Зафиксируем в алгебре Ли L некоторый базис $\{e_A\}=\{e_a,e_\alpha\}$, $(A=1,\dots,\dim G)$, такой что $\{e_a\}$, $(a=1,\dots,\dim P)$ – базис алгебры $\boldsymbol{h}$, $\{e_\alpha\}$, $(\alpha=\dim P+1,\dots,\dim G)$ – базис подпространства $\boldsymbol{m}$. Обозначим за $\{e^B\}$ соответствующий базис в сопряженном пространстве L^*: $\langle e_A,e^B\rangle=\delta_A^{\ B}$, $(A,B=1,\dots,\dim L)$.

Метрический тензор правоинвариантной метрики на группе Ли G в локальных координатах имеет вид

$$\gamma_{ij}(x)=\gamma_{AB}\sigma_i^{\ A}(x)\sigma_j^{\ B}(x),$$
$$\gamma_{AB}=\mathbf{B}(e_A,e_A),\quad i,j=1,\dots,\dim G,\qquad (1)$$

где $\mathbf{B}$ – невырожденная квадратичная форма на алгебре Ли L, задающая метрику на группе Ли G в единице, $\sigma^A(x)$ – базисные правоинвариантные 1-формы. G-инвариантная метрика на однородном пространстве P строится по правоинвариантной метрике (1) на группе:

$$\gamma_{ab}(y)=B_{ab}\sigma_i^{\ a}(y,h)\sigma_j^{\ b}(y,h),\quad B_{ab}=\mathbf{B}(e_a,e_b),\qquad (2)$$

$$B_{ab}C^b_{\alpha c}+B_{cb}C^b_{\alpha a}=0,$$
$$(a,b,c=1,\dots,\dim\mathbf{m};\quad \alpha=1,\dots,\dim\mathbf{h}),\qquad (3)$$

где $C^C_{AB}=([e_A,e_B])^C$ – структурные константы алгебры Ли L. Условие (3) эквивалентно требованию $Ad(H)$-инвариантности формы $\mathbf{B}$ и обеспечивает независимость определения G-инвариантной метрики от действия группы H левыми сдвигами на пространстве расслоения G.

Тензор Риччи связности Леви-Чивита, построенной по G-инвариантной метрике (2), на однородном пространстве P выражается через базисные правоинвариантные 1-формы $\sigma^A(y,h)$ на группе Л и G: $R_{ij}(y)=R_{ab}\sigma_i^a(y,h)\sigma_j^b(y,h)$, $y\in P$, $h\in H$, где величины R_{ab} определяются компонентами формы $\mathbf{B}$ и структурными константами алгебры Ли L:

$$R_{ab}=\Gamma^d_{ac}\Gamma^c_{bd}+C^d_{cd}\Gamma^c_{ab},$$

$$\Gamma^a_{bc}=-\frac{1}{2}C^a_{bc}-\frac{1}{2}B^{ad}\left[B_{ec}C^e_{bd}+B_{eb}C^e_{cd}\right].$$

Здесь $B^{ab}=(B_{ab})^{-1}$, и латинские индексы принимают значения от 1 до dim $\boldsymbol{m}$. Скалярная кривизна однородного пространства P постоянна и равна $R=B^{ab}R_{ab}$.

2. Гармонический анализ на группах Ли

Не имея возможности полностью изложить метод орбит коприсоединенного представления и обобщенный гармонический анализ на группах Ли, отсылаем читателя к работам [4, 5]. Ниже повторим основные понятия и определения.

Пусть группа Ли G действует на сопряженном пространстве L^* коприсоединенным представлением Ad^*: $G\times L^*\to L^*$. На дуальном пространстве L^* определена скобка Пуассона-Ли

$$\{\varphi,\psi\}^{Lie}(f)\equiv\langle f,[\nabla\varphi(f),\nabla\psi(f)]\rangle,$$
$$\varphi,\psi\in C^\infty(L^*),\ f\in L^*. \qquad (4)$$

В силу вырожденности скобки (4) на L^* существуют функции Казимира $K_\mu(f)$, коммутирующие со всеми функциями из $C^?(L^*)$ и инвариантные относительно коприсоединенного представления. Число независимых функций Казимира ind$L$ называется *индексом алгебры L*.

