СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D.F. Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. – 1995. – V. 24. – P. 2–10.
2. Hwang F.K. A survey on multi-loop networks // Theoretical Computer Science. – 2003. – V. 299. – P. 107–121.
3. Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3 (13). – С. 92–115.
4. Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. – 2009. – 3. – С. 132–138.
5. Martinez C., Beivide R., Gabidulin E.M. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers // IEEE Transactions on Information Theory. – 2009. – V. 55. – № 8. – P. 3552–3562.
6. Muga F.P., Saldana R.P., Yu W.E.S. Building GraphBased Symmetric Cluster // NECTEC Technical Journal. – 2001. – V. 11. – № 9. – P. 195–199.
7. Balaban A.T. Reaction graphs // Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity / eds. D. Bonchev, O. Mekenyan. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. – P. 137–180.
8. Miller M., Siran J. Moore Graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem // Electron. J. Combin. – 2005. – Dyn. Surv. (DS14). – 61 p.
9. Монахова Э.А. Новая достижимая нижняя оценка числа вершин в циркулянтных сетях размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. – 2013. – Т. 20. –№ 1. – С. 37–44.
10. Chen S., Jia X.-D. Undirected loop networks // Networks. – 1993. – V. 23. – P. 257–260.
11. Dougherty R., Faber V. The degree-diameter problem for several varieties of Cayley Graphs, 1: The Abelian Case // SIAM J. Discrete Math. – 2004. – V. 17 (3). – P. 478–519.
12. Macbeth H., Siagiova J., Siran J. Cayley Graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups // Discrete Math. – 2012. – V. 312 (1). – P. 94–99.
13. Meseznikov D. A construction of large graphs of diameter two and given degree from Abelian lifts of dipoles // Kybernetika. – 2012. – V. 48 (3). – P. 518–521.
14. Siran J., Siagiova J., Zdimalova M. Large graphs of diameter two and given degree // Proceedings of the 3d Inter. Workshop on Optimal Networks Topologies IWONT'2010. – Barcelona: Iniciativa Digital Politecnica, 2011. – P. 347–359.

Поступила 17.04.2013 г.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО Q_n И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ

М.А. Аль-Хассани[1,2], Е.А. Молдованова[1]

[1]Томский политехнический университет
E-mail: eam@tpu.ru
[2]Аль-Баера Университет, Ирак

Изучаются поля инвариантных геометрических образов, возникающих при отображении аффинного пространства в проективное пространство. С помощью этих геометрических образов показывается, что с рассматриваемым отображением инвариантным образом возникают отображения аффинного пространства в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства.

Ключевые слова:
Дифференцируемое отображение, многомерные пространства, линейные подпространства, геометрические объекты.
Key words:
Differentiable mapping, multidimensional spaces, linear subspaces, geometrical objects.

Введение

Как известно [1–4], дифференцируемые отображения многообразий являются важным разделом дифференциально-геометрических структур на многообразиях.

Данная работа посвящена изучению отображения $V_{n,n}:Q_n\to P_n$ аффинного Q_n и проективного P_n пространств. В первом разделе выводятся дифференциальные уравнения этого отображения, которым удовлетворяют компоненты внутренних фундаментальных геометрических объектов Γ_1 и Γ_2 первого и второго порядков в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 5]. С помощью этих компонент во втором разделе изучаются поля инвариантных геометрических образов. Эти поля дают возможность аналитически и геометрически доказать, что с отображением $V_{n,n}$ инвариантным образом ассоциируются два отображения $f_n^{2n}:Q_n\to M^{2n}$ и $f_n^{2n-1}:Q_n\to M^{2n-1}$, где M^{2n} и M^{2n-1} – многообразия всех невырожденных и вырожденных нуль-пар пространства P_n, соответственно.

