ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

М.И. Кочергин
Научный руководитель: д.т.н., профессор В.М. Дмитриев
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 40, 634050
E-mail: max24kochergin@gmail.com

NUMERICAL APPROXIMATION OF TABLE FUNCTIONS ON THE BASIS OF MULTIDIMENSIONAL OPTIMIZATION METHODS FOR MODELING PHYSICS AND TECHNICS PROBLEMS

M.I. Kochergin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.M. Dmitriev
Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050
E-mail: max24kochergin@gmail.com

Abstract*. The aim of the article is to present an approximation method based on multidimensional optimization methods which does not require preliminary information about the derivatives of the approximating function. It is proposed to use a combination of the grid method, coordinate descent method and the golden section method to solve the task of optimizing the objective function (standard deviation in the nodes of the tabular function). The considered example of the approximation of the flight trajectory of a body in the atmosphere illustrates the comparability of the results of the proposed method and the least squares method.*

Введение. Используемые в математических моделях функции, могут быть заданы как аналитически, так и таблично – когда значения функции известны только при определенных дискретных значениях аргумента. На практике могут понадобиться значения функции и в других точках, отличных от тех, что заданы в таблице [1]. Эта задача может решаться путём приближенной замены полученной табличной функции $f(x)$ некоторой более простой $g(x)$, т.е. средствами аппроксимации. Выбор приближающей функции определяется по значению погрешности (отклонения в дискретных точках). Критерием метода наименьших квадратов (МНК) является сумма квадратов отклонений. В качестве примера программной реализации МНК приведём аппроксиматор среды многоуровневого компьютерного моделирования МАРС (СМ МАРС) [2, 3], интерфейс которого представлен на рис. 1.

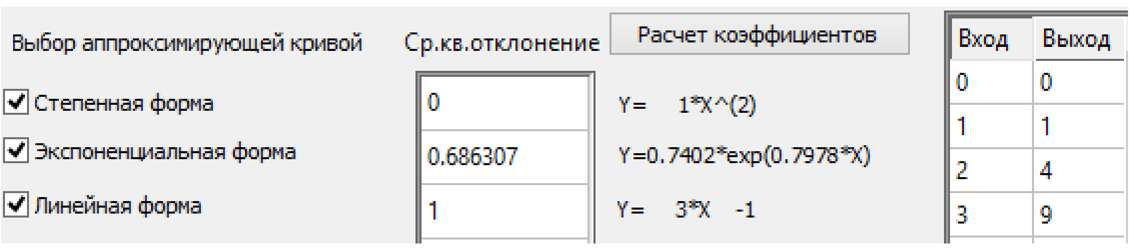

Рис. 1. Фрагмент окна аппроксиматора в СМ МАРС

Не всегда погрешность лучшей (из имеющегося списка) приближающей функции является приемлемой. В таком случае необходимо осуществить подбор другой приближающей функции для непрерывной аппроксимации, либо решать задачу кусочно-непрерывной аппроксимации. В первом случае возникают технические сложности для программной реализации процедуры автоматического аналитического дифференцирования (поэтому обычно информация о производных конкретной приближающей функции заносится вручную), к тому же полученная (автоматически) в аналитическом виде производная может быть избыточна и требовать приведения подобных. Решением данной проблемы может служить переход от построения СЛАУ с применением аналитического дифференцирования к решению задачи многомерной оптимизации целевой функции, которая представляет собой критерий оценки погрешности приближения.

Целью статьи является представление метода аппроксимации, основанного на критерии МНК и методах многомерной оптимизации, не требующего информации о производных приближающей функции и позволяющего в автоматизированном режиме использовать любые функции, введённые пользователем в интерактивную математическую панель [4] СМ МАРС, в качестве приближающих.

Численная аппроксимации на основе методов многомерной оптимизации. В качестве критерия качества приближения предлагается использовать критерий МНК (среднеквадратичное отклонение в узлах табличной функции) – в результате получаем задачу многомерной оптимизации функции $f(x, a, b, c)$ по критерию $\sqrt{\sum_i (y_{табл_i} - f(x_i, a, b, c))^2} \to \min$, где x_i – аргументы табличной функции; a, b, c – параметры приближающей функции. Для решения используем модификацию метода покоординатного спуска, предполагающую применение метода золотого сечения для оптимизации функции одной переменной на каждой оси поочерёдно. Метод покоординатного спуска является простым неградиентным методом локальной оптимизации, метод золотого сечения также не требует информации о производной оптимизируемой функции и имеет более высокую сходимость по сравнению с аналогичными методами. Начальные приближения для определения исходной точки для покоординатного спуска и интервалов поиска минимального значения функции по каждой из координат определяются методом сеток с некоторым фиксированным шагом. Комбинация методов локальной оптимизации позволяет решать задачу глобальной оптимизации целевой функции $f(x, a, b, c)$.

Сравним результаты применения предлагаемого метода и МНК для аппроксимации траектории полёта тела в атмосфере, полученной в результате компьютерного моделирования данной физико-технической задачи с шагом 0,1 при начальной скорости v_0=10 м/с, массе m=1 кг, углом полёта α=45° и силе атмосферного сопротивления F_a пропорциональной скорости тела v [5]. В численном эксперименте будем использовать 17 значений табличной функции [5]. Для обоих методов в качестве приближающей функции выбрана квадратичная функция $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. СЛАУ для МНК составлена вручную (ввиду необходимости нахождения частных производных), для её решения реализован метод Гаусса. Для описываемого в данной статье метода аппроксимации на основе методов многомерной оптимизации были заданы следующие параметры: шаг метода сеток – 0,25, для начального приближения по всем трём координатам выбран интервал [-2, 2], заданная точность для метода золотого сечения – 10^{-6}. Результаты аппроксимации зависимостей $y(x)$ и $y(t)$ представлены в табл. 1 с округлением до 4-х знаков. Таким образом, при заданных условиях описываемый метод аппроксимации обеспечивает точность сравнимую с точностью метода наименьших квадратов. При этом применение данного метода не ограничивает пользователя списком встроенных приближающих функций – пользователь может сам ввести вид требуемой функции (в аналитическом виде в интерактивную математическую панель) получить значения её параметров, обеспечивающие минимальное среднеквадратичное отклонение.

Таблица 1

Сравнение результатов аппроксимации

Метод	Аппроксимация зависимости $y(x)$				Аппроксимация зависимости $y(t)$			
	Значения коэффициентов			σ	Значения коэффициентов			σ
	a	b	c		a	b	c	
МНК	-0,1088	1,1122	-0,0317	0,016<u>285</u>	-4,9402	8,4129	-0,7737	0,00934<u>1</u>
Многомерная оптимизация	-0,1087	1,1117	-0,0308	0,016<u>291</u>	-4,9388	8,4103	-0,7728	0,00934<u>6</u>
δ, %	0,0417	0,0450	2,8067	0,0368	0,0289	0,0311	0,1110	0,0535

Заключение. Использование метода наименьших квадратов для аппроксимации табличных функций требует наличия информации о частных производных рассматриваемой приближающей функции. При необходимости аппроксимации исследуемой зависимости функцией введённой пользователем, информация о её производных может отсутствовать в аппроксиматоре. Описываемый метод аппроксимации на основе методов многомерной оптимизации позволяет подобрать коэффициенты приближающей функции, не требуя информации о её производных. Метод предполагает решение задачи аппроксимации через задачу многомерной оптимизации целевой функции – среднеквадратичного отклонения в узлах табличной функции. Для решения задачи оптимизации предлагается использование метода сеток для нахождения начального приближения и комбинации метода покоординатного спуска и метода золотого сечения для решения задачи локальной оптимизации. Применение метода сеток позволяет находить несколько локальных минимумов, что позволяет решать задачу глобальной оптимизации. Рассмотренный пример аппроксимации траектории полёта тела в атмосфере иллюстрирует сопоставимость результатов предлагаемого метода и метода наименьших квадратов ($\delta_{max} < 3\%$). Актуальной остаётся задача повышения скорости сходимости предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрянин Д.Л., Юрков Н.К. Повышение точности моделей аппроксимации // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 2 (14). – С. 59-66.
2. Дмитриев В.М., Шутенков А.В., Зайченко Т.Н., Ганджа Т.В. МАРС – среда моделирования технических устройств и систем. – Томск: В-Спектр, 2011. – 278 с.
3. Дмитриев В.М., Ганджа Т.В. Методика построения многоуровневых компонентных цепей для моделирования химико-технологических систем // Доклады ТУСУР. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 82-87.
4. Кочергин М.И. Применение интерактивных математических панелей для моделирования физических задач в рамках среды многоуровневого моделирования // Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства: материалы 17-ой Международной научно-практической конференции, г. Новочеркасск, 26-27 сент. 2017г. – Новочеркасск: Лик, 2017. – С. 54-60.
5. Кочергин М.И. Компьютерное моделирование полета тела в атмосфере для образовательных целей // Новые информационные технологии и системы: сб. науч. ст. XIV Междунар. науч.-техн. конф. г. Пенза, 22–24 ноября 2017 г. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. – С. 400-404.