Коприсоединенное действие Ad^* расслаивает L^* на К-орбиты, и коалгебра L^* является объединением связных инвариантных алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, где каждая связная поверхность является объединением К-орбит размерности dim$L-$ind$L-2s$.

Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K^{(s)}_\mu(f)$, коммутирующие с любой функцией на $M_{(s)}$, называются *функциями Казимира (s)-типа*. Через $r_{(s)}$ обозначим количество функционально независимых функций Казимира (s)-типа. Причем dim$M_{(s)}=r_{(s)}$. К-орбита называется *орбитой s-типа*, если $O_\lambda\in M_{(s)}$, а число s – *степенью вырождения орбиты*. К-орбиты с нулевой степенью вырождения называются *невырожденными*, а остальные – *сингулярными*. Через $F^{(s)}_\alpha(f)$, ($\alpha=1,\ldots,$dim$L-r_{(s)}$) обозначим независимый набор функций, определяющих поверхность $M_{(s)}$.

Пусть далее O_λ – К-орбита группы Ли G s-типа, содержащая ковектор λ. Введем на O_λ замкнутую невырожденную 2-форму ω_λ, действующую на касательных векторах $a,b\in T_\lambda O_\lambda$ к К-орбите следующим образом:

$$\omega_\lambda(a,b)=\langle\lambda,[X,Y]\rangle,$$
$$a=ad^*_X\lambda,\quad b=ad^*_Y\lambda,\quad X,Y\in L, \qquad (5)$$

где ad^*: $L^*\to L^*$ – дифференциал коприсоединенного представления Ad^*. 2-форма (5) называется формой Кириллова и задает на К-орбите O_λ симплектическую структуру. Ограничение скобки Пуассона (4) на К-орбиту совпадает со скобкой Пуассона, порожденной симплектической формой ω_λ. Известно, что на симплектическом многообразии существуют канонические координаты Дарбу, в которых симплектическая форма имеет канонический вид.

Обозначим через $(p,q)\in P\times Q$ канонические координаты Дарбу на К-орбите O_λ, в которых форма Кириллова ω_λ принимает канонический вид: $\omega_\lambda=dp^a\wedge dq_a$, $a=1,\ldots,$dim$O_\lambda/2$.

Определим *каноническое* вложение f: $O_\lambda\to L^*$, когда ковектору $f\in L^*$ ставятся в соответствие его канонические координаты на К-орбите O_λ, содержащей ковектор f. Каноническое вложение однозначно определяется функциями $f_X(p,q,\lambda)$, $X\in L$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X,f_Y\}^{Lie}=f_{[X,Y]},\quad f_X(0,0,\lambda)=\lambda(X),\quad X,Y\in L. \qquad (6)$$

Так как $f\in M_{(s)}$, то в случае сингулярных К-орбит каноническое вложение также должно удовлетворять условию $F^{(s)}_\alpha(f)=0$, $\alpha=1,\ldots,$dim$L-r_{(s)}$. Рассмотрим важный частный случай, когда каноническое вложение (6) линейно по переменным p:

$$f_X(q,p,\lambda)=\alpha^a_X(q)p_a+\chi_X(q,\lambda),$$
$$X\in L,\quad a=1,\ldots,\dim O_\lambda/2. \qquad (7)$$

Можно показать, что для существования линейного канонического вложения (7) орбиты O_λ необходимо и достаточно, чтобы функционал λ допускал *поляризацию* $\boldsymbol{n}\subset L$. Напомним, что поляризацией $\boldsymbol{n}$ функционала λ называется подалгебра размерности dim $\boldsymbol{n}$=dim$L-$dim$O_\lambda/2$, подчиненная функционалу λ: $<\lambda,[\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}]>=0$.

