запаздыванием, чем при непрерывных каналах без памяти. Это Свойство объясняется тем, что при интерполяционном приеме в момент времени t_m воспроизводятся прошлые значения x_τ процесса x_σ, которые не входят в текущие дискретные $\eta(t_m)$ и текущие непрерывные наблюдения z_{t_m} при непрерывном канале без памяти, и входят в текущие непрерывные наблюдения z_{t_m} при непрерывных наблюдениях с запаздыванием. Таким образом, имеет место пересчет величин $\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)$ и $\tilde{\Delta}_{11}^0(\tau,t_m-0)$ в $\Delta_{11}^0(\tau,t_m)$ и $\tilde{\Delta}_{11}^0(\tau,t_m)$ (см. (15) для $\Delta_{11}^0(\tau,t_m)$ и $\tilde{\Delta}_{11}^0(\tau,t_m)$) с различными коэффициентами, а более высокую эффективность непрерывных каналов с запаздыванием обеспечивают указанные свойства. Отсутствие непрерывной передачи соответствует случаю $\delta_c=0$. Так как $\lim\rho(t^*)=\tilde{\rho}(t^*)$ при $\delta_c\downarrow 0$, тогда из (13), (19), (20) для случая отсутствия непрерывных каналов $\delta_c=0$ имеют место свойства $\varepsilon_i(t_m;t^*)=\tilde{\varepsilon}_i(t_m;t^*)$ и $\mathrm{D}\Delta I_\tau^{t_m}(t^*)=\Delta\tilde{I}_\tau^{t_m}(t^*)$, физический смысл этих свойств очевиден.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.В37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с памятью при наличии бесшумной обратной связи // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 6–9.
2. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с запаздыванием // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 10–13.
3. Рожкова С.В. Оптимальная передача сигнала по совокупности непрерывного и дискретного каналов с памятью и запаздыванием // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 8–10.
4. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 6–10.
5. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.

Поступила 01.04.2013 г.

УДК 519.2

РАСПОЗНАВАНИЕ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ФИКСИРОВАННОЙ ПАМЯТЬЮ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача распознавания произвольного числа гипотез, когда ненаблюдаемый процесс является процессом с непрерывным временем, а наблюдаемый процесс представляет собой совокупность процессов с непрерывным и дискретным временем с фиксированной памятью произвольной кратностью.

Ключевые слова:
Стохастические системы, память, распознавание, отношение правдоподобия.

Key words:
Stochastic systems, memory, recognition, likelihood ratio.

1. Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbf{F},F=(\mathbf{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$ ненаблюдаемый n-мерный процесс x_t (полезный сигнал) и наблюдаемый l-мерный процесс z_t непрерывным временем определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = f(t,x_t,z,\theta)dt + \Phi_1(t,x_t,z,\theta)dw_t, \tag{1}$$

$$dz_t = h(t,x_t,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_N},z,\theta)dt + \Phi_2(t,z)dv_t, \tag{2}$$

а наблюдаемый q-мерный процесс $\eta(t_m)$ с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m,x_{t_m},x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_N},z,\theta) + \Phi_3(t_m,z,\theta)\xi(t_m), \quad m=0,1,\cdots, \tag{3}$$

где $0<\tau_N<...<\tau_1<t_m\leq t$. Параметр θ является идентификатором типа гипотезы и может принимать значения из множества $\Omega_\theta=\{\theta_0,\theta_1,...\underline{\theta_r\}}$ с априорными вероятностями $p_0(\theta_j)=\mathbf{P}\{\theta=\theta_j\}$, $j=\overline{0;r}$. Предполагается: 1) процессы w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2 и при всех $\theta\in\Omega_\theta$ коэффициенты уравнений (1), (2) удовлетворяют условиям [1], а $\theta\in\Omega_\theta$ неперывна по всем аргументам; 2) $\xi(t_m)$ – стандартная белая гауссовская последовательность размера r_3 с $\mathbf{M}\{\xi(t_m)|\theta=\theta_j\}=O$ и $\mathbf{M}\{\xi(t_m)\xi^T(t_m)|\theta=\theta_j\}=I\delta_{mk}$; 3) x_0, w_t, v_t, $\xi(t_m)$, θ статистически независимы; 4) $f(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$, $h(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\Phi_3(\cdot)$ являются неупреждающими функционалами от реализаций соответственно $z=z_0^t$ и $z=z_0^{t_m}$; 5) $Q(\cdot)=\Phi_1^T(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot)>0$, $V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot)>0$ при всех

$\theta\in\Omega_\theta$; 6) заданы начальные плотности $p_0(x|\theta_j)=\partial\mathbf{P}\{x_0\le x|\theta=\theta_j\}/\partial x$, $j=\overline{0;r}$.

