УДК 519.25 (550.831.05)

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ В ВИДЕ СПЛАЙНА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.Н. Устинова, И.Г. Устинова

Томский политехнический университет
E-mail: igu@sibmail.com

Предложен метод выделения тренда автокорреляционной функции в виде сплайна первого порядка. На примере модельной сейсмической трассы и функции Бесселя показано, что предложенный метод дает лучшее приближение автокорреляционной функции, чем приближение, полученное с использованием стандартной формулы для оценивания функции автокорреляции.

Ключевые слова:
Автокорреляционная функция, тренд автокорреляционной функции, сплайн первого порядка, сейсмические данные, обработка сейсмической информации.

Key words:
Autocorrelation function, trend of the autocorrelation function, first-order spline, seismic data, processing of seismic data.

В рамках эргодичной и стационарной модели геофизического поля важнейшие сведения о свойствах сейсмического сигнала можно получить по автокорреляционной функции $R[\tau]$, энергетическому спектру $S[\omega]$, математическому ожиданию $M[x]$ [1]. Наиболее информативными для оценки свойств составляющих сейсмического сигнала и полей сейсмических параметров являются функция автокорреляции и энергетический спектр [2, 3]. Оценка функции автокорреляции определяется, согласно [4], выражением

$$\widehat{R}[\tau] = \frac{1}{n-|\tau|}\sum_{i=1}^{n-|\tau|}(y_i-\overline{y})(y_{i+\tau}-\overline{y}), \qquad (1)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – текущие значения геофизического поля F в i-й точке сейсмической трассы; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, τ – разность аргументов: $\tau = t_j - t_i$, $i, j = \overline{1,n}$. Анализ формы автокорреляционной функции (АКФ) нашел применение при решении следующих задач обработки сейсмических данных:

1. Оценка корреляционных свойств сигналов и помех.
2. Расчеты весовых функций и частотных характеристик оптимальных фильтров базируются на знании АКФ сигналов и помех [3].
3. Оценка разрешающей способности сейсмической записи [4].

Часто для оценки функции автокорреляции приходится использовать короткие отрезки сейсмических записей, поэтому вопрос о точности оценивания автокорреляционной функции имеет большое практическое значение. В данной статье выделен тренд функции автокорреляции в виде сплайна первого порядка.

Постановка задачи

Функция автокорреляции $R[\tau]$ стационарного случайного процесса является одной из его важнейших характеристик второго порядка [5]. Приведем описание математической модели процесса, которая будет исследована далее.

Пусть $y(t)$ – гауссовский стационарный случайный процесс с математическим ожиданием $M[y(t)]=0$ и функцией автокорреляции $R[\tau]=R[t_j-t_i]=M[y(t_i)y(t_i+\tau)]$. Пусть изучаемый процесс наблюдается на отрезке времени $[0;T]$, и моменты времени, в которые производятся измерения t_i, известны точно. Результатами измерений являются величины $y_i=y(t_i)$, $i=\overline{1,N}$. По результатам измерений $\{y_i, i=\overline{1,N}\}$ требуется построить оценку $\widehat{R}[\tau]$ функции корреляции $R[\tau]$ на интервале значений $[0;T]$ аргумента τ.

Решение задачи

Пусть на отрезке значений аргумента $[(k-1)\tau_0; k\tau_0]$ функция автокорреляции задана выражением

$$R[\tau] = R_{k-1}\frac{k\tau_0-\tau}{\tau_0} + R_k\frac{\tau-(k-1)\tau_0}{\tau_0}, \quad k=1,2,\ldots, \qquad (2)$$

т. е. функция автокорреляции имеет вид сплайна первого порядка. В этом случае решение задачи об аппроксимации функции автокорреляции состоит в нахождении оценок параметров $R_0, R_1, \ldots, R_n$, параметр R_0 можно определить как $\widehat{R}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2$.