Операторы $l_X(q,\lambda)\equiv if_X(q,-i\partial_q,\lambda)$ реализуют неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве гладких функций $L(Q,\boldsymbol{n},\lambda)$ от dim$Q$=dim$O_\lambda/2$ переменных q. Будем называть данное представление *λ-представлением* алгебры Ли L s-типа. Введем на многообразии Q меру $d\mu(q)=\Delta(q)d\mu_0(q)$, где $\Delta(x)$ – модуль группы Ли G, и скалярное произведение

$$(\psi_1,\psi_2)=\int_Q\overline{\psi_1(q)}\psi_2(q)d\mu(q),$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Потребуем, чтобы операторы λ-представления были косоэрмитовы относительно меры d$\mu_0(q)$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно ввести соответствующий «квантовый сдвиг»: $\lambda\to\lambda+i\beta$, где β – некоторое действительное число.

Введем поднятие λ-представления алгебры Ли L до локального представления ее группы Ли G:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}T^\lambda(\exp(tX)x)\,\varphi(q)\right)\bigg|_{t=0}=l_X(q,\lambda)\,\varphi(q),$$
$$T^\lambda(x)\,\varphi(q)=\int_Q D^\lambda_{q\overline{q'}}(x)\,\varphi(q')\,d\mu(q'),\ \ \varphi\in C^\infty(Q), \qquad (8)$$

где exp(tX)– однопараметрическая подгруппа вдоль вектора $X\in L$. Из условия $T^\lambda(x_1)T^\lambda(x_2)=T^\lambda(x_1x_2)$ следует соотношение для «матричных» элементов представления $T^\lambda(x)$:

$$D^\lambda_{q\overline{q'}}(x_1x_2)=\int_Q D^\lambda_{q\overline{q''}}(x_1)D^\lambda_{q''\overline{q'}}(x_2)d\mu(q''). \qquad (9)$$

Можно показать, что обобщенные функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(x)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений ($X\in L$):

$$[\eta_X(x)+l_X(q,\lambda)]D^\lambda_{q\overline{q'}}(x)=0,$$
$$[\xi_X(x)-\overline{l^+_X(q',\lambda)}]D^\lambda_{q\overline{q'}}(x)=0,$$

где $\xi_X(x)$ и $\eta_X(x)$ есть лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно. Из требования однозначной определенности функций $D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(x)$ на группе Ли G следует условие Кириллова *целочисленности* орбиты

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma\in H_2(O_\lambda)}\omega_\lambda = n_\gamma \in Z,$$

где интеграл берется по любому двумерному циклу γ на К-орбите O_λ.

Семейство обобщенных функций $D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(x)$ полно и ортогонально. И для каждой функции $\varphi(x)$ из плотного ядерного подпространства

$$L_{(s)} = \{\varphi \in L_2(G, d\mu(x) \,|\, F^{(s)}_\alpha(\eta_X(x))\varphi(x) = 0,\ X \in L\}$$

определено прямое и обратное преобразование Фурье вида:

$$(q, q', \ \ ) = \Delta^{-1}(q)\int_G \overline{D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(x^{-1})}\ \ (x)\, d\ \ (x), \qquad (10)$$

$$\varphi(x) =$$

$$= \int_{Q\times Q\times J}\psi(q,q',\lambda)D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(x^{-1})d\mu(q)d\mu(q')d\mu(\lambda), \qquad (11)$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_\mu(\eta)$, $d\mu(x)$ – правоинвариантная мера на группе Ли G. Для невырожденных орбит прямое и обратное преобразование (10), (11) определено на всем пространстве $L_2(G, d\mu(x))$.

3. Интегрирование уравнения Клейна–Гордона

Статическое пространство-время представим в виде $(m+1)$-мерного многообразия $M=R^1\times P^m$, где P – m-мерное правое однородное пространство с n-мерной группой движений G.

Введем на M лоренцеву метрику статического пространства-времени:

$$g_{ij} = -\gamma_{ij}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{00} = 1, \quad i, j = 1, \ldots, m+1.$$

где γ_{ij} есть метрический тензор на однородном пространстве (2). Квадратичную форму **B** считаем положительно определенной.