Все построения в данной работе носят локальный характер, а функции, встречающиеся в работе, предполагаются функциями класса C^∞.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

1. Аналитический аппарат

Рассматривается n-мерное аффинное пространство Q_n, отнесенное к подвижному аффинному реперу $Q=\{\overline{B},\overline{\varepsilon}_a\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{B} = \bar{\varepsilon}_a\theta^a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b\bar{\varepsilon}_b,$$
$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \quad D\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b, \quad (a,b,c=\overline{1,n}). \quad (1)$$

Рассматривается n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенное к подвижному эквипроективному реперу $P=\{\bar{A}_I\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}_I = \omega_I^J\bar{A}_J, \quad D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \quad \omega_I^I = 0,$$
$$(I,J,K=\overline{0,n}). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что линейно независимые аналитические точки $\bar{A}_K \in P_n$ удовлетворяют условию

$$[\bar{A}_0\bar{A}_1........\bar{A}_n] = 1, \quad (3)$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек $\bar{A}_K$ равно 1. Из (2) и (3) получаем

$$\omega_K^K \equiv \omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0.$$

1.1. Рассматривается дифференцируемое отображение

$$V_{n,n}: Q_n \to P_n \quad (4)$$

аффинного Q_n и проективного P_n пространств. Реперы Q и P выбираются так, что дифференциальные уравнения отображения (4) имеют вид:

$$\omega_0^i = A_a^i\theta^a, \quad (i,j,k=\overline{1,n}). \quad (5)$$

Здесь величины A_a^i с учетом (1) и (2) являются компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта

$$\Gamma_1 = \{A_a^i\} \quad (6)$$

отображения (4) в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 5], которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^i + A_a^j\Omega_j^i - A_b^i\theta_a^b = A_{ab}^i\theta^b,$$
$$\Omega_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i\omega_0^0, \quad A^i_{[ab]} = 0. \quad (7)$$

Заметим, что геометрически отображение (4) направление $u=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}u^a \in Q_n$ переводит в направление $x=\{\bar{A},\bar{A}_i\}x^i \in P_n$, т. е.

$$x = V_{n,n}u = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)A_a^iu^a. \quad (8)$$

В данной статье решается задача о нахождении геометрических образов, определяемых компонентами геометрического объекта (6) и продолженного геометрического объекта

$$\Gamma_2 = \{A_a^i, A_{ab}^i\},$$

компоненты которого удовлетворяют дифференциальными уравнениям (7) и

$$dA_{ab}^i + A_{ab}^j\Omega_j^i - A^i_{cb}\theta^c_a - A^i_{ac}\theta^c_b +$$
$$+ A_b^j(A_a^i\delta_j^l + A_a^l\delta_j^i)\omega_l^0 = A^i_{abc}\theta^c,$$
$$A^i_{[abc]} = 0, \quad (a,b,c=\overline{1,n}\ ;\ i,j,l=\overline{1,n}). \quad (9)$$

2. Поля инвариантных геометрических образов

2.1. В этом разделе используется, как и выше, следующая система индексов $i,j,k,l=\overline{1,n}$ $a,b,c,q=\overline{1,n}$. Предполагается, что отображение $V_{n,n}$: $Q_n \to P_n$ является невырожденным, т. е.

$$\det[A_a^i] \neq 0. \quad (10)$$

Поэтому можно ввести в рассмотрение величины B_i^a по формулам:

$$B_i^aA_a^j = \delta_i^j, \quad B_i^bA_a^i = \delta_a^b. \quad (11)$$

Из (7) с учетом (11) замечаем, что величины B_i^b удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB_i^b + B_i^c\theta_c^b - B_j^b\Omega_i^j = B_{ia}^b\theta^a, \quad B_{ia}^b = -A_{qa}^jB_i^qB_j^b. \quad (12)$$

Рассмотрим следующие величины

$$G_{ij}^k = A_{ab}^kB_i^aB_j^b \overset{(7)}{\Rightarrow} G^k_{[ij]} = 0;$$
$$G_i = G_{ik}^k. \quad (13)$$

Из (9) и (12) следует, что величины (13) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dG_{ij}^k + G_{ij}^l\Omega_l^k - G_{lj}^k\Omega_i^l -$$
$$-G_{il}^k\Omega_j^l + (\delta_i^l\delta_j^k + \delta_i^k\delta_j^l)\omega_l^0 = G_{ijc}^k\theta^c,$$
$$dG_i - \Omega_i^kG_k + (n+1)\omega_i^0 = \tilde{A}_{ia}\theta^a,$$
$$G_{ijc}^k = -A_{abc}^kB_i^aB_j^b - A_{ab}^kB_{ic}^aB_j^b - A_{ab}^kB_i^aB_{jc}^b, \quad (14)$$

Найдем те геометрические образы в текущей точке $B \in Q_n$, которые определяются величинами (13).

