

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ

И.Г. Устинова, Е.Г. Пахомова

Томский политехнический университет

E-mail: igu@sibmail.com

Рассмотрена аппроксимация автокорреляционной функции в виде линейной комбинации экспонент. На примерах показательной и показательно-косинусоидальной автокорреляционных функций показана возможность такой аппроксимации.

Ключевые слова:

Автокорреляционная функция, сейсмические данные, обработка сейсмической информации.

Key words:

Autocorrelation function, seismic data, processing of seismic data.

Функция автокорреляции $R[\tau]$ стационарного случайного процесса является одной из его важнейших характеристик второго порядка [1], так как позволяет решать следующие практические задачи:

- 1) оценивать корреляционные свойства сигналов и помех;
- 2) производить расчеты весовых функций и частотных характеристик оптимальных фильтров, базирующихся на знании автокорреляционной функции (АКФ) сигналов и помех [2];
- 3) оценивать разрешающую способность сейсмической записи [3].

Часто для оценки функции автокорреляции приходится использовать короткие отрезки сейсмических записей, поэтому вопрос о точности оценивания автокорреляционной функции имеет большое практическое значение. В данной статье рассмотрена возможность представления любой автокорреляционной функции в виде линейной комбинации экспонент.

Постановка задачи

Рассмотрим некоторый случайный процесс с функцией автокорреляции $R[\tau] = M[x(t)x(t+\tau)]$, значения которой могут быть представлены в виде

$$R[\tau] = \sum_{k=1}^N \theta_k \varphi_k(\tau) + n(\tau), \quad (1)$$

где $\varphi_k(\tau)$ – некоторые известные функции аргумента τ , причем интегралы

$$\int_0^{+\infty} \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) d\tau, \quad \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_i(\tau) d\tau, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (2)$$

сходятся, $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$ – неизвестные параметры, а $n(\tau)$ – случайные добавки, которые представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины с $M[n(\tau)] = 0$ и $D[n(\tau)] = \sigma^2$. Задача состоит в построении оценки $\hat{R}[\tau]$ функции $R[\tau]$.

Решение задачи

Будем искать оценку автокорреляционной функции в виде: $\hat{R}[\tau] = \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau)$. Для нахождения не-

известных параметров $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$ будем исходить из условия минимума ошибки аппроксимации:

$$\int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right]^2 d\tau \Rightarrow \min_{\hat{\theta}_k}. \quad (3)$$

Продифференцировав (3) по неизвестным параметрам $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$, получим систему N уравнений с N неизвестными:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_1(\tau) d\tau = 0, \\ \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_2(\tau) d\tau = 0, \\ \dots, \\ \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_N(\tau) d\tau = 0, \end{cases}$$

из которой получаем систему в виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_1(\tau) d\tau, \\ \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau) \varphi_2(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_2(\tau) d\tau, \\ \dots, \\ \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau) \varphi_N(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_N(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \varphi_1^2(\tau) d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau) d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_1(\tau) \varphi_N(\tau) d\tau \\ \int_0^{+\infty} \varphi_2(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_2^2(\tau) d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_2(\tau) \varphi_N(\tau) d\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{+\infty} \varphi_N(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_N(\tau) \varphi_2(\tau) d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_N^2(\tau) d\tau \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \dots \quad \hat{\theta}_N]^T,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_1(\tau) d\tau & \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_2(\tau) d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} R[\tau] \varphi_N(\tau) d\tau \end{bmatrix}^T,$$

тогда система (4) может быть записана в виде

$$\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Y}, \quad (5)$$

откуда получаем вектор оценок неизвестных параметров

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}. \quad (6)$$

Частный случай

Рассмотрим семейство автокорреляционных функций $R_k[\tau] = \theta_k e^{-k\tau}$, $k=1,2,3,\dots$, т. е. $\varphi_k(\tau) = e^{-k\tau}$.