Уравнение Клейна–Гордона скалярного поля на M, взаимодействующего с внешним гравитационным полем, имеет вид

$$\widehat{F}\varphi(y,t) = 0, \quad \widehat{F} \equiv \partial_t^2 - \Delta_P + \xi R. \qquad (12)$$

где $\xi=(m-1)/(4m)$ – конформный множитель, Δ_P – оператор Лапласа на однородном пространстве P. В пространстве решений уравнения (12) определено иденфинитное скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = -i\int_P \overline{\varphi_1(y,t)}\overleftrightarrow{\partial}_t\varphi_2(y,t)d\mu(y). \qquad (13)$$

Уравнение Клейна–Гордона (16) является уравнением Эйлера относительно действия скалярного поля $S=\int L(y,t)d\mu(y)\,dt$ на M с лагранжианом:

$$L(y,t) = \sqrt{|g|}\begin{pmatrix} g^{ij}\,\overline{\partial_i\varphi(y,t)}\,\partial_j\varphi(y,t) - \\ -(m^2+\xi R)\,|\varphi(y,t)|^2 \end{pmatrix},$$

$$g = \det(g_{ij}). \qquad (14)$$

Построим полный базис решений $\varphi_\sigma(y,t)$ уравнения (12), нумеруемый коллективным индексом σ и удовлетворяющий условию нормировки относительно скалярного произведения (13): $(\varphi_\sigma, \varphi_{\sigma'})=\delta_{\sigma\sigma'}$.

В силу статичности пространства-времени решение будем искать в виде $\varphi(y,t)=f(t)F(y)$. Подставляя в уравнение (12) и учитывая (13), имеем

$$f_\Lambda(t) = \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega t}, \quad \omega^2 = \Lambda^2 + \xi R + m^2,$$

где Λ – параметр разделения переменных. Функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна–Фока на P:

$$-\Delta_P F_\Lambda(y) = \Lambda^2 F_\Lambda(y) \qquad (15)$$

и условию ортогональности

$$\int_P \overline{F_\sigma(y)}F_{\sigma'}(y)d\mu(y) = \delta(\sigma, \sigma'), \qquad (16)$$

где $d\mu(y)$ – квазиинвариантная мера на однородном пространстве P.

Пространство гладких функций на однородном пространстве P изоморфно пространству F функций на группе Ли G, постоянных на правых классах смежности по подгруппе изотропии H. Функциональное подпространство F в виду связности группы Ли H определяется выражением:

$$F \equiv \{\varphi \in C^\infty(G) \,|\, \eta_X(x)\varphi(x) = 0,\ X \in \mathbf{h},\ x \in G\}.$$

Для инвариантной метрики $\Delta_P F(y)=H(\eta)F(y)$, где $H(\eta)$ – оператор Лапласа на группе Ли G, и уравнение (15) равносильно уравнению Клейна–Фока на группе Ли G для функций из подпространства F:

$$-H(\eta)F_\Lambda(x) = \Lambda^2 F_\Lambda(x), \quad F_\Lambda \in F. \qquad (17)$$

Решение уравнения Клейна–Фока (17) на группе (в общем случае неунимодулярной) получено в работе [1] и имеет вид

$$F_\sigma(x) = \Delta^{-1/2}(q)\int_Q c_\Lambda(q',\lambda)D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(x^{-1})d\mu(q'). \qquad (18)$$

Для того чтобы функция $F_\sigma(x)$ принадлежала F на искомую функцию $c_\Lambda(q',\lambda)$ наложим условие

$$l_\alpha(q',\lambda)c_\Lambda(q',\lambda) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, \dim\mathbf{h}. \qquad (19)$$

С учетом (19) преобразование Фурье (10), (11) определено на функциональном подпространстве $L_{(s)}(P)$ пространства $L_2(P, \delta(y))$:

$$L_{(s)}(P) = L_{(s)} \cap F = \{\varphi \in L_2(P, d\mu(y)) \,|\, F^{(s)}(\tilde{X})\varphi = 0\},$$

где $\widetilde{X}$ – генераторы группы Ли G преобразований, действующей на P. Число s_P, такое что $M_{(s_P)}\cap\boldsymbol{h}^\perp\neq\varnothing$, но $M_{(s_P-1)}\cap\boldsymbol{h}^\perp\neq\varnothing$, называется *степенью вырождения* однородного пространства P. В [5] показано, что на однородном пространстве имеют место тождества: $\widetilde{K}^{(s_P)}_\mu(\widetilde{X})\equiv 0$, $\widetilde{K}^{(s_P)}_\mu(i\widetilde{X})\equiv 0$, $\mu=1,\ldots,r_{s_P}$, где $\widetilde{K}^{(s_P)}_\mu(f)$ – функции Казимира s_P-типа, такие что $\widetilde{K}^{(s_P)}_\mu(f)|_{h\perp}=0$.