Каждой текущей точке $B \in Q_n$ в соответствующем проективном пространстве P_n сопоставим гиперплоскость $y \ni A_0$, которая в точечных проективных координатах репера P определяется уравнением

$$y \Leftrightarrow y_i \cdot x^i = 0. \quad (15)$$

Из (5), (4) и (15) следует, что совокупность всех направлений $u=\{B,\bar{\varepsilon}_a\}u^a \in Q_n$, образы которых при отображении $V_{n,n}$ принадлежат гиперплоскости $y \in P_n$, образует в Q_n гиперплоскость $U_{n-1}(y) \ni B$, которая в точечных аффинных координатах репера Q определяется уравнением

$$y_iA_a^iu^a = 0. \quad (16)$$

Пользуясь условиями инвариантности точек и гиперплоскостей пространств Q_n и P_n в смысле Г.Ф. Лаптева [5] и учитывая (8), (7) и (9), получаем, что гиперплоскость (16) и бесконечно близкая к ней первого порядка вдоль направления $v=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_b\}v^b$ пересекаются по $(n-2)$-плоскости $U_{n-2}(y;v) \in Q_n$, являющейся характеристикой $\mathrm{Ch}\{U_{n-1}(y)\}_v$ в направлении v. Эта $(n-2)$-плоскость относительно репера Q определяется уравнениями:

$$\begin{cases} y_iA_a^iu^a = 0, \\ y_iA_{ab}^iu^av^b = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) следует, что каждому направлению $v=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_b\}v^b \in Q_n$ в аффинном пространстве отвечает пучок гиперплоскостей $\tilde{U}_{n-1}(y;v) \ni \tilde{U}_{n-2}(y;v)$, определяемых уравнением:

$$y_i(A^i_{ab}u^a v^b + \lambda A^i_a u^a) = 0,\ (v^b - \text{фиксированы}).$$

Отсюда следует, что совокупность всех направлений $v \in Q_n$ типа $\{v \in Q_n | v \in \tilde{U}_{n-1}(y;v)\}$ образует в пространстве Q_n пучок гиперквадрик $Q^2_{n-1}(y;\lambda) \ni B$, которые в аффинных координатах репера Q определяются уравнением:

$$y_i(A^i_{ab}v^a v^b + \lambda A^i_a v^a) = 0.$$

Асимптотическим гиперконусом этого пучка, не зависящим от λ, будет гиперконус $K^2_{n-1}(y)$ второго порядка, который определяется уравнением:

$$K^2_{n-1}(y) \Leftrightarrow y_i A^i_{ab} v^a v^b = 0. \qquad (18)$$

Таким образом, каждой гиперплоскости (15) пространства P_n, отвечающей точке $B \in Q_n$, в аффинном пространстве Q_n соответствует гиперконус $K^2_{n-1}(y)$. Из (18) с учетом (11) и (13) замечаем, что прообразом гиперконуса $K^2_{n-1}(y) \subset Q_n$ при отображении (4) является гиперконус $\tilde{K}^2_{n-1}(y) \subset P_n$ с вершиной в точке A_0, который в проективных координатах репера P определяется уравнением:

$$\tilde{K}^2_{n-1}(y) \Leftrightarrow y_k G^k_{ij} x^i x^j = 0. \qquad (19)$$

Итак, каждой гиперплоскости $y \ni A_0$ пространства P_n, соответствующего точке $B \in Q_n$, в этом пространстве отвечает гиперконус $\tilde{K}^2_{n-1}(y)$ второго порядка с вершиной в точке A_0.