Утверждение. Любую автокорреляционную функцию $R[\tau]$, стремящуюся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ (что справедливо для физических приложений), можно аппроксимировать по методу наименьших квадратов линейной комбинацией экспонент [4]:

$$\hat{R}[\tau] = \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau}. \quad (7)$$

Так же как и при нахождении неизвестных параметров формулы (1) для нахождения коэффициентов $\hat{\theta}_k$, $k=1, N$ разложения (7) будем исходить из условия минимума ошибки аппроксимации (3), которое приводит к системе

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-\tau} d\tau = 0, \\ \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-2\tau} d\tau = 0, \\ \dots, \\ \int_0^{+\infty} \left[R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-N\tau} d\tau = 0, \end{cases}$$

из которой получаем, вычислив несобственные интегралы вида $\int_0^{+\infty} e^{-(k+i)\tau} d\tau$, $i = \overline{1, N}$, систему

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+1} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-\tau} d\tau, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+2} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-2\tau} d\tau, \\ \dots, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+N} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-N\tau} d\tau, \end{cases} \quad (8)$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+p} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-p\tau} d\tau. \quad (9)$$

Правая часть (9) есть преобразование Лапласа функции $R[\tau]$, тогда, используя свойство линейности, получим, что оригиналом $\sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+p}$ является

$$\sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau}, \text{ что и доказывает утверждение.}$$

Пример 1

Согласно [5] в приложениях при анализе временных последовательностей часто применяются стационарные случайные процессы с показательной функцией автокорреляции

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|}, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0.$$

Мы рассмотрим АКФ представленного вида только для случая, когда $0 \leq \tau < +\infty$, т. е. $R[\tau] = e^{-\alpha\tau}$, $\alpha > 0$. В этой ситуации система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{3} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+1} = \frac{1}{\alpha+1}, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{3} + \frac{\hat{\theta}_2}{4} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+2} = \frac{1}{\alpha+2}, \\ \dots, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{N+1} + \frac{\hat{\theta}_2}{N+2} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{2N} = \frac{1}{\alpha+N}. \end{cases} \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{N+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+2} & \dots & \frac{1}{2N} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \dots \\ \hat{\theta}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{1}{\alpha+2} \\ \dots \\ \frac{1}{\alpha+N} \end{pmatrix},$$

тогда (10) может быть записана в виде (5), а ее решение в виде (6).

Нахождение матрицы $\mathbf{X}^{-1}$ приведено в приложении, а сами элементы обратной матрицы имеют вид

$$a^{-1}_{ij} = \frac{(N+i)! \cdot (N+j)! \cdot (-1)^{i+j}}{(N-i)! \cdot (N-j)! \cdot i+j} \times \frac{1}{i! \cdot (i-1)!} \cdot \frac{1}{j! \cdot (j-1)!}.$$

В частности для диагональных элементов:

$$a^{-1}_{ii} = \left[\frac{(N+i)!}{(N-i)!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left[\frac{1}{i! \cdot (i-1)!} \right]^2.$$

Заметим, что N следует выбирать исходя из заданной точности приближения ε , используя тот

факт, что $R[0]=1$ и, следовательно, $\left| 1 - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \right| < \varepsilon$.

Рассмотрим $\alpha=1/2$, $\varepsilon=0,05$. Заданная точность до-

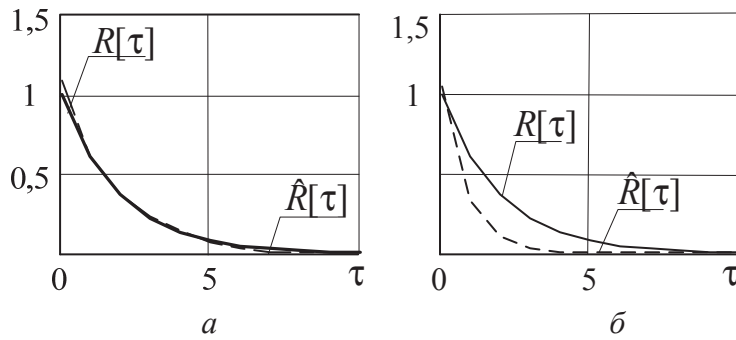


Рис. 1. Графики показательной автокорреляционной функции и ее оценки: а) $R[\tau] = e^{-(\tau/2)}$; б) $R[\tau] = e^{-1.1\tau}$

стигается при $N=10$, что представлено на рис. 1, а; при $\alpha=1,1$ заданная точность достигается уже при $N=2$. На рис. 1, б представлен этот случай, когда $N=9$. Ситуация, когда $\alpha \in \mathbb{N}$ тривиальная и возможность аппроксимации $R[\tau]$ выражением (7) очевидна. Из приведенных рисунков видно, что аппроксимация показательной АКФ в виде линейной комбинации экспонент возможна даже при небольшом числе слагаемых.

