УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ ($m<n$)

Е.Т. Ивлев, М.А. Аль-Хассани, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: eam@tpu.ru

Доказывается, что с отображением аффинного и проективного пространств инвариантным образом определяются отображения аффинного пространства в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства.

Ключевые слова:
Дифференцируемое отображение, многомерные аффинные и проективные пространства.
Key words:
Differentiable mapping, multidimensional affine and projective spaces.

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена изучению дифференцируемого отображения аффинного Q_m и проективного P_n пространств при $m<n$.

В данной статье, как и в [1], решается задача об инвариантном определении отображений аффинного пространства Q_m в многообразия M^{2n-1} вырожденных и M^{2n} невырожденных нуль-пар проективного пространства P_n.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приводится аналитический аппарат, связанный с определением отображения $V_{m,n}:Q_m \to P_n(m<n)$. Во втором разделе доказываются теоремы об инвариантном определении дифференцируемых отображений $f_m^{2n-1}:Q_m \to M^{2n-1}$ и $f_m^{2n}:Q_m \to M^{2n}(m<n)$ с заданной в текущей точке $B \in Q_m$ оснащающей $(n-m)$-плоскости $L_{n-m} \subset P_n$ к m-поверхности S_m в соответствующей при отображении $V_{m,n}(m<n)$ точке $A_0 \in P_n$. Третий раздел посвящен инвариантному определению оснащающей $(n-m)$-плоскости L_{n-m}.

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а встречающиеся функции предполагаются функциями класса C^∞. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–9].

1. Аналитический аппарат

1.1. Пусть задано m-мерное аффинное пространство Q_m, отнесенное к подвижному аффинному реперу $Q=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{B} = \theta^a \bar{\varepsilon}_a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b \bar{\varepsilon}_b,$$

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \quad D\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b, \quad (a,b,c=\overline{1,m}). \tag{1}$$

1.2. Рассмотрим n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенное к подвижному эквипроективному реперу $P=\{\bar{A}_I\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}_I = \omega_I^J \bar{A}_J, \ D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \ (I,J,K,L=\overline{0,n}). \tag{2}$$

Здесь предполагается, что линейно независимые аналитические точки $\bar{A}_K \in P_n$ удовлетворяют условию:

$$[\bar{A}_0 \bar{A}_1 .... \bar{A}_n] = 1, \tag{3}$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек $\bar{A}_K$ равно 1. Из (2) и (3) получаем

$$\omega_K^K \equiv \omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0.$$

1.3. Будем рассматривать дифференцируемое отображение

$$V_{m,n} : Q_m \to P_n \tag{4}$$

аффинного Q_m и проективного P_n пространств. Реперы Q и P выбираются так, что дифференциальные уравнения отображения (4) принимают вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad (i,j,k=\overline{1,n}). \tag{5}$$

Здесь величины A_a^i с учетом (1) и (2) являются компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта первого порядка

$$\Gamma_1 = \{A_a^i\}. \tag{6}$$

отображения (5) в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 3] и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b,$$

$$\Omega_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0, \quad A_{[ab]}^i = 0. \tag{7}$$

Заметим, что геометрически отображение (4) направление $u=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}u^a \in Q_m$ в точке $B \in Q_m$ переводит в направление

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)x^i = V_{m,n} u \tag{8}$$

пространства P_n в соответствующей точке $A_0 \in P_n$.

В данной статье в случае $m<n$, как и в статье [1] в случае $m=n$, решается задача о нахождении полей геометрических образов, определяемых геометрическим объектом (6) и внутренним фундаментальным геометрическим объектом второго порядка

$$\Gamma_2 = \{A_a^i, A_{ab}^i\}, \tag{9}$$

компоненты которого удовлетворяют дифференциальными уравнениям (7) и уравнениям

$$dA_{ab}^i + A_{ab}^j \Omega_j^i - A_{cb}^i \theta_a^c - A_{ac}^i \theta_b^c +$$
$$+ A_b^j (A_a^i \delta_j^l + A_a^l \delta_j^i) \omega_l^0 = A_{abc}^i \theta^c,$$

$$A_{[abc]}^i = 0, \quad (a,b,c=\overline{1,m}; \quad i,j,l=\overline{1,n}). \tag{10}$$

2. Случай отображения $V_{m,n}(m<n)$

В этом разделе будет использована следующая система индексов

$$a,b,c,q=\overline{1,m};\quad i,j,k=\overline{1,n};\quad I,J,K=\overline{0,n};$$
$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}. \tag{11}$$