Точке $B \in Q_n$ в соответствующем проективном пространстве P_n сопоставим точку

$$\bar{Z} = z^0 \bar{A}_0 + z^i \bar{A}_i. \qquad (20)$$

Полярой этой точки относительно гиперконуса (19) является гиперплоскость $\tilde{y} \ni A_0$, которая в проективных координатах репера P определяется уравнением:

$$\tilde{y} \Leftrightarrow y_k G^k_{ij} x^i z^j = 0,\ (z^j - \text{фиксированы}). \qquad (21)$$

Таким образом, с учетом (16), (20), и (21) получаем, что каждой точке $B \in Q_n$ отвечает центропроективное преобразование

$$\Pi(z) = \{G^k_{ij} z^j\} \qquad (22)$$

с центром в точке A_0, соответствующее точке $\bar{Z} \in P_n$, которое гиперплоскость y переводит в гиперплоскость $\tilde{y}$. Из (22) замечаем, что точке $B \in Q_n$ в проективном пространстве P_n в силу (13) отвечает гиперплоскость

$$L_{n-1} = \{Z \,|\, \operatorname{ter}\Pi(z) = 0\} \quad \Leftrightarrow \quad z^0 - G_i z^i = 0, \qquad (23)$$

которая в общем случае не проходит через точку A_0. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. С каждым отображением $V_{n,n}: Q_n \to P_n$ в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение

$$f^{2n}_n : Q_n \to M^{2n} \qquad (24)$$

аффинного пространства Q_n в многообразие M^{2n} всех невырожденных нуль-пар $\{L_{n-1}; A_0\}$ проективного пространства P_n.

Проводится с учетом (13), (10) и (11) канонизация проективного репера P пространства P_n, при которой

$$G_i = 0 \quad \Rightarrow \quad A^k_{ab} B^a_k = 0. \qquad (25)$$

Из дифференциальных уравнений (14) с учетом (25) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega^0_i = A_{ia}\theta^a,\ A_{ia} = \frac{1}{n+1} G^k_{ika}. \qquad (26)$$

Здесь величины A_{ia} удовлетворяют в силу (1) и (2) дифференциальным уравнениям:

$$dA_{ia} - A_{ja}\Omega^j_i - A_{ib}\theta^b_a = A_{iab}\theta^b,\ A_{i[ab]} = 0. \qquad (27)$$

Заметим, что дифференциальные уравнения (26) и (27) свидетельствуют в соответствии с [7] о существовании канонизации репера P типа (25).

Из (23) следует, что канонизация типа (25) означает, что

$$L_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2 ..., \bar{A}_n) \Leftrightarrow x^0 = 0. \qquad (28)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (5), (7), (26) и (27) являются дифференциальными уравнениями отображения (24).

2.2. Каждой точке $B \in Q_n$ сопоставим направление

$$u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) u^a \in Q_n. \qquad (29)$$

Из (2) и (28) с учетом (26) следует, что вдоль направления u точка $A_0 \in P_n$ описывает линию с касательной

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) A^i_a u^a, \qquad (30)$$

а характеристика $\mathrm{Ch}(L_{n-1})_u$ гиперплоскости L_{n-1} вдоль направления u, т. е. пересечение L_{n-1} со своей бесконечно близкой $(L_{n-1})'$ первого порядка вдоль u, определяется в точечных координатах x^j проективного репера P пространства P_n уравнениями

$$x^0 = 0, \quad A_{ia} x^i u^a = 0. \qquad (31)$$

Из (29–31) замечаем, что каждой точке $B \in Q_n$ в аффинном пространстве Q_n отвечает гиперконус $\overset{*}{Q}{}^2_{n-1}$ второго порядка с вершиной B

$$\overset{*}{Q}{}^2_{n-1} = \{ u \in Q_n \,|\, x \cap L_{n-1} \in \mathrm{Ch}(L_{n-1})_u \},$$

который определяется в аффинных точечных координатах аффинного репера Q уравнением:

$$g_{ab} u^a u^b = 0. \qquad (32)$$

Здесь симметрические величины g_{ab} определяются по формулам и в силу (27), (11), и (12) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$g_{ab} = \frac{1}{2} A_{i(a} A^i_{b)}, \quad dg_{ab} - g_{cb}\theta^c_a - g_{ac}\theta^c_b = g_{abc}\theta^c, \qquad (33)$$

причем явный вид величин g_{abc} для нас несущественный.