Пример 2

На практике для описания формы автокорреляционной функции сейсмических колебаний часто используется показательно-косинусная АКФ

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0,$$

где ω_0 – видимый период колебаний, а α – коэффициент затухания. Рассмотрим данную функцию только для случая $0 \leq \tau < +\infty$, т. е. $R[\tau] = e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha > 0$. В этом случае система (8) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{3} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2 + \omega_0^2}, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{3} + \frac{\hat{\theta}_2}{4} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+2} = \frac{\alpha+2}{(\alpha+2)^2 + \omega_0^2}, \\ \dots, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{N+1} + \frac{\hat{\theta}_2}{N+2} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{2N} = \frac{\alpha+N}{(\alpha+N)^2 + \omega_0^2}. \end{cases}$$

Введя обозначения примера 1, получим данную систему в матрично-векторной форме (5), в которой

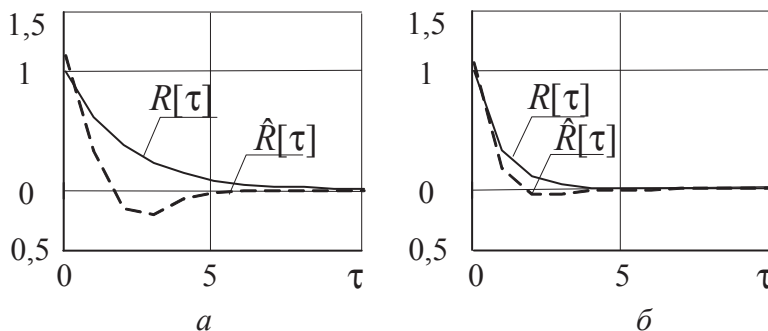


Рис. 2. Графики показательно-косинусной автокорреляционной функции и ее оценки: а) $R[\tau] = e^{-(\tau/2)} \cos \tau$; б) $R[\tau] = e^{-1.1\tau} \cos \tau$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\alpha+2}{(\alpha+2)^2 + \omega_0^2} \\ \dots \\ \frac{\alpha+N}{(\alpha+N)^2 + \omega_0^2} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (5) доставляется выражением (6).

Как и в примере 1 рассмотрим случай, в котором $\alpha=1/2$, $\varepsilon=0,05$ и, добавив условие $\omega=1$, заметим, что заданная точность достигается при $N=7$, что представлено на рис. 2, а; при $\alpha=1,1$ заданная точность достигается уже при $N=5$. В этом случае можно сделать вывод аналогичный выводу примера 1, а именно: аппроксимация показательно-косинусной АКФ в виде линейной комбинации экспонент возможна даже при небольшом числе слагаемых.

Приложение

Пусть $A=(a_{ij})$ – матрица порядка n , элементы которой имеют вид $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$. Требуется найти ее обратную матрицу $A^{-1}=(\alpha_{ij})$.

Воспользуемся формулой $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot S^T$, где S – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы A . Поскольку A симметрическая, то $S^T=S$ и, следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S} \Rightarrow \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$

где M_{ij} – дополнительный минор элемента a_{ij} .

1) Найдем $|\mathbf{A}|$. Введем следующее обозначение: $|\mathbf{A}| = A_{n,2}$ (n – порядок матрицы, 2 – знаменатель элемента a_{11}).