Заметим, что последнее выражение является несмещенной оценкой R_0. Для нахождения оценки R_k рассмотрим выражение

$$S_k = \sum_{i,j\in M_k} y_i y_j \left[A\frac{k\tau_0-(t_j-t_i)}{\tau_0} + B\frac{(t_j-t_i)-(k-1)\tau_0}{\tau_0} \right],$$

где A, B – неизвестные параметры, которые подлежат определению, а i, j – номера моментов измерений, M_k – множество индексов (i, j), удовлетворяющих условию $M_k=\{(i, j):(k-1)\tau_0 \le t_j-t_i \le k\tau_0\}$. Усредняя S_k по реализациям процесса $y(t)$, получим

$$M[S_k] = \sum_{i,j\in M_k} R[t_j-t_i]\left[A\frac{k\tau_0-(t_j-t_i)}{\tau_0} + B\frac{(t_j-t_i)-(k-1)\tau_0}{\tau_0} \right]$$

или

$$M[S_k] = \int\limits_{(k-1)\tau_0}^{k\tau_0} R[\tau]\left[A\frac{k\tau_0-\tau}{\tau_0} + B\frac{\tau-(k-1)\tau_0}{\tau_0}\right]d\tau.$$

Подставляя в последнее выражение (2) и вычисляя полученный интеграл, будем иметь

$$M[S_k] = \frac{\tau_0}{6}[(2A+B)R_{k-1} + (A+2B)R_k].$$

Оценку $\hat{R}_k$ параметра R_k найдем из уравнения

$$S_k = \frac{\tau_0}{6}[(2A+B)R_{k-1} + (A+2B)R_k],$$

из которого получим

$$\sum_{i,j\in M_k} y_i y_j \left[A\frac{k\tau_0-(t_j-t_i)}{\tau_0} + B\frac{(t_j-t_i)-(k-1)\tau_0}{\tau_0}\right] = $$

$$= \frac{\tau_0}{6}[(2A+B)R_{k-1} + (A+2B)R_k],$$

откуда

$$\widehat{R}_k = -\frac{2A+B}{A+2B}\widehat{R}_{k-1} + \frac{6}{\tau_0}\frac{1}{A+2B}\times$$

$$\times\sum_{i,j\in M_k} y_i y_j \left[A\frac{k\tau_0-(t_j-t_i)}{\tau_0} + B\frac{(t_j-t_i)-(k-1)\tau_0}{\tau_0}\right].$$

Заметим, что полученное уравнение является разностным уравнением первого порядка с начальным условием $\widehat{R}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2$ [6]. Для того чтобы решение уравнения в конечных разностях было устойчивым, необходимо, согласно [7], чтобы

$$\left|\frac{2A+B}{A+2B}\right| < 1, \tag{3}$$

отсюда, используя графический метод, получаем следующее решение неравенства, представленное на рис. 1.

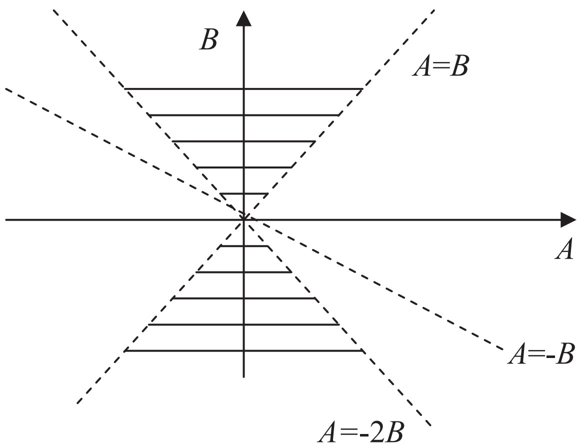

Рис. 1. *Решение неравенства (3) графическим методом*

Рассмотрим A и B такие, чтобы $\frac{2A+B}{A+2B} = 0$, например, $A = -\frac{1}{2}$, B=1, тогда

$$\widehat{R}_k = \frac{2}{\tau_0}\sum_{i,j\in M_k} y_i y_j \frac{3(t_j-t_i)-(3k-2)\tau_0}{\tau_0}, \tag{4}$$

причем $M[\hat{R}_k]=R_k$, то есть полученная оценка является несмещенной.

Имитационное моделирование полученных оценок

Все расчеты и построение графиков выполнены в системе Mathcad 2000 [8].

В качестве модели сейсмического сигнала возьмем функцию Бесселя первого рода нулевого порядка, реализация которой изображена на рис. 2, *а*, для которой построим функцию автокорреляции, используя выражение (1) (рис. 2, *б*) и выражение (4) в виде сплайна первого порядка (рис. 2, *в*).