Из (33) с учетом (11) замечаем, что гиперконус $\overset{*}{Q}{}^2_{n-1} \subset Q_n$ в точке $B \in Q_n$ является прообразом гиперконуса $Q^2_{n-1} \in P_n$ второго порядка с вершиной в точке $A_0 \in P_n$, который определяется уравнением

$$C_{kj} x^k x^j = 0.$$

Здесь симметрические величины C_{kj} определяются по формулам и в силу (32), (7), (12) и (27) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$C_{kj} = \frac{1}{2} A_{(k|a|} B^a_{j)} = g_{ab} B^a_k B^b_j \;,$$

$$dC_{kj} - C_{kj}\Omega^i_j - C_{ij}\Omega^i_k = C_{kja}\theta^a \;, \qquad (34)$$

причем явный вид величин C_{kja} для нас несущественный.

Замечание 2.1. Из (34) замечаем, что в общем случае гиперконус $Q^2_{n-1}\subset P_n$ в точке $B\in Q_n$ является невырожденным, (не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $A_0\in P_n$), т. е.

$$\det[C_{kj}] \neq 0.$$

Поэтому в точке $B\in Q_n$ можно ввести в рассмотрение симметрические величины C^{ij} по формулам

$$C^{ij} C_{jk} = \delta^i_k \;,$$

которые с учетом (34) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dC^{ij} + C^{kj}\Omega^i_k + C^{ik}\Omega^j_a = C^{ij}_a \theta^a \;. \qquad (35)$$

Здесь явный вид величин C^{ij}_a для нас несущественный.

Замечание 2.2. Из (33) следует, что в общем случае гиперконус $\overset{*}{Q}{}^2_{n-1}\subset Q_n$ в точке $B\in Q_n$ является невырожденным, т. е.

$$\det[g_{ab}] \neq 0. \qquad (36)$$

Это дает возможность ввести в рассмотрение симметрические величины g^{ac} по формулам:

$$g^{ac} g_{cb} = \delta^b_a. \qquad (37)$$

которые с учетом (33) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dg^{ac} + g^{bc}\theta^a_b + g^{ab}\theta^c_b = g^{ac}_b \theta^b \;. \qquad (38)$$

Здесь явный вид величин g^{ac}_b для нас несущественный.

В каждой точке $B\in Q_n$ рассмотрим следующие величины:

$$C^j_i = A_{i(a} A^j_{b)} g^{ab} \;; \quad c_i = G^k_{ij} C^j_k \;. \qquad (39)$$

Здесь величины G^k_{ij} определяются по формулам (13). Из (14), (35)–(38) и (7) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (39):

$$dC^j_i + C^k_i \Omega^j_k - C^j_k \Omega^k_i = C^j_{ia}\theta^a \;,$$

$$dc_i - c_j \Omega^j_i = \overset{*}{c}_{ia}\,\theta^a \;.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^a, для нас несущественный.

Точке $B\in Q_n$ сопоставим в соответствующей гиперплоскости $L_{n-1}\subset P_n$ (28) аналитическую точку $\bar{X}=x_i\bar{A}_i$, отвечающую геометрической точке X.

Из (5), (6) и (31) следует, что множество всех направлений (29) в Q_n, образы которых при отображении (4) пересекают гиперплоскость $L_{n-1}\subset P_n$ в точках $\mathrm{Ch}(L_{n-1})_u$, образует в Q_n гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(X)$, определяемую в точечных аффинных координатах u^a репера Q уравнением

$$x^j A_{ja} u^a = 0.$$

Образ полюса этой гиперплоскости относительно гиперконуса (32) при отображении (4) с учетом (39), (35) и (37) пересекает гиперплоскость $L_{n-1}\subset P_n$ в точке Y с аналитической точкой $\bar{Y}=y^i\bar{A}_i=C^i_j x^j B_i$. Такова геометрическая интерпретация центропроективного преобразования

$$\overset{*}{\Pi} = \{C^i_j\} \qquad (40)$$

пространства P_n в себя с центром в точке $A_0\in P_n$.