Выполним следующую последовательность преобразований определителя $A_{n,2}$:

- вынесем из каждого столбца определителя $A_{n,2}$ множитель, равный элементу первой строки этого столбца;
- вычтем первую строку получившегося определителя из всех остальных строк:

$$A_{n,2} = \frac{1!}{(n+1)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \dots & -\frac{1}{n+2} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{6} & \dots & -\frac{2}{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-n}{n+1} & \frac{1-n}{n+2} & \frac{1-n}{n+3} & \dots & \frac{1-n}{2n} \end{vmatrix};$$

- вынесем из каждой строки определителя множитель, равный элементу первого столбца этой строки;
- вычтем первую строку получившегося определителя из всех остальных строк:

$$A_{n,2} = \frac{1! \cdot 2!}{[(n+1)!]^2} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & \dots & \frac{1-n}{n+2} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{6} & \dots & \frac{1-n}{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{1}{n+2} & -\frac{2}{n+3} & \dots & \frac{1-n}{2n} \end{vmatrix};$$

- вынесем общий множитель из каждой строки определителя и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$A_{n,2} = \frac{1! \cdot 2!}{[(n+1)!]^2} \cdot [(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!]^2 \times \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+4} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Итак, выполнив действия а-д, получили:

$$A_{n,2} = \left[\frac{(n-1)!}{(n+1)!} \right]^2 \cdot 1! \cdot 2! \cdot A_{n-1,4}.$$

Применим к определителю $A_{n-1,4}$ действия а-д и найдем:

$$A_{n,2} = \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!} \right]^2 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot A_{n-2,6}.$$

Продолжив этот процесс, получим формулу:

$$A_{n,2} = \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-k)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+k)!} \right]^2 \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot A_{n-k,2k+2}. \quad (11)$$

Тогда

$$A_{n,2} = \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-(n-2))!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+(n-2))!} \right]^2 \times 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (2n-4)! \cdot A_{2,2n-2},$$

где

$$A_{2,2n-2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} = \frac{(2n-3)! \cdot (2n-2)!}{[(2n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{A}| = \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-(n-1))!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+(n-1))!} \right]^2 \times 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (2n-2)! \cdot \frac{1}{2n} = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(n-1)} k! \cdot \frac{1}{2n} = \left[\prod_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2n} k!.$$

- Найдем дополнительные миноры M_{ij} (где $i < j$).
Имеем:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{1+(j-1)} & \frac{1}{1+(j+1)} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2+(j-1)} & \frac{1}{1+(j+1)} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(i-1)+1} & \frac{1}{(i-1)+2} & \dots & \frac{1}{i-1+j-1} & \frac{1}{i-1+j+1} & \dots & \frac{1}{(i-1)+(n-1)} & \frac{1}{(i-1)+n} \\ \frac{1}{(i+1)+1} & \frac{1}{(i+1)+2} & \dots & \frac{1}{i+1+j-1} & \frac{1}{i+1+j+1} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(n-1)} & \frac{1}{(i+1)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{(n-1)+(j-1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{n+(j-1)} & \frac{1}{n+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Выполнив для определителя M_{ij} действия а-д $i-1$ раз, получим:

$$M_{ij} = \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-i+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+i-1)!} \right]^2 \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2i-3)! \cdot (2i-2)! \times \frac{(j+1) \cdot (j+2) \cdot \dots \cdot (j+i-1)}{(j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-i+1)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (2i-1)}{(i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot 1} \cdot C_{n-i} = \\ & = \left[\prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(i-1)} k! \times \\ & \times \frac{(j+i-1)! \cdot (j-i)!}{(j-1)! \cdot j!} \cdot \frac{(2i-1)!}{(i-1)! \cdot i!} \cdot C_{n-i}, \end{aligned}$$