2.1. Заметим, что в рассматриваемом случае ($m<n$) отображение (5) является инъективным отображением. При этом точка $A_0\in P_n$ как образ точки $B\in Q_m$ описывает m-поверхность S_m в P_n, когда точка B пробегает пространство Q_m. Обозначим L_m m-плоскость, касательную к S_m в точке A_0, и канонизируем проективной репер P пространства P_n так, чтобы

$$L_m=(A_0,A_1,......,A_m). \tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_s=(\bar{X}_0,\bar{X}_1,...,\bar{X}_s)$ обозначается s-плоскость $L_s\subset P_n$, проходящая через линейно независимые аналитические точки $\bar{X}_0,\bar{X}_1,...,\bar{X}_s$.

По аналогии с [4] с учетом (2), (5), (7)–(12) получаем

$$A_0^{\hat{\alpha}}=0\Rightarrow\omega_0^{\hat{\alpha}}=0,\quad \omega_0^{\alpha}=A_a^{\alpha}\theta^a,$$
$$dA_a^{\alpha}+A_a^{\beta}\,\Omega_{\beta}^{\alpha}-A_b^{\alpha}\,\theta_a^b=A_{ab}^{\alpha}\,\theta^b,$$
$$A_a^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}}=A_{ab}^{\hat{\alpha}}\theta^b,\ \ dA_{ab}^{\alpha}+A_{a\,b}^{\beta}\,\Omega_{\beta}^{\alpha}-A_{cb}^{\alpha}\,\theta_a^c-A_{ac}^{\alpha}\,\theta_b^c+$$
$$+(A_a^{\alpha}A_b^{\gamma}+A_a^{\gamma}A_b^{\alpha})\omega_{\gamma}^0+A_a^{\beta}A_{\beta b}^{\hat{\gamma}}\omega_{\hat{\gamma}}^{\alpha}=A_{abc}^{\alpha}\,\theta^c,$$
$$A_{[ab]}^{\alpha}=0,\quad A_{a[bc]}^{\alpha}=0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что с инъективным отображением (5) ассоциируется отображение

$$V_{m,m}:Q_m\to L_m. \tag{14}$$

Будем предполагать, что это отображение является невырожденным (биективным), т. е. $\det[A_a^{\alpha}]\neq 0$. Тогда можно ввести в рассмотрение величины B_{α}^a по формулам

$$B_{\alpha}^a A_a^{\beta}=\delta_{\alpha}^{\beta},\quad B_{\alpha}^a A_b^{\alpha}=\delta_b^a. \tag{15}$$

Из дифференциальных уравнений (13) с учетом (15) получаем

$$dB_{\alpha}^a+B_{\alpha}^b\theta_b^a-B_{\beta}^a\Omega_{\alpha}^{\beta}=B_{\alpha c}^a\theta^c,\quad \theta^a=B_{\alpha}^a\omega_0^{\alpha},$$
$$B_{\alpha c}^b=-A_{ac}^{\beta}B_{\alpha}^a B_{\beta}^b,$$
$$\omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\omega_0^{\beta}=\tilde{A}_{\alpha b}^{\hat{\alpha}}\theta^b\Rightarrow A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}=$$
$$=A_{ab}^{\hat{\alpha}}B_{\alpha}^a B_{\beta}^b\Rightarrow A_{[\alpha\beta]}^{\hat{\alpha}}=0,$$
$$A_{[abc]}^{\hat{\alpha}}=0\,,\ A_{ab}^{\hat{\alpha}}=\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}A_a^{\alpha}A_b^{\beta},$$
$$\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha b}^{\hat{\alpha}}B_{\beta}^b,\quad d\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}+\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\beta}}\Omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}-$$
$$-\tilde{A}_{\gamma\beta}^{\hat{\alpha}}\omega_{\alpha}^{\gamma}-\tilde{A}_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}}\omega_{\beta}^{\gamma}=\tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}}\omega_0^{\gamma},$$
$$\tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha b\gamma}^{\hat{\alpha}}B_{\beta}^b+A_{\alpha b}^{\hat{\alpha}}B_{\beta\gamma}^b,\quad \tilde{A}_{[\alpha\beta\gamma]}^{\hat{\alpha}}=0. \tag{16}$$