Откуда следует, что функциональное подпространство $L_{(sP)}(P)$ совпадает со всем функциональным пространством $L_2(P, d\mu(y))$, а λ-представление алгебры L должно быть согласовано с тождествами на однородном пространстве P: $\widetilde{K}^{(s_P)}_\mu(\lambda)=0$, $\mu=1,\ldots,r_{s_P}$.

Тогда обобщенное преобразование Фурье (18) не зависит от $h\in$ H и определено на всем функциональном пространстве $L_2(P, d\mu(y))$.

Подставим (18) в уравнение Клейна–Фока (17) и получим на искомую функцию уравнение $[H(l(q',\lambda))+\Lambda^2]c_\Lambda(q',\lambda)=0$. Для однородного пространства нулевого дефекта оператор Лапласа $H(\eta)$ относительно инвариантной метрики является оператором Казимира. При переходе в λ-представление оператор Казимира переходит в функцию, зависящую только от параметра орбиты: $H(l(q',\lambda))=-\kappa(\lambda)$, и уравнение Клейна–Фока в λ-представлении сводится к условию на спектр $\Lambda^2(\lambda)=\kappa(\lambda)$. Тогда базис решений уравнения Клейна–Фока на однородном пространстве можно записать в виде

$$F_\sigma(y)=\Delta^{-1/2}(q)D_q^\lambda(y),\quad \sigma=(q,\lambda),$$

$$D_q^\lambda(y)=\int_Q c(q',\lambda)D^\lambda_{q\bar{q}'}(x^{-1})d\mu(q'),\quad x=(y,h),\quad (20)$$

где функция $c(q',\lambda)$ с точностью до постоянного множителя определяется из системы уравнений (19). Подставив (20) в условие ортогональности (16) и воспользовавшись свойствами (8) и (9) матричных элементов λ-представления, получим условие нормировки

$$\int_Q \left|c(q',\lambda)\right|^2 d\mu(q')=\mathrm{Vol}_{\mathrm{H}},\quad \mathrm{Vol}_{\mathrm{H}}=\int_I d\mu_R(h),$$

где $d\mu_R(h)$ – правоинвариантная мера Хаара на подгруппе изотропии H.

Таким образом, полный набор решений уравнений Клейна–Гордона имеет вид

$$\varphi_{\lambda q}(y)=(2\omega(\lambda)\Delta(q))^{-1/2}D_q^\lambda(y),$$

$$\omega^2(\lambda)=\kappa(\lambda)+\xi R+m^2.$$

4. Обобщенная ζ-функция уравнения Клейна–Гордона

Рассмотрим обобщенную ζ-функцию оператора уравнения (12):

$$\zeta(s)=\int k_\sigma^{-s}d\mu(\sigma),$$

где k_σ – собственные значения оператора $\hat{F}$. Обобщенная ζ-функция $\zeta(s)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, регулярное в точке s=0, и может быть определена как интеграл по M от *локальной* ζ-функции:

$$\zeta(y,s)=\int k_\sigma^{-s}\overline{\varphi_\sigma(y,t)}\,\varphi_\sigma(y,t)d\mu(\sigma),$$

$$\zeta(s)=\sqrt{|g|}\int_P\zeta(y,s)d\mu(y),\quad (21)$$

где $\varphi_\sigma(y,t)$ – полный и ортогональный набор собственных функций оператора $\hat{F}$. В нашем случае уравнение на собственные функции оператора $\hat{F}$ сводится к (12). Тогда $k_\lambda=\kappa(\lambda)-\omega^2(\lambda)+m^2+\xi R$, а набор собственных функций определяется выражением

$$\varphi_\sigma(y,t)=(\sqrt{|g|}\Delta(q))^{-1/2}D_q^\lambda(y),\quad \sigma=(q,\lambda).\quad (22)$$