где C_{n-i} – определитель порядка $n-i$ следующего вида:

$$C_{n-i} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(i+1)+i} & \frac{1}{(i+1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(j-1)} & \frac{1}{(i+1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(n-1)} & \frac{1}{(i+1)+n} \\ \frac{1}{(j+2)+i} & \frac{1}{(j+2)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(j+2)+(j-1)} & \frac{1}{(j+2)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(j+2)+(n-1)} & \frac{1}{(j+2)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{j+i} & \frac{1}{j+(i+1)} & \dots & \frac{1}{j+(j-1)} & \frac{1}{j+(j+1)} & \dots & \frac{1}{j+(n-1)} & \frac{1}{j+n} \\ \frac{1}{(j+1)+i} & \frac{1}{(j+1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(j-1)} & \frac{1}{(j+1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(n-1)} & \frac{1}{(j+1)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)+i} & \frac{1}{(n-1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(n-1)+(j-1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+i} & \frac{1}{n+(i+1)} & \dots & \frac{1}{n+(j-1)} & \frac{1}{n+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Для определителя C_{n-i} выполним действия а–д $j-i$ раз и придем к результату:

$$\begin{aligned} C_{n-i} &= \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \left[\frac{(n-i-1)! \cdot (n-i-2)! \cdot \dots \cdot (n-j+1)!}{(n+i+1)! \cdot (n+i+2)! \cdot \dots \cdot (n+j-1)!} \right]^2 \times \\ & \times (2i)! \cdot (2i+1)! \cdot \dots \cdot (2j-2)! \cdot (2j-1)! \cdot \frac{(i+1+j) \cdot (i+2+j) \cdot \dots \cdot 2j}{(j-i)!} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \frac{1}{(j+1)+(j+1)} & \frac{1}{(j+2)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(n-1)} & \frac{1}{(j+1)+n} \\ \frac{1}{(j+2)+(j+1)} & \frac{1}{(j+2)+(j+2)} & \dots & \frac{1}{(j+2)+(n-1)} & \frac{1}{(j+2)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+2)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+(j+1)} & \frac{1}{n+(j+2)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C_{n-i} &= \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \left[\prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \prod_{k=2i}^{2j} k! \cdot \frac{1}{(j-i)! \cdot (j+i)!} \cdot A_{n-j, 2j+2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= A_{n-j, 2j+2} \cdot \left[\prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \prod_{k=1}^{2i-2} k! \cdot \prod_{k=2j}^{2j} k! \times \\ & \times \frac{(j+i-1)! \cdot (j-i)!}{(j-1)! \cdot j!} \cdot \frac{(2i-1)!}{(i-1)! \cdot i!} \cdot \frac{1}{(j-i)! \cdot (i+j)!} = \\ & = A_{n-j, 2j+2} \cdot \left[\prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \prod_{k=1}^{2j} k! \times \\ & \times \frac{1}{(j-1)! \cdot j!} \cdot \frac{1}{(i-1)! \cdot i!} \cdot \frac{1}{(i+j)!}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (11)

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-j)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+j)!} \right]^2 \times \\ & \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2j-1)! \cdot (2j)! \cdot A_{n-j, 2j+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $i < j$ справедливы утверждения

$$\begin{aligned} \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|} &= \frac{1}{i+j} \cdot \frac{(n+i)!}{(n-i)!} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_{ij} &= (-1)^{i+j} \cdot \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} \cdot \frac{(n+i)!}{(n-i)!} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}. \end{aligned} \quad (13)$$

3) И, наконец, рассмотрим дополнительные миноры M_{ii} . Выполним для M_{ii} действия а–д $i-1$ раз, получим:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \left[\frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-i+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+i-1)!} \right]^2 \times \\ & \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2i-3)! \cdot (2i-2)! \times \\ & \times \left[\frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (i+i-1)}{(i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot (i-i+1)} \right]^2 \cdot A_{n-i, 2i+2} = \\ & = \left[\prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(i-1)} k! \cdot \left[\frac{(2i-1)!}{(i-1)! \cdot i!} \right]^2 \cdot A_{n-i, 2i+2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{M_{ii}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2i} \cdot \left[\frac{(n+i)!}{(n-i)!} \right]^2 \cdot \frac{1}{[(i-1)! \cdot i!]^2}. \quad (14)$$

Но формула (14) получается из (12) при $i=j$. Следовательно, для любых элементов α_{ij} матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ справедливо равенство (13), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} \cdot \frac{(n+i)!}{(n-i)!} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Выводы