Из (22) и (40) замечаем, что множество всех прямых $z=(\bar{A}_0,\bar{A}_i)z^i\in P_n$, отвечающих точке $B\in Q_n$, таких, что соответствующие им произведения центропроективных преобразований $\Pi(z)$ и Π^* имеют нулевые следы, образует в силу (39) в проективном пространстве P_n гиперплоскость $L^*_{n-1}\ni A_0$, определяемую в проективных координатах уравнением

$$c_i x^i = 0. \qquad (41)$$

Таким образом, с учетом (41) доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. С каждым отображением $V_{n,n}:Q_n\to P_n$ в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение

$$f^{2n-1}_m : Q_n \to M^{2n-1}$$

аффинного пространства Q_n в многообразие M^{2n-1} всех вырожденных нуль-пар $\{L^*_{n-1};A_0\}$,$(A_0\in L^*_{n-1})$ проективного пространства P_n.

Заключение

Теоремы 2.1 и 2.2 свидетельствуют о том, что изучение отображения $V_{n,n}$ инвариантным образом в общем случае сводится к изучению отображений f^{2n}_n и f^{2n-1}_n. Наибольший интерес, по нашему мнению, представляет отображение f^{2n}_n. *Во-первых*, потому что для многообразия M^{2n} применим принцип двойственности: если на многообразии M^{2n} какой-нибудь результат связан с гиперплоскостью $L_{n-1}\subset P_n$, входящей в элемент этого многообразия, то аналогичный результат имеет место и для соответствующей точки $A_0\in P_n$, $A_0\in L_{n-1}$, и наоборот. *Во-вторых*, как будет показано в следующих публикациях, с отображением f^{2n-1}_n инвариантным образом ассоциируется отображение f^{2n}_n. Поэтому для изучения отображения f^{2n-1}_n можно использовать результаты, имеющие место для отображения f^{2n}_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик П.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
2. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Сем. – 1974. – № 16. – С. 37–42.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Геометрия. – 1965. – Т. – С. 65–107.
4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – Т. – С. 153–174.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 15.02.2013 г.

УДК 517

ПОЛИНОМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Показано, что в локальном дробном анализе имеются достаточно простые интегрируемые функции нецелочисленных порядков, базовая первообразная соответствующего порядка от которых равна нулю.

Ключевые слова:
d-оператор, полиномы дифференцирования, полиномы интегрирования.
Key words:
d-operator, differentiation polynomials, integration polynomials.

Введение

В локальном дробном анализе появляются новые функции, зависящие от порядка интегродифференцирования, которые можно назвать элементарными и которые в стандартном анализе или обращаются в константы, в частности в ноль, или вообще теряют смысл, поэтому такие функции в стандартном анализе отсутствуют и их удобно приравнивать к нулю [1, 2].

Аналоги функций стандартного анализа в локальном дробном анализе в общем случае имеют другие свойства, зависящие от их порядка. Более того, для многих функций в локальном дробном анализе имеет место вырождение, когда они имеют не один аналог, а более одного, конечное или бесконечное счётное множество [2, 3].

В частности, в локальном дробном анализе появляются своеобразные функции, которые можно отнести к элементарным функциям локального дробного анализа, которые были названы *полиномами дифференцирования*.

Полиномы дифференцирования

Определение. Ненулевая интегрируемая функция $C_{-s}(x)$, выражающаяся через дробностепенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-s};\ k = 0, 1, 2, 3, \dots;\ \mathbb{N};\ b,\ s \in \mathbb{C};\ b,\ s = \mathrm{const},$$

с шагом равным 1, будем называть *полиномом дифференцирования*.

Шаг ряда – это модуль разности показателей степеней степенных функций любых двух соседних элементов дробностепенного ряда.

Функций, аналогичных полиномам дифференцирования в стандартном анализе, нет.

Теорема. Первообразная порядка s от полинома дифференцирования $C_{-s}(x)$ порядка s равна нулю с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$.

Первообразная функция называется *базовой первообразной*, если её полином интегрирования, в силу его произвольности, приравнять к нулю.

Тогда утверждение теоремы равносильно тому, что базовая первообразная нецелочисленного порядка s от полинома дифференцирования порядка s равна нулю.

Доказательство. Используя d-оператор дробного интегрирования порядка s [3, 4], легко проинтегрировать полином дифференцирования