2.2. Обозначим $L_{n-m}(n>m)$ оснащающую (нормальную) $(n-m)$-плоскость к m-поверхности S_m в точке $A_0\in S_m$, соответствующую точке $B\in Q_m$ при отображении (14):

$$L_{n-m}\cap L_m=A_0,L_{n-m}\cup L_m=P_n.$$

Проективный репер P пространства P_n канонизируем так, чтобы

$$L_{n-m}=(\bar{A}_0,\bar{A}_{m+1},\ldots,\bar{A}_n). \tag{17}$$

Из дифференциальных уравнений (2) с учетом (15)–(17) получаются дифференциальные уравнения:

$$\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}=A_{\hat{\alpha}a}^{\alpha}\,\theta^a\Rightarrow\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}=\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha}\omega_0^{\beta}\Rightarrow\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha}=A_{\hat{\alpha}a}^{\alpha}B_{\beta}^a,$$
$$d\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha}+\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}^{\gamma}\omega_{\gamma}^{\alpha}-\tilde{A}_{\hat{\alpha}\gamma}^{\alpha}\,\omega_{\beta}^{\gamma}-A_{\hat{\beta}\beta}^{\alpha}\Omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}-\delta_{\beta}^{\alpha}\,\omega_{\hat{\alpha}}^0=\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta\gamma}^{\alpha}\,\omega_0^{\gamma},$$
$$\tilde{A}_{\hat{\alpha}[\beta\gamma]}^{\alpha}=0. \tag{18}$$

В соответствии с [6] и с учетом (17) заключаем, что аффинному пространству Q_m в соответствующем проективном пространстве отвечает многообразие $E(0;n-m;m)$, элемент которого состоит из точки A_0, $(n-m)$-плоскости L_{n-m} и m-плоскости L_m. Поэтому с учетом (18), [5] и [6] заключаем, что каждой точке $B\in Q_m$ в проективном пространстве P_n отвечает $(n-m-1)$-плоскость $\tilde{L}_{n-m-1}\subset L_{n-m}$, которая в терминах проективного репера P определяется уравнениями

$$x^{\beta}=0,\quad mx^0+\tilde{A}_{\hat{\alpha}\alpha}^{\alpha}x^{\hat{\alpha}}=0. \tag{19}$$

В соответствии с определением 1 в [6] эта $(n-m-1)$-плоскость называется полярной $(n-m-1)$-плоскостью. Из (18) следует, что система величин $\tilde{A}_{\hat{\alpha}\alpha}^{\alpha}$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$d\tilde{A}_{\hat{\alpha}\alpha}^{\alpha}-m\omega_{\hat{\alpha}}^0=A_{\hat{\alpha}\alpha\beta}^{\alpha}\omega_0^{\beta}\ \text{(по } \alpha \text{ суммировать).} \tag{20}$$

Проведем такую канонизацию проективного репера P пространства P_n, при которой

$$\tilde{A}_{\hat{\alpha}\alpha}^{\alpha}=0. \tag{21}$$

Из дифференциальных уравнений (20) с учетом (21) получаются следующие дифференциальные уравнения

$$\omega_{\hat{\alpha}}^0=\tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}\omega_0^{\beta},\ \tilde{A}_{\hat{\alpha}\beta}=-\frac{1}{m}\tilde{A}_{\hat{\alpha}\alpha\beta}^{\alpha}. \tag{22}$$

В соответствии с [7] из дифференциальных уравнений (22) заключаем, что канонизация репера P типа (21) существует в точке $B\in Q_m$. Геометрически эта канонизация с учетом (19) означает, что

$$\tilde{L}_{n-m-1}=(\bar{A}_{m+1},\bar{A}_{m+2},\ldots,\bar{A}_n). \tag{23}$$

2.3.1. Заметим с учетом (14) и (17), что геометрически невырожденное отображение $V_{m,m}:Q_m\to L_m$ каждое направление $u=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}u^a\in Q_m$ переводит в направление $x\in P_n$:

$$x=(\bar{A}_0,\bar{A}_{\alpha})x^{\alpha}=\{V_{m,m}u\cup L_{n-m}\}\cap L_m.$$

Поэтому в соответствии с [1] и с учетом (15) можно ввести в рассмотрение величины

$$G_{\alpha\beta}^{\gamma}=A_{ab}^{\gamma}B_{\alpha}^a B_{\beta}^b,\quad G_{\alpha}=G_{\alpha\beta}^{\beta}, \tag{24}$$