Согласно [9] в приложениях при анализе временных последовательностей часто применяются стационарные случайные процессы с показательной функцией автокорреляции

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|}, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

Другим часто встречающимся типом АКФ стационарной случайной функции является показательно-косинусная автокорреляционная функция

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

где ω_0 – видимый период колебаний, а α – коэффициент затухания. На практике, как правило, выражение (6) используется для описания формы автокорреляционной функции сейсмических колебаний, представленных моделью случайного процесса. Третьей часто встречающейся автокорреляционной функцией стационарного случайного процесса является АКФ, задаваемая выражением

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \gamma\sin\omega_0|\tau|),$$

$$-\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0, \quad \gamma < \frac{\alpha}{\omega_0}. \tag{7}$$

Процесс с такой автокорреляционной функцией не имеет угловых точек, поэтому данная АКФ дифференцируема в среднем квадратическом смысле. Автокорреляционные функции (5)–(7) изображены на рис. 2, *е*. На рис. 2, *з* изображены все пять рассмотренные автокорреляционные функции (1, 4, 5–7). Из рис. 2 видно, что форму исходной функции (сигнала) отражает лучше автокорреляционная функция, построенная в виде сплайна первого порядка. Аналогичный вывод делаем на основе доверительного интервала для среднего значения функции автокорреляции. Если в качестве доверительной вероятности γ взять 0,95, то доверительный интервал для среднего значения АКФ, построенной по формуле (1), есть (–0,016; 0,072), для функции, полученной с использованием выражения (4), – (–0,056; 0,014).

Аналогичные расчеты были проведены и для модельного сейсмического сигнала, реализация которого изображена на рис. 2, *г*, для которого построена функция автокорреляции в виде сплайна первого порядка, рис. 2, *д*. На рис. 2, *ж* изображены три ранее рассмотренные модельные функции автокорреляции (5–7) и одна, построенная по формулам (4).