Задача: по совокупности реализаций $z_0^t=\{z(\sigma):0\le\sigma\le t\}$ и $\eta_0^m=\{\eta(t_0),\eta(t_1),...,\eta(t_m)\}$ найти отношения правдоподобия $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ в задаче распознавания гипотез $H_j\{\theta=\theta_j\}$ и $H_j\{\theta=\theta_j\}$, $j=\overline{0;r}$, $\alpha=\overline{0;r}$.

2. Основные результаты

Метод нахождения $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ основан на формуле [2]

$$\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)=[p_0(\theta_\alpha)/p_0(\theta_j)]P_t()\theta_j:\theta_\alpha, \qquad (4)$$

которая связывает отношение правдоподобия и отношение апостериорных вероятностей гипотез

$$P_t(\theta_j:\theta_\alpha)=p_t(\theta_j)/p_t(\theta_\alpha), \qquad (5)$$

где

$$p_t(\theta_j)=\mathbf{P}\{\theta=\theta_j\,|z_0^t,\eta_0^m\},\quad j=\overline{0;r}. \qquad (6)$$

Теорема 1.

Апостериорные вероятности (6) гипотез $H_j\{\theta=\theta_j\}$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_t p_t(\theta_j)=p_t(\theta_j)[\overline{h(t,z\,|\theta_j)}-\overline{h(t,z)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z)}dt] \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$p_{t_m}(\theta_j)=[C(\eta(t_m),z\,|\theta_j)/C(\eta(t_m),z)]p_{t_m-0}(\theta_j), \qquad (8)$$

где

$$\overline{h(t,z\,|\theta_j)}=\mathbf{M}\{h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z,\theta)\,|\theta=\theta_j,z_0^t,\eta_0^m\}, \qquad (9)$$

$$\overline{h(t,z)}=\mathbf{M}\{h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z,\theta)\,|z_0^t,\eta_0^m\}=$$
$$=\sum_{j=0}^{r}\overline{h(t,z\,|\theta_j)}p_t(\theta_j),$$

$$C(\eta(t_m),z\,|\theta_j)=$$
$$=\mathbf{M}\{C(\eta(t_m),z,x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,\theta)\,|\theta=\theta_j,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\}, \qquad (10)$$

$$C(\eta(t_m),z)=\mathbf{M}\{C(\eta(t_m),z,x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,\theta)\,|z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\}=$$
$$=\sum_{j=0}^{r}C(\eta(t_m),z\,|\theta_j)p_{t_m-0}(\theta_j), \qquad (11)$$

$$C(\eta(t_m),z,x,\tilde{x}_N,\theta_j)=\left|V(t_m,z,\theta_j)\right|^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{matrix}-\dfrac{1}{2}[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j)]^T\times\\ \times V(t_m,z,\theta_j)[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j)]\end{matrix}\right\}, \qquad (12)$$

а $p_{t_m-0}(\theta_j)=\lim p_t(\theta_j)$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство:

$$p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=$$
$$=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x,\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N,\theta=\theta_j\,|z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}_N$$

на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ справедливо уравнение

$$d_t p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=L_{t,x}[p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)]dt+$$
$$+p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)[h(t,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j)-h(t,z)]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z)}dt], \qquad (13)$$

где $L_{t,x}[\cdot]$ – прямой оператор Колмогорова, соответствующий процессу x_t при $\theta=\theta_j$ [3]. Так как

$$p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=p_t(x;\tilde{x}_N\,|\theta_j)p_t(\theta_j), \qquad (14)$$

где

$$p_t(x;\tilde{x}_N\,|\theta_j)=$$
$$=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x,\tilde{x}_\tau^N\le\tilde{x}_N\,|\theta=\theta_j,z_0^t,\eta_0^m\}/\partial x\partial\tilde{x}_N, \qquad (15)$$