которые в силу (13) и (18) удовлетворяют дифференциальным уравнениям [1]:

$$dG^{\gamma}_{\alpha\beta}+G^{\sigma}_{\alpha\beta}\Omega^{\gamma}_{\sigma}-G^{\gamma}_{\sigma\beta}\Omega^{\sigma}_{\alpha}-G^{k}_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\beta}+$$
$$+(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta}+\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta})\omega^{0}_{\sigma}=G^{\gamma}_{\alpha\beta c}\theta^{c},$$
$$dG_{\alpha}-\Omega^{\beta}_{\alpha}G_{\beta}+(m+1)\omega^{0}_{\alpha}=G_{\alpha c}\theta^{c},$$
$$G^{\gamma}_{\alpha\beta c}=-A^{\gamma}_{cbq}B^{a}_{\alpha}B^{b}_{\beta}-A^{\gamma}_{cb}B^{a}_{\alpha q}B^{b}_{\beta}-A^{\gamma}_{ab}B^{a}_{\alpha}B^{b}_{\beta q}\,, \qquad (25)$$

Каждой точке $B\in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставим гиперплоскость y, проходящую через $(n-m)$-плоскость L_{n-m}, которую в терминах проективного репера P с учетом (17) зададим уравнением:

$$y_{\alpha}x^{\alpha}=0. \qquad (26)$$

Проведем для этой гиперплоскости рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в [1] для гиперплоскости (17) и воспользуемся соотношениями (13)–(16). Тогда получим, что каждой гиперплоскости (26), проходящей через $(n-m)$-плоскость L_{n-m} и отвечающей точке $B\in Q_m$ в пространстве P_n, соответствует гиперконус $\tilde{K}^2_{n-1}(y)$ с вершиной L_{n-m}, определяемый уравнением

$$\tilde{K}^2_{n-1}(y)\Leftrightarrow y_{\gamma}G^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0, x^{\hat{\alpha}}=0.$$

В силу (12) определяется нижеследующий конус

$$\tilde{K}^2_{m-1}=\tilde{K}^2_{n-1}\cap L_m\Leftrightarrow y_{\gamma}G^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0.$$
$$\tilde{K}^2_{m-1}=\tilde{K}^2_{n-1}\cap L_m\Leftrightarrow y_{\gamma}G^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0. \qquad (27)$$

Точке $B\in Q_m$ в соответствующей m-плоскости $L_m\subset P_n$ сопоставим точку $Z=z_0\bar{A}_0+z^{\alpha}\bar{A}_{\alpha}$. Полярой этой точки относительно конуса $\tilde{K}^2_{m-1}\in L_m$ в силу (27) является $(m-1)$-плоскость $\tilde{y}=L_{m-1}(y)\in L_m$, определяемая уравнениями:

$$\tilde{y}=L_{m-1}(y)\Leftrightarrow y_{\gamma}G^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\alpha}z^{\beta}=0,\ (z^{\beta}\text{ фиксированы}). \qquad (28)$$

Таким образом, с учетом (15), (27) и (28) заключаем, что каждой точке $B\in Q_m$ отвечает центропроективное преобразование

$$\Pi(\bar{Z})=\{z^{\beta}G^{\gamma}_{\alpha\beta}\} \qquad (29)$$

m-плоскости L_m в себя с центром в точке $A_0\in P_n$, которое $(m-1)$-плоскость $y\cap L_{m-1}$ переводит в $(m-1)$-плоскость $\tilde{y}\in L_m$. Из (29) замечаем, что точке $B\in Q_m$ в m-плоскости L_m отвечает $(m-1)$-плоскость

$$\tilde{L}_{m-1}=\{Z\in L_m\,|\,\Pi(\bar{Z})=0\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z^0-G_{\alpha}z^{\alpha}=0\,,\ z^{\hat{\alpha}}=0, \qquad (30)$$

которая в общем случае не проходит через точку A_0.

Таким образом, с учетом (30) и (23) доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Каждой $(n-m)$-плоскости L_{n-m}, соответствующей точке $B\in Q_m$, с отображением $V_{m,n}:Q_m\to P_n(m<n)$ инвариантным образом ассоциируется отображение $f_m^{2n-1}:Q_m\to M^{2n}$ аффинного пространства Q_m в многообразие M^{2n} всех невырожденных нуль-пар $\{A_0,L_{n-1},A_0\notin L_{n-1}\}$, где

$$L_{n-1}=\tilde{L}_{m-1}\cup\tilde{L}_{n-m-1}\Leftrightarrow z^0-G_{\alpha}z^{\alpha}=0\,. \qquad (31)$$