1. На основе метода наименьших квадратов получена оценка автокорреляционной функции в виде линейной комбинации функций $\varphi_k(\tau)$, $k=1, N$, удовлетворяющих условиям (2).
2. Обоснована возможность аппроксимации АКФ линейной комбинацией экспонент.
3. На примерах продемонстрирована возможность представления автокорреляционной функции в виде (7) с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Идрисов Ф.Ф., Устинова И.Г. Оценка функции корреляции стационарного случайного процесса при случайном числе измерений // Экономика, технология, предпринимательство. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. – Вып. 1. – С. 75–79.
2. Устинова В.Н., Устинова И.Г. Дискретные иерархические системы в геофизике // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 91–97.
3. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
4. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. – М.: Наука, 1965. – 463 с.
5. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 642 с.

Поступила 10.06.2013 г.

УДК 517

ОБОБЩЁННЫЙ G -ОПЕРАТОР КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводится локальный G -оператор дифференцирования и интегрирования вещественной переменной комплексных порядков, который является обобщением d -оператора вещественных порядков на случай бесконечного количества локальных операторов, для которых выполняется принцип соответствия. Рассмотрены некоторые его свойства и частные случаи.

Ключевые слова:

G -оператор комплексного порядка, пространство коэффициентов, полиномы интегрирования, полиномы дифференцирования.

Key words:

G -operator of a complex order, space of factors, integration polynomials, differentiation polynomials.

Введение

В работе [1] был введен обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегрирования, но без учёта полиномов дифференцирования, или G -оператор, который представляет бесконечное множество локальных операторов дробного интегрирования вещественных порядков вещественной переменной.

Обобщим G -оператор на комплексные порядки интегрирования, действующие на степенные функции с комплексными показателями, следуя в основном [1]. Кроме того, в новый G -оператор, по сравнению с оператором из [1], внесены изменения, связанные с логарифмическими случаями.

G -оператор комплексных порядков

Определение. Оператор $G^s x$ будем называть обобщённым локальным оператором дифференцирования и интегрирования дробных комплексных порядков $s = \chi + i\gamma$, $\chi, \gamma \in \mathbb{R}$; $\chi, \gamma = \text{const}$; $\chi, \gamma \geq 0$, действующим над множеством степенных функций x^q вещественной переменной x с комплексными показателями $q = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$; $\mu, \nu = \text{const}$

$$\begin{cases} G^{-s} x : x^q = K(-s, q; x) x^{q-s} + C_{-s}(x); \\ G^0 x : x^q = K(0, q; x) x^{q+0} + C_0(x) = x^q; \\ G^s x : x^q = K(s, q; x) x^{q+s} + C_s(x); s \neq -q; \\ G^s x : x^{-s} = K(s, -s; x) \ln_s(x) + C_s(x). \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим важные частные случаи порядков интегрирования s .

Если порядок нулевой, $s = \chi = \gamma = 0$, то это соответствует единичному оператору, который переводит функции самих в себя, что можно записать $G^0 x = 1$.

Если порядок интегрирования вещественный, $s = \text{Re}(s) = \chi > 0$, а в равенствах (*) перед показателем порядка оператора s , стоит знак минус, то это соответствует оператору дробного дифференцирования вещественного порядка χ , а если перед показателем порядка оператора стоит знак плюс, тогда это будет соответствовать оператору дробного интегрирования вещественного порядка χ .

Когда порядок мнимый, $s = i\text{Im}(s) = i\gamma$; $\gamma > 0$, а в равенствах (*) перед показателем порядка оператора s стоит знак минус, то это будет соответствовать G -оператору дробного дифференцирования мнимого порядка γ , а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет G -оператор дробного интегрирования мнимого порядка γ .

Если порядок интегрирования комплексный, $s = \chi + i\gamma$; $\chi, \gamma > 0$, и перед ним стоит знак минус, то это соответствует дробному дифференцированию комплексного порядка s , а если знак плюс – дробному интегрированию комплексного порядка s .

В случаях, когда знаки у вещественной и мнимой части порядка интегрирования различаются, т. е. $s = -\chi + i\gamma$ или $s = \chi - i\gamma$, то такие порядки будем называть смешанными комплекс-