то интегрирование (13) по $\{x,\tilde{x}_N\}$ с учетом (14) дает (7). По формуле Байеса

$$p_{t_m}(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=$$
$$=\frac{\left[\begin{matrix}p(\eta(t_m)\,|x_{t_m}=x,\tilde{x}_\tau^N=\tilde{x}_N,\theta=\theta_j,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1})\times\\ \times p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N;\theta_j)\end{matrix}\right]}{\sum_{k=0}^{N}\left[\begin{matrix}\int p(\eta(t_m)\,|x_{t_m}=x,\tilde{x}_\tau^N=\tilde{x}_N,\theta=\theta_k,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1})\times\\ \times p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N;\theta_k)dxd\tilde{x}_N\end{matrix}\right]}, \qquad (16)$$

где $p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=\lim p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)$ при $t\uparrow t_m$. Из (3) с учетом Предположений 2), 3) следует

$$p(\eta(t_m)\,|x,\tilde{x}^N,\theta_j,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1})=$$
$$=\mathbf{N}\{\eta(t_m);g(t_m,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j),V(t_m,z,\theta_j)\}. \qquad (17)$$

Использование (17) в (16) с учетом (11), (12) дает

$$p_{t_m}(x;\tilde{x}_N;\theta_j)=$$
$$=\frac{C(\eta(t_m),z,x,\tilde{x}_N,\theta_j)}{C(\eta(t_m),z)}p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N;\theta_j). \qquad (18)$$

Интегрирование (18) по $\{x,\tilde{x}_N\}$ с учетом (10), (14) дает (8).

Следствие 1.

Для $p_t(\theta_j)$ справедлива формула

$$p_t(\theta_j)=p_{\tau_1-0}(\theta_j)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{matrix}\sum_{\tau_1\le t_i\le t}\ln\left[\dfrac{C(\eta(t_i),z\,|\theta_j)}{C(\eta(t_i),z)}\right]+\\ +\int_{\tau_1}^{t}[\overline{h(s,z\,|\theta_j)}-\overline{h(s,z)}]^T\times\\ \times R^{-1}(s,z)\left[dz_s-\dfrac{1}{2}\overline{h(s,z\,|\theta_j)}ds-\dfrac{1}{2}\overline{h(s,z)}ds\right]\end{matrix}\right\}. \qquad (19)$$

Доказательство:

Пусть $\tilde{p}_t(\theta_j)=\ln\{p_t(\theta_j)\}$. Дифференцирование по формуле Ито с учетом (7) дает для $t_m\le t<t_{m+1}$

$$d_t\tilde{p}_t(\theta_j)=[\overline{h(t,z\,|\theta_j)}-\overline{h(t,z)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)\left[dz_t-\frac{1}{2}\overline{h(t,z\,|\theta_j)}-\frac{1}{2}\overline{h(t,z)}dt\right]. \qquad (20)$$

Из (8) следует

$$\tilde{p}_{t_m}(\theta_j)=\tilde{p}_{t_m-0}(\theta_j)+\ln\frac{C(\eta(t_m),z\,|\theta_j)}{C(\eta(t_m),z)}. \qquad (21)$$

Так как $p_t(\theta_j)=\exp\{\tilde{p}_t(\theta_j)\}$, то (19) для $t\geq\tau_1$ следует из (20), (21).

Теорема 2.

Отношение правдоподобия $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ в задаче распознавания гипотез $H_j=\{\theta=\theta_j\}$ и $H_j=\{\theta=\theta_j\}$, $j=\overline{0;r}$, $\alpha=\overline{0;r}$ на интервалах $t_m\leq t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)=$$
$$=\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)[\overline{h(t,z|\theta_j)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}dt],\qquad(22)$$

с начальным условием

$$\Lambda_{t_m}(\theta_j:\theta_\alpha)=$$
$$=[C(\eta(t_m),z|\theta_j)/C(\eta(t_m),z|\theta_\alpha)]\Lambda_{t_m-0}(\theta_j:\theta_\alpha),\qquad(23)$$

где $\Lambda_{t_m-0}(\theta_j:\theta_\alpha)=\lim\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство:

Дифференцирование (5) по формуле Ито с учетом (7) дает уравнение

$$d_tP_t(\theta_j:\theta_\alpha)=P_t(\theta_j:\theta_\alpha)[\overline{h(t,z|\theta_j)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}dt].\qquad(24)$$

Использование (4) в (24) приводит к (22). Использование (8) в (5) с последующим использованием (4) дает (23).