2.3.2. Проводится такая канонизация проективного репера P пространства P_n в точке $B\in Q_m$, при которой

$$G_{\alpha}=0. \qquad (32)$$

Из (25) с учетом (1), (22) и (32) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega^0_{\alpha}=A_{\alpha a}\theta^a\,,\quad A_{\alpha a}=\frac{1}{m+1}G_{\alpha a}\,,$$
$$dA_{\alpha a}-A_{\beta a}\Omega^{\beta}_{\alpha}-A_{\alpha\beta}\Omega^{\beta}_{a}-A_{\alpha b}\theta^{b}_{a}=-A^{0}_{\alpha ab}\theta^{b}. \qquad (33)$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [7] свидетельствуют о существовании канонизации проективного репера P типа (32). Геометрически эта канонизация с учетом (31) означает, что $L_{n-1}=(\bar{A}_1,\bar{A}_2,...,\bar{A}_n)$. С помощью величин $A_{\alpha a}$, A^{β}_{a} и $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ с учетом (33), (15), (24) и (32) в точке $B\in Q_m$ рассмотрим следующие величины

$$g_{ab}=\frac{1}{2}A_{\alpha(a}A^{\alpha}_{b)},\quad \det[g_{ab}]\neq 0,$$
$$g_{[ab]}=0,\quad g_{ab}g^{b\gamma}=\delta^{\gamma}_{a}\,,$$
$$C^{\beta}_{\alpha}=A_{\alpha(a}A^{\beta}_{b)}g^{ab},\quad c_{\alpha}=G^{\gamma}_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\gamma}\,. \qquad (34)$$

Из дифференциальных уравнений (25), (33), (7) и (16) получаются следующие дифференциальные уравнения в точке $B\in Q_m$, которым удовлетворяют величины (34):

$$dg_{ab}-g_{ac}\theta^{c}_{b}-g_{bc}\theta^{c}_{a}=g_{abc}\theta^{c}\,,$$
$$dg^{ab}+g^{cb}\theta^{a}_{c}+g^{ac}\theta^{b}_{c}=g^{ab}_{c}\theta^{c}\,,$$
$$dC^{\beta}_{\alpha}+C^{\gamma}_{\alpha}\Omega^{\beta}_{\gamma}-C^{\beta}_{\gamma}\Omega^{\gamma}_{\alpha}=C^{\beta}_{\alpha a}\theta^{a},\ dc_{\alpha}-c_{\gamma}\Omega^{\gamma}_{\alpha}=c_{\alpha a}\theta^{a}.$$

Так же, как и в [1, (33)–(45)], где вместо индексов i, j, k надо иметь в виду индексы $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m}$, получаем в силу (17), что с системой величин ассоциируется в точке $B\in Q_m$ гиперплоскость $^*L_{n-1}\ni A_0$, $^*L\subset L_{n-m}$, определяемая уравнением:

$$\overset{*}{L}_{n-1}:c_{\alpha}x^{\alpha}=0. \qquad (35)$$

Таким образом, с учетом (35) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Каждой $(n-m)$-плоскости L_{n-m} в точке $B\in Q_m$ с отображением $V_{m,n}:Q_m\to P_n(m<n)$ инвариантным образом ассоциируется отображение $f_m^{2n-1}:Q_m\to M^{2n-1}$ аффинного пространства Q_n в многообразие M^{2n-1} всех вырожденных нуль-пар $\{A_0;{}^*L_{n-1}\}$:, $A_0\in{}^*L_{n-1}\subset P_n$.

3. Инвариантное оснащение

В этом пункте будет инвариантным образом определена оснащающая $(n-m)$-плоскость (17) в точке $A_0\in S_m\subset P_n$, соответствующей точке $B\in Q_m$ при отображении (14).

3.1. В соответствии с [5] с помощью величин $\tilde{A}^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ в (16) в точке $A_0\in S_m\subset P_n$, отвечающей точке $B\in Q_m$, рассмотрим следующие симметрические величины:

$$\tilde{A}^{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\ldots\hat{\alpha}_m}=\frac{1}{m!}\tilde{A}^{(\hat{\alpha}_1}_{1[1}\tilde{A}^{\hat{\alpha}_2}_{1212}\ldots\tilde{A}^{\hat{\alpha}_m)}_{1m1m]}. \qquad (36)$$

Здесь, как обычно, символ () означает симметрирование, а символ [] – альтернирование по соответствующим индексам, причем индексы $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,...\hat{\alpha}_m$ изменяются по закону:

$$\widehat{\alpha}_1,\widehat{\alpha}_2,\ldots\widehat{\alpha}_m=\overline{m+1,\ldots,n}.$$

Из (16) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (36):

$$d\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2\ldots\widehat{\alpha}_m}+\tilde{A}^{\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}_2\ldots\widehat{\alpha}_m}\Omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\widehat{\alpha}}+\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}_3\ldots\widehat{\alpha}_m}\Omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\widehat{\alpha}}+\ldots+$$
$$+\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\ldots\widehat{\alpha}_{m-1}\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}}\Omega^{\widehat{\alpha}_m}_{\widehat{\alpha}}=\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2\ldots\widehat{\alpha}_m}_{\beta}\omega^{\beta}_0. \tag{37}$$

Здесь явный вид величин, стоящих при ω_0^β, для нас несущественный. Заметим с учетом [5], что величины (36) определены при условии, если числа m и n удовлетворяют неравенствам

$$m+2<n\le\frac{m(m+3)}{2}. \tag{38}$$

3.2. С помощью величин (36) в точке $B\in Q_m$ проведем такую канонизацию проективного репера P пространства P_n, при которой [5]:

$$\tilde{A}^{\overbrace{\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}\ldots\widehat{\alpha}}^{m-1}\hat{\beta}}=0,\quad \tilde{A}^{\overbrace{\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}\ldots\widehat{\alpha}}^{m}}\ne 0,\quad \tilde{A}\ne 0,\quad (\widehat{\alpha}\ne\hat{\beta}). \tag{39}$$

Здесь $\tilde{A}$ – определитель порядка $(n-m)^2$, имеющий вид:

$$\tilde{A}=\begin{vmatrix} M_{m+1} & M^{m+1}_{m+1,m+2} & M^{m+1}_{m+1,m+3} & \ldots & M^{m+1}_{m+1,n-1} & M^{m+1}_{m+1,n} \\ M^{m+2}_{m+2,m+1} & M_{m+2} & M^{m+2}_{m+2,m+3} & \ldots & M^{m+2}_{m+2,n-1} & M^{m+2}_{m+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M^{n}_{n,m+1} & M^{n}_{n,m+2} & M^{n}_{n,m+3} & \ldots & M^{n}_{n,n-1} & M_n \end{vmatrix}, \tag{40}$$

где $M_{\widehat{\alpha}}=\|\tilde{A}^{\widehat{\alpha}\ldots\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\gamma}\|$, $(\alpha\ne\widehat{\beta},\widehat{\gamma})$; (индекс $\widehat{\alpha}$ фиксирован), а матрица $M^{\widehat{\gamma}}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}=\|A^{\widehat{\alpha}\ldots\widehat{\alpha}}\|$ состоит из одного ненулевого элемента, принадлежащего строке с номером $\widehat{\beta}$ и столбцу с номером $\widehat{\gamma}$. Заметим с учетом (39) и (41), что определитель $\tilde{A}$ в общем случае не равен нулю в точке $B\in Q_m$. Поэтому в этой точке в силу (38) и (40) получаем с учетом (2) следующие дифференциальные уравнения

$$\omega^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}=A^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}\gamma}\omega^{\gamma}_0,$$
$$dA^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}\gamma}+A^{\hat{\gamma}}_{\widehat{\alpha}\gamma}\Omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\gamma}}-A^{\hat{\beta}}_{\hat{\gamma}\gamma}\Omega^{\hat{\gamma}}_{\widehat{\alpha}}=A^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}\gamma\beta}\omega^{\beta}_0,\quad (\widehat{\alpha}\ne\hat{\beta}\ne\hat{\gamma}). \tag{41}$$

Здесь явный вид величины, состоящих при ω_0^β, для нас несущественный.

В соответствии с [7] дифференциальные уравнения (41) свидетельствуют о существовании канонизации репера P типа (39).

3.3. Точке $B\in Q_m$ в соответствующем пространстве P_n сопоставим гиперплоскость $L_{n-1}(x)\supset L_m$, определяемую в терминах проективного репера P пространства P_n уравнением:

$$L_{n-1}(x)\Leftrightarrow x_{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\alpha}}=0. \tag{42}$$

Из (16), (2), (36) и (42) в соответствии с [5] получаем, что множество всех гиперплоскостей L_{n-1}, содержащих L_m и бесконечно близкие к L_m первого порядка вдоль соответствующих фокальных [7, 8] направлений в точке $A_0\in S_m$, определяет в P_n алгебраический гиперконус Φ_{n-1} порядка m с вершиной L_m. Этот гиперконус, в [9, 8] называемый фокальным, определяется уравнением

$$\Phi^m_{n-1}\Leftrightarrow\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2\ldots\widehat{\alpha}_m}x_{\widehat{\alpha}_1}x_{\widehat{\alpha}_2}\cdots x_{\widehat{\alpha}_m}=0. \tag{43}$$

Заметим, что этот гиперконус определяется при всех m и n, удовлетворяющих с учетом (36) неравенствам (38).

3.4. Обозначим $W^m_{n-1,m}$ систему линейно независимых гиперплоскостей $y^\beta y^{\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}$, проходящих через L_m и не принадлежащих гиперконусу Φ^m_{n-1}. В соответствии с [5] эта система гиперплоскостей называется основной относительно Φ^m_{n-1}, если линейным полюсом (полюсом порядка $m-1$) каждой гиперплоскости $y^{\widehat{\beta}}$ относительно Φ^m_{n-1} является $(m+1)$-плоскость, проходящая через L_m и принадлежащая всем остальным гиперплоскостям системы W^m_{n-1}. По аналогии с [5] из (43) получаем, что система W^m_{n-1} будет основной тогда и только тогда, когда величины $y^{\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}$ удовлетворяют системе алгебраических $(n-m)$ уравнений

$$\tilde{A}^{\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2\ldots\widehat{\alpha}_m}y^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}_1}y^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}_2}\cdots y^{\hat{\beta}}_{\widehat{\alpha}_m}=0,\quad (\beta\ne\gamma). \tag{44}$$

Как и в [5], показывается, что система (44) имеет в общем случае конечное число решений относительно $y^{\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}$. Геометрически это в силу (40) означает, что гиперплоскости $L^{\widehat{\alpha}}_{n-1}$ и соответствующие им $(m+1)$-плоскости $L^{\widehat{\alpha}}_{m+1}$

$$L^{\widehat{\alpha}}_{n-1}=(L_m,\bar{A}_{m+1},\ldots,\bar{A}_{\widehat{\alpha}-1},\bar{A}_{\widehat{\alpha}+1},\ldots,\bar{A}_n),$$
$$L^{\widehat{\alpha}}_{m+1}=(L_m,\bar{A}_{\widehat{\alpha}}) \tag{45}$$

образуют основную систему $\hat{E}_{n-1}\in W^m_{n-1}$. При этом из рассмотрения исключается случай $\tilde{A}=0$, когда основные гиперплоскости W^m_{n-1} определяются бесчисленным числом способов.

3.4.1. Точке $B\in Q_m$ сопоставим в соответствующем проективном пространстве P_n гиперплоскость

$$L^{m+1}_{n-1}=(\bar{A}_0,\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_m,\bar{A}_{m+2},\ldots,\bar{A}_n)=$$
$$=L_m\cup L^{m+2}_{m-1}\cup\cdots\cup L^{n}_{m-1} \tag{46}$$

(см. (45)). Из (46) и (45) в силу (2) и (41) следует, что точка

$$\bar{X}=x^0\bar{A}_0+x^\alpha\bar{A}_\alpha+x^{\widehat{\alpha}}\bar{A}_{\widehat{\alpha}},\quad (\widehat{\alpha}\ne m+1),$$

отвечающая точке $B\in Q_m$, описывает $(n-m-1)$-плоскость L^{m+1}_{n-m-1} – характеристический элемент гиперплоскости $L^{m+1}{}_{n-1}$, т. е. совокупность касательных к линиям, описываемым точкой X вдоль S_m, тогда и только тогда, когда $x^{\widehat{\alpha}}$ и $x^{\widehat{\alpha}}(\widehat{\alpha}\ne m+1)$ удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$x^{m+1}=0,\quad \tilde{A}^{m+1}_{\alpha\beta}x^\beta+x^{\widehat{\alpha}}A^{m+1}_{\widehat{\alpha}\alpha}=0,\quad (\widehat{\alpha}\ne m+1). \tag{47}$$

Проведем такую канонизацию проективного репера P, при которой

$$A^{m+1}_{m+2,\alpha}=0,\cdots,A^{m+1}_{n,\alpha}=0,\quad \det[A^{m+1}_{\alpha\beta}]\ne 0. \tag{48}$$

Из дифференциальных уравнений (41) и (2) в силу (48) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}_{m+1}} = A^{\alpha}_{\hat{\alpha}_{m+1}\beta}\omega^{\beta}_{0},$$
$$dA^{\alpha}_{\hat{\alpha}_{m+1}\beta} + A^{\gamma}_{\hat{\alpha}_{m+1}\beta}\Omega^{\alpha}_{\gamma} - A^{\alpha}_{\hat{\beta}_{m+1}\beta}\omega^{\hat{\beta}_{m+1}}_{\hat{\alpha}_{m+1}} -$$
$$-A^{\alpha}_{\hat{\alpha}_{m+1}\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}_{m+1}\beta\gamma}\omega^{\gamma},$$
$$(\hat{\alpha}_{m+1}, \hat{\beta}_{m+1} = \overline{m+2, n}). \tag{49}$$