Подставим (22) в (21):

$$\zeta(y,s)=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dj_0}{2\pi}\int\chi(\lambda)k_{\lambda j_0}^{-s}d\mu(\lambda),$$

$$\chi(\lambda)=\int_Q\left|D_q^\lambda(y)\right|^2d\mu_0(q).\quad (23)$$

Функция $\chi(\lambda)$ не зависит от локальных координат на однородном пространстве и выражается через коэффициенты разложения $c(q,\lambda)$:

$$\chi(j)=\int_Q\left|c(q',\lambda)\right|^2d\mu_0(q').$$

Таким образом, локальная ζ-функция (23) не зависит от локальных координат на однородном пространстве, а определяется G-инвариантной метрикой и алгеброй Ли L.

5. Перенормировка тензора энергии-импульса скалярного поля

Рассмотрим эффективное действие W скалярного поля с лагранжианом (14):

$$W=i2\int D[\varphi]\exp(iS(\varphi))=\frac{i}{2}\ln\det\left(\frac{i}{2\pi\mu^2}\hat{F}\right),\quad (24)$$

где μ – нормировочная константа, не зависящая от метрики и имеющая размерность массы. Вариация эффективного действия (24) по метрике дает вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля:

$$\left\langle\hat{T}_{ij}\right\rangle=-\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta W}{\delta g_{ij}},\quad i,j=1,\ldots,m+1.\quad (25)$$

Основной задачей является проведение процедуры перенормировки и получение конечных значений вакуумных средних (25), характеризующих эффект поляризации вакуума гравитационным полем. Из выражения (25) следует, что задача сводится к нахождению перенормированного эффективного действия W_{ren}. В рамках ζ-регуляризации эффективное действие выражается через обобщенную ζ-функцию оператора $\hat{F}$:

$$W(s)=-\frac{i}{2}[\zeta'(s)+\zeta(s)\ln(-2\pi i\mu^2)],$$

$$W_{ren}=W(s)|_{s=0}.$$

Основную трудность представляет собой вычисление функциональных производных эффективного действия W_{ren} по метрике. Воспользуемся методом, предложенным в работе [6], когда сначала вычисляются функциональные производные по g_{ij} от эффективного действия, а уже потом берется аналитическое продолжение при s=0:

$$\left\langle\hat{T}_{ij}\right\rangle_{ren}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta W(s)}{\delta g_{ij}}|_{s=0}=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\frac{d}{ds}Z_{ij}(y,s)|_{s=0}+Z_{ij}(y,0)\ln(-2\pi i\mu^2)\right],\quad (26)$$

где функция $Z_{ij}(y,s)$ представляет собой аналитическое продолжение по переменной s от вариации ζ-функции $\zeta(s)$ по метрике:

$$Z_{ij}(y,s)=-\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta\zeta(y,s)}{\delta g^{ij}}\quad (27)$$

и в работе [6] носит название *ζ-функции тензора энергии-импульса*, определенного формулой (26).

Из (26) следует, что вычисление перенормированного значения тензора энергии-импульса сводится к поиску аналитического продолжения по s=0 производных от функции $Z_{ij}(y,s)$. Беря вариацию (27) от локальной дзета-функции, получим [6]:

$$Z_{ij}(y,s) = 2s\zeta_{ij}(y,s+1) - s\zeta(y,s)g_{ij},$$

$$\zeta_{ij}(y,s) \equiv \int k_\sigma^{-s} T_{ij}\{\overline{\varphi_\sigma},\varphi_\sigma\} d\mu(\sigma). \tag{28}$$

Так как мы рассматриваем ситуацию, когда применение метода обобщенной ζ-функции позволяет регуляризовать эффективное действие W_{ren}, то величины $\zeta(y,0)$ и $\zeta'(y,0)$ должны быть конечными:

$$\lim_{s\to 0} s\zeta'(y,s) = 0, \quad \lim_{s\to 0} s\zeta(y,s) = 0. \tag{29}$$