Следствие 2.

Для $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ справедлива формула

$$\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)=\Lambda_{\tau_1-0}(\theta_j:\theta_\alpha)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{\tau_1\leq t_i\leq t}\ln\left[\dfrac{C(\eta(t_i),z|\theta_j)}{C(\eta(t_i),z|\theta_\alpha)}\right]+\\ \int\limits_{\tau_1}^{t}[\overline{h(s,z|\theta_j)}-\overline{h(s,z|\theta_\alpha)}]^T\times\\ \times R^{-1}(s,z)\left[dz_s-\dfrac{1}{2}\overline{h(s,z|\theta_j)}ds-\dfrac{1}{2}\overline{h(s,z|\theta_\alpha)}ds\right]\end{array}\right\}.\qquad(25)$$

Доказательство:

Представим уравнение (22) в виде

$$d_t\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)=\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)[\overline{h(t,z|\theta_j)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[\overline{h(t,z)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]dt+$$
$$+\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)[\overline{h(t,z|\theta_j)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z)}dt].\qquad(26)$$

Пусть

$$\tilde{\Lambda}_t(\theta_j:\theta_\alpha)=\ln\{\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)\}.\qquad(27)$$

Дифференцирование (27) по формуле Ито с учетом (26) дает для $t_m\leq t<t_{m+1}$

$$d_t\tilde{\Lambda}_t(\theta_j:\theta_\alpha)=[\overline{h(t,z|\theta_j)}-\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)\left[dz_t-\frac{1}{2}\overline{h(t,z|\theta_j)}dt-\frac{1}{2}\overline{h(t,z|\theta_\alpha)}dt\right].\qquad(28)$$

Из (23) следует

$$\tilde{\Lambda}_t(\theta_j:\theta_\alpha)=\tilde{\Lambda}_{t_m-0}(\theta_j:\theta_\alpha)+\ln\frac{C(\eta(t_m),z|\theta_j)}{C(\eta(t_m),z|\theta_\alpha)}.\qquad(29)$$

Так как $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)=\exp\{\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)\}$, то (25) для $t\geq\tau_1$ следует из (28), (29).

Заключение

Из Теорем 1, 2 следует, что эффективное вычисление $p_t(\theta_j)$ и $\Lambda_t(\theta_j:\theta_\alpha)$ реализуется при возможности эффективного вычисления $\overline{h(t,z|\theta_j)}$ и $C(\eta(t_m),z|\theta_j)$, которые согласно (9), (10), (15) определяются формулами

$$\overline{h(t,z|\theta_j)}=\int\ldots\int h(t,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j)p_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)dxd\tilde{x}_N,$$
$$C(\eta(t_m),z|\theta_j)=$$
$$=\int\ldots\int C(\eta(t_m),z,x,\tilde{x}_N,\theta_j)p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N|\theta_j)dxd\tilde{x}_N,$$

где условные апостериорные плотности $p_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)$ на интервалах $t_m\leq t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_tp_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)=L_{t,x}[p_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)]dt+$$
$$+p_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)[h(t,x,\tilde{x}_N,z,\theta_j)-\overline{h(t,z|\theta_j)}]^T\times$$
$$\times R^{-1}(t,z)[dz_t-\overline{h(t,z|\theta_j)}dt]\qquad(30)$$

с начальными условиями

$$p_{t_m}(x;\tilde{x}_N|\theta_j)=$$
$$=\frac{C(\eta(t_m),z,x,\tilde{x}_N,\theta_j)}{C(\eta(t_m),z|\theta_j)}p_{t_m-0}(x;\tilde{x}_N|\theta_j).\qquad(31)$$

Уравнение (30) следует в результате дифференцирования по формуле Ито соотношения

$$p_t(x;\tilde{x}_N|\theta_j)=p_t(x;\tilde{x}_N;\theta_j)/p_t(\theta_j).\qquad(32)$$

С учетом (15) и (13), а (31) следует из (8), (20), (32).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 14.B37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. Middleton D. Introduction to statistical communication theory. – New York: Mc Graw-Hill, 1960. – 1140 p.
3. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.

Поступила 04.04.2013 г.