ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

А. О. Шерстобитова
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Т. В. Емельянова
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

SEQUENTIAL PARAMETER ESTIMATION OF THE AUTOREGRESSIVE MODEL WITH CONTINUOUS TIME

A. O. Sherstobitova
Scientific Supervisor: Associated Professor, PhD T.V. Emelyanova
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin st., 36, 634050
E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

Abstract. *This article revisits a sequential approach to the estimation of the parameter in a p-order autoregressive model (AR(p)) with continuous time. There is provided a numerical study to get a results of sequential estimations of the parameter in p-order autoregressive model with continuous time and is computed a stopping rule.*

Введение. В настоящее время существует достаточно много исследований, посвященных задачам асимптотического оценивания [1-3]. Одним из подходов к задачам оценивания в неасимптотической постановке является подход с позиции последовательного анализа, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами остановки.

Пусть наблюдаемый процесс описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t \tag{1}$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, W_t – стандартный p-мерный процесс броуновского движения.

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ \dots \\ x_t^p \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \theta_p & \theta_{p-1} & \dots & \dots & \theta_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix}; \sigma > 0.$$

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии -го порядка ($AR(p)$), описываемого уравнением

$$dx_t^{p-1} = \left(\theta_1 x_t^{p-1} + \dots + \theta_p x_t\right)dt + \sigma dw_t$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}$.

Материалы и методы исследования. Предположим, что процесс авторегрессии (1) устойчив, т.е. все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \dots - \theta_p$ лежат в единичном круге. Пусть $H > 0$.

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК) [4], согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p \qquad (2)$$

При построении последовательного плана будет использоваться лемма [1], дающая оценку нормы уклонения оценки (2) от ее истинного значения.

Лемма 1. Пусть выборочная информационная матрица Фишера M_T невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (2) удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{\theta}_T - \theta\|^2 \le \|M_T^{-2}\| \cdot \|m_T\|^2,$$

где $m_T = \int_0^T X_s dW_s$. Заметим, что в силу леммы 1 [1] $\|M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$ монотонно убывает, поэтому определим длительность наблюдений процесса

$$\tau = \tau(H) = \inf\left\{t > 0 \colon \|M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{H}\right\}, \qquad (3)$$

и последовательную оценку МНