РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В.В. Шеметова

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. С.С. Орлов

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, б-р Гагарина, 20, 664003

E-mail: valentina501@mail.ru

SOLVABILITY OF DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT AND CONSTRUCTION OF THEIR SOLUTIONS IN THE CLASS OF DISTRIBUTIONS

V.V. Shemetova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD S.S. Orlov

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Gagarin boulevard, 20, 664003

E-mail: valentina501@mail.ru

Abstract. *The unique solvability of the initial value problem with the initial function for a differential operator equation with a perturbed argument is studied. Researches are carried out by methods of the theory of the Sobolev–Schwartz generalized functions with values in Banach space. The concept of fundamental solution of differential operator with delay is used. This approach is used to prove the existence and uniqueness of the solution of the considered problem in the class of distributions with a left-bounded support and to construct its generalized solution. We have obtained conditions under which generalized solution are equal to the classical solution of the considered problem.*

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение

$$u'(t) - Au(t) - Bu(t-h) = f(t)\,,\ t > 0\,. \tag{1}$$

Здесь u и f – неизвестная и заданная функции со значениями в банаховом пространстве E соответственно, A, B – линейные непрерывные операторы из E в E, $h > 0$ – заданное число. Для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$u(t) = \varphi(t)\,,\ -h \le t \le 0\,, \tag{2}$$

где $\varphi(t) \in C([-h;0];E)$ известна. Под *классическим* решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u(t) \in C(t \ge -h;E) \cap C^1(t > 0;E)$, обращающую в тождество уравнение (1) и удовлетворяющую начальному условию (2). Для исследования однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2) используется аппарат распределений Соболева–Шварца со значениями в банаховом пространстве [1]. В пространстве $K'_+(E)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем рассматриваемая задача принимает вид сверточного уравнения

$$(\mathrm{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t)\,, \tag{3}$$

с правой частью

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) - A\varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \delta'(t) * \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \varphi(0)\delta(t)\,.$$

Здесь $\theta(t)$ и $\delta(t)$ – функции Хэвисайда и Дирака, I – тождественный оператор в E. Единственным решением уравнения (3) (*обобщенным* решением начальной задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}(t)*\tilde{g}(t)$, где обобщенная оператор-функция $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(\mathrm{I}\delta'(t)-A\delta(t)-B\delta(t-h))*\boldsymbol{\varepsilon}(t)*v(t)=v(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}(t)*(\mathrm{I}\delta'(t)-A\delta(t)-B\delta(t-h))*v(t)=v(t),$$

при любом $v(t)\in K'_{+}(E)$, и называется *фундаментальным* решением дифференциального оператора $\mathrm{I}\delta'(t)-A\delta(t)-B\delta(t-h)$ с отклоняющимся аргументом.

Теорема 1. Пусть A, $B\in L(E)$, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathrm{I}\delta'(t)-A\delta(t)-B\delta(t-h)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=e^{At}\theta(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{A(t-kh)}U_k(t-kh)\theta(t-kh),$$

где e^{At} – операторная экспонента, $\{U_{k-1}(t)\}_{k\in\mathrm{N}}$ – операторно-функциональная последовательность, заданная рекуррентно $U_k(t)=\int_0^t V(s)U_{k-1}(s)ds$, $U_0(t)=\mathrm{I}$, причем $V(t)=e^{-At}Be^{At}$.

Отметим, что $V(0)=B$, операторы $V(t)$ и A образуют пару Лакса, т. е. удовлетворяют уравнению $V'(t)=[V(t),A]$. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [2] оператор-функция $V(t)$ представима равномерно сходящимся в топологии $L(E)$ операторно-функциональным рядом

$$V(t)=B+[B,A]\frac{t}{1!}+[[B,A],A]\frac{t^2}{2!}+[[[B,A],A],A]\frac{t^3}{3!}+\ldots.$$

Здесь $[B,A]=BA-AB$ – коммутатор операторов B и A. Если их суперпозиция коммутативна, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=e^{At}\theta(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{A(t-kh)}\frac{(t-kh)^k}{k!}B^k\theta(t-kh).$$

Этот случай подробно изучен автором в работе [3]. Начальная задача (1), (2) для дифференциально-операторного уравнения специального вида, когда $B=\alpha A$, $\alpha\in\mathrm{R}$, рассмотрена в [4].

В условиях теоремы 1 начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение

$$\tilde{u}(t)=\varphi(t)[\theta(t+h)-\theta(t)]+\sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg[e^{A(t-kh)}U_k(t-kh)\varphi(0)+\int_{-h}^{0}e^{A(t-(k+1)h-s)}U_k(t-(k+1)h-s)B\varphi(s)ds+$$
$$+\int_0^{t-kh}e^{A(t-kh-s)}U_k(t)(t-kh-s)f(s)ds\Bigg]\theta(t-kh)+$$
$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{(k+1)h}^{t}e^{A(t-s)}U_k(t)(t-s)B\varphi(s-(k+1)h)\,ds[\theta(t-kh)-\theta(t-(k+1)h)],$$

которое является регулярным распределением и порождено кусочно-заданной функцией $u=u(t)$, на полуинтервалах $[(k-1)h;kh)$, $k\in\{0\}\cup\mathrm{N}$. Полученная функция является классическим решением начальной задачи (1), (2) при $f(t)\in C([0;+\infty);E)$. Если $f(t)\in C^{n-1}([0;+\infty);E)$, тогда в точках $t=kh$, кратных запаздыванию, где $k=0,1,\ldots,n-1$, решение имеет k порядок сильной гладкости, а в других точках интервала $(0;+\infty)$ порядок гладкости равен n. Установленные факты согласуются с известными сведениями о скалярных уравнениях ($E=\mathrm{R}$) запаздывающего типа [5].

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y'(t) = y(t-1)$, $t \ge 0$, с начальным условием $\varphi(t) = 1$, $-1 \le t < 0$. Здесь $E = \mathrm{R}$, $A = 0$, $B = 1$, $f(t) = 0$. Обобщенное решение данной задачи имеет вид

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(t-k+1)^k \theta(t-k+1).$$

Ее классическое решение задается кусочно следующей формулой

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}(t-k+1)^k, \quad t \in [n, n+1).$$

Предлагаемый подход оказался применим к задаче более общего вида

$$u'(t) - Au(t) - Bu(t-h) = f(t), \; t > 0, \tag{1}$$

$$u(t) = \varphi(t), \; -h \le t < 0, \; u(0) = u_0, \tag{4}$$

где $u_0 \in E$ – заданный вектор, которую можно трактовать как задачу с начальной функцией и начальным значением, либо как задачу с разрывной в точке $t = 0$ начальной функцией. В пространстве $K'_+(E)$ рассматриваемая задача (1), (4) допускает сверточное представление

$$(\mathrm{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)) * \widetilde{u}(t) = \widetilde{h}(t),$$

в котором $\widetilde{h}(t) \in K'_+(E)$ имеет вид

$$\widetilde{h}(t) = f(t)\theta(t) - A\varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \delta'(t) * \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u_0\delta(t).$$

Единственным обобщенным решением начальной задачи (1), (4) является распределение $\widetilde{u}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) * \widetilde{h}(t)$, где оператор-функция $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ из теоремы 1, которое оказывается регулярным и порождено кусочно заданной функцией $u = u(t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и начальному условию (4). Установлено, что, если оператор B необратим, и $(u_0 - \varphi(0)) \in N(B)$, то это решение обладает такими же «хорошими» свойствами, как и классическое решение начальной задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002. – 568 p.
2. Hall B.C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. – New-York: Springer, 2015. – 453 p.
3. Шеметова В.В. Фундаментальное решение одного функционально-дифференциального оператора в банаховом пространстве // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Выпуск 7, Часть I: Материалы Междунар. молодежн. науч. школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2017. – С. 213–214.
4. Орлов С.С. Построение решений в классе распределений дифференциально-операторных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. – С. 107–108.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.