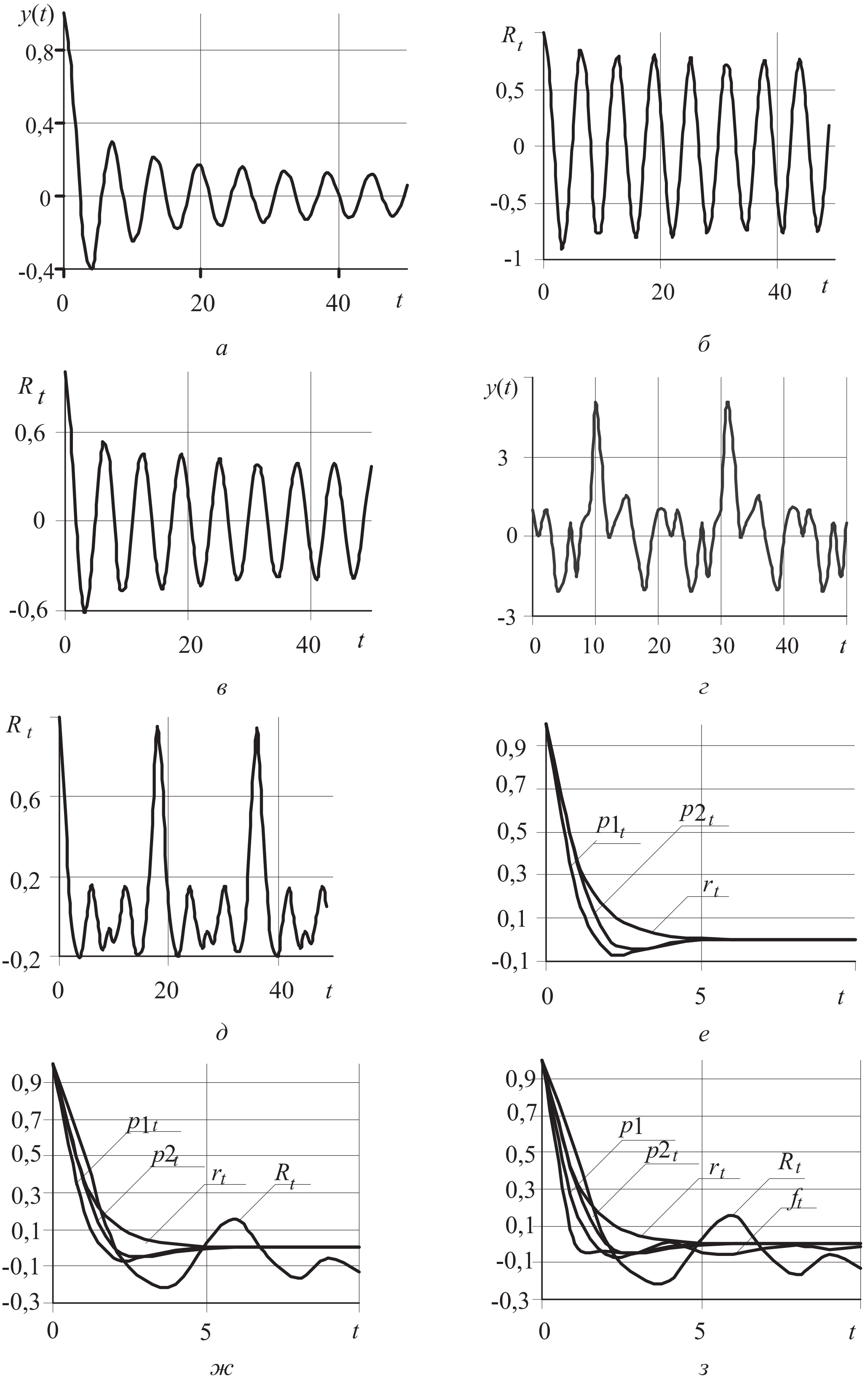

Рис. 2. *Графики моделей сейсмических сигналов, автокорреляционных функций: а) функция Бесселя первого рода нулевого порядка, г) реализация модельного сейсмического сигнала, б), в), д) функция автокорреляции, вычисленная с использованием выражения (1), (4), АКФ модельного сигнала в виде сплайна первого порядка, е) три модельные АКФ (формулы 5–7); $p1_t$ обозначена автокорреляционная функция (5), $p2_t$ – АКФ (6), и r_t – АКФ (7), ж) автокорреляционные функции (4–7) $p1_t$, $p2_t$, r_t и R_t – автокорреляционная функция, построенная по формуле (4), з) изображены все пять АКФ (1, 4, 5–7) $p1_t$, $p2_t$, r_t, R_t, f_t – обозначение автокорреляционной функции (1)*

В таблице приведена сумма квадратов отклонений оцененных значений функции автокорреляции от истинных. В верхней строке представлены номера расчетных формул, во второй – искомые значения сумм.

Таблица. *Значение суммы квадратов отклонений истинных значений функции автокорреляции от оценок, найденных по формулам (4)–(7)*

Номер формулы	4	5	6	7
Значение суммы	0,054	0,227	0,132	0,217

Из приведенной таблицы можно сделать вывод, что наименьшее значение суммы получается при оценивании функции автокорреляции сплайном первого порядка.

Выводы

Выполнен расчет коэффициентов сплайна первого порядка в приложении к оценке функции автокорреляции. Возможности предложенного метода апробированы на модельном сейсмическом сигнале и на модели, применяемой для аппроксимации сейсмических сигналов. В результате проведенного исследования установлено, что автокорреляционная функция, построенная в виде сплайна первого порядка, лучше отражает форму исходного процесса, нежели модельные автокорреляционные функции. Построенные доверительные интервалы для оценки математического ожидания автокорреляционной функции также свидетельствуют о более точном приближении в виде сплайна, чем в опубликованных работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордин В.Н., Бабаева Т.Н., Михайлов В.О. О статистической параметризации аномальных потенциальных полей // Геофизический журнал. – 1984. – Т. 6. – № 2. – С. 55–63.
2. Устинова В.Н., Устинова И.Г. Статистическая параметризация симметричных геофизических объектов // Известия ТПУ. – 2003. – № 5. – С. 36–41.
3. Устинова В.Н., Устинова И.Г. Дискретные иерархические системы в геофизике // Известия ТПУ. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 91–97.
4. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
5. Идрисов Ф.Ф., Устинова И.Г. Оценка функции корреляции стационарного случайного процесса при случайном числе измерений // Экономика, технология, предпринимательство. – Вып. 1. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. – С. 75–79.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. – М.: Наука, 1978. – 831 с.
7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 375 с.
8. Дьяконов В. Mathcad 2000. – СПб.: Изд-во «Питер», 2001. – 592 с.
9. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 642 с.

Поступила 07.11.2012 г.