Здесь явный вид величин, стоящих при ω^{γ}, для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (49) свидетельствуют с учетом [7] о существование канонизации типа (48). Из (47) замечаем, что геометрически эта канонизация означает следующее:

$$L^{m+1}_{n-m-1}(\overline{A}_0, \overline{A}_{m+2}, ..., \overline{A}_n). \tag{50}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $\det[\hat{A}^{m+1}_{\alpha\beta}]=0$, когда $(n-m-1)$-плоскость L^{m+1}_{n-m-1} определяется бесчисленным числом способов.

3.4.2. Как и в случае гиперплоскости (46) в соответствии с (41) получаем, что характеристический элемент L^{n}_{n-m-1} гиперплоскости $L^{n}_{n-1}=(L_m, \overline{A}_{m+1}, ..., \overline{A}_{n-1})$ определяется системой линейных уравнений:

$$x^n = 0, \quad x^{\alpha}A^{n}_{\alpha\beta} + x^{\alpha_n}A_{\alpha_n\beta} = 0, \quad (\alpha_n = \overline{m+1, n-1}).$$

Отсюда с учетом (46) следует, что нижеследующая система линейных уравнений определяет прямую L – пересечение $(m+1)$-плоскости $L^{m+1}_{m+1}=(L_m, \overline{A}_{m+1})$ с $(n-m-1)$-плоскостью L^{n}_{n-m-1}:

$$x^{\alpha}A^{n}_{\alpha\beta} + xA^{n}_{m+1,\beta} = 0, \quad x^{m+2} = \cdots = x^{n} = 0. \tag{51}$$

Проводится такая канонизация проективного репера, при которой

$$A^{n}_{m+1,\beta} = 0, \quad \det[A^{n}_{\alpha\beta}] \neq 0. \tag{52}$$

Из дифференциальных уравнений (41) с учетом (2) и (52) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega^{\alpha}_{m+1} = A^{\alpha}_{m+1,\beta}\omega^{\beta}_{0},$$
$$dA^{\alpha}_{m+1,\beta} + A^{\gamma}_{m+1,\beta}\Omega^{\alpha}_{\gamma} - A^{\alpha}_{m+1,\beta}\omega^{m+1}_{m+1} -$$
$$-A^{\alpha}_{m+1,\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{m+1} = A^{\alpha}_{m+1\beta\gamma}\omega^{\gamma}. \tag{53}$$

Здесь явный вид величин $A^{\alpha}_{m+1\beta\gamma}$ для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (53) в соответствии с [7] свидетельствуют о существовании канонизации типа (52). Геометрически эта канонизация в силу (51) означает, что

$$L = (\overline{A}_0, \overline{A}_{m+1}). \tag{54}$$

Из (50) и (54) следует, что оснащающая $(n-m)$-плоскость (17) в точке $B \in Q_m$ в соответствующем проективном пространстве теперь определяется инвариантным образом так, что $L_{n-m} = \cup L^{m+1}_{n-m-1}$. При этом дифференциальные уравнения (18) получаются из (49) и (53). Поэтому с учетом теорем 2.1 и 2.2 справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. С отображением $V_{m,n}: Q_m \to P_n$ в случае $m < n, m+2 < n < \dfrac{m(m+3)}{2}$ инвариантным образом ассоциируются конечным числом способов отображения

$$f^{2n}_{m}: Q_m \to M^{2n}, M^{2n} = \{L_{n-1}, A_0\}, A_0 \notin L_{n-1};$$
$$f^{2n-1}_{m}: Q_m \to M^{2n-1}, M^{2n-1} = \{\overset{*}{L}_{n-1}, A_0\}, A_0 \in \overset{*}{L}_{n-1}.$$

Заключение

Из теорем 2.1, 2.2 и 3.1 следует, что для более глубокого изучения отображения $V_{m,n}: Q_m \to P_n$ можно использовать с аналитической и геометрической точек зрения отображение аффинного пространства Q_m в многообразия M^{2n-1} и M^{2n} вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства P_n, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_n и проективного P_n пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. Т.6. – М.: ВИНИТИ АНСССР, 1974. – С. 37–42.
4. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
5. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, \overset{\alpha}{L}_{m+1})$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m<n)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
6. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(0, n-m, m)$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2, n<m(m+1))$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 5. – № 5. – С. 1143–1155.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. Math pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
8. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
9. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.

Поступила 03.05.2013 г.