С учетом соотношения (29) подставим (28) в (26) и после ряда вычислений получим выражение для перенормированного тензора энергии-импульса на M:

$$\left\langle \widehat{T}_{ij} \right\rangle_{ren} = -i \begin{pmatrix} \zeta_{ij}(y,s+1) - \dfrac{1}{2} g_{ij}\zeta(y,s) + \\ +s[\zeta'_{ij}(y,s+1) + \\ +\zeta_{ij}(y,s+1)\ln(-2\pi i\mu^2)] \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Используя выражение для метрического тензора энергии-импульса скалярного поля [1, 2, 6] и учитывая, что ковариантная производная от $\zeta(y,s)$ равна нулю, найдем явное выражение для $\zeta_{ij}(y,s)$ в компонентах $\zeta_{ab}(y,s)=\zeta_{ij}(y,s)\eta_a^{\ i}(y,h)\eta_b^{\ i}(y,h)$:

$$\zeta_{ab}(y,s) = \overline{\zeta_{ab}(s)} + \frac{1}{2} g_{ab}\zeta(y,s-1) - \xi R_{ab}\zeta(y,s),$$

$$\overline{\zeta_{ab}(s)} = \int k_\sigma^{-s} \eta_{(a}\overline{\varphi_\sigma}\eta_{b)}\varphi_\sigma d\mu(\sigma).$$

Переходя в λ-представление для $\overline{\zeta_{ab}(s)}$ имеем:

$$\overline{\zeta_{ab}(s)} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{|g|}} \int_{-\infty}^{\infty} dj_0 \times$$

$$\times \int k_{jj_0}^{-s} \overline{c(q',j)} \{l_a(q',j), l_b(q',j)\}_+ c(q',j) d\mu(q) d\mu(j).$$

Подставляя выражение для $\zeta_{ij}(y,s)$ в (30) и переходя к компонентам $\hat{T}_{ab}=\hat{T}_{ij}(y)\eta_a^{\ i}(y,h)\eta_b^{\ i}(y,h)$ окончательно получим

$$\left\langle \widehat{T}_{ab} \right\rangle_{ren} =$$

$$= -i \begin{pmatrix} \overline{\zeta_{ab}(y,s+1)} - \xi R_{ab}\zeta(y,s) + \\ +s[\zeta'_{ab}(y,s+1) + \zeta_{ab}(y,s+1)\ln(-2\pi i\mu^2)] \end{pmatrix}_{s=0}.$$

Данное выражение для компонент перенормированного тензора энергии-импульса скалярного поля не зависит от выбора локальных координат и определяется алгебраическими характеристиками однородного пространства.

Выводы

При помощи метода орбит рассчитаны вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля и обобщенная дзета-функция, соответствующая уравнению Клейна–Гордона на однородных пространствах с инвариантной метрикой и нулевым дефектом.

Обобщение полученных результатов на случай однородных пространств ненулевого дефекта требует учета алгебры инвариантных операторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракты П691; П789 и госзадание «Наука» контракт № 1.604.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреев А.И. Поляризация вакуума на неунимодулярных группах Ли // Известия вузов. Сер. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 4. – С. 34–40.
2. Бреев А.И., Широков И.В., Магазев А.А. Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. – 2011. – Т. 167. – № 1. – С. 78–95.
3. Барановский С.П., Михеев В.В., Широков И.В. K-орбиты, тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах с группами преобразований Пуанкаре и де Ситтера // Известия вузов. Сер. Физика. – 2000. – Т. 47. – № 11. – С. 72–78.
4. Широков И.В. Координаты Дарбу на K-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.
5. Широков И.В. K-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений: Препринт. – Омск: ОмГУ, 1998. – 100 с.
6. Moretti V. Direct ζ-function approach and renormalization of one-loop stress tensors in curved spacetimes // Phys. Rev. D. – 1997. – V. 56. – № 12. – P. 7797–7818.

Поступила 07.06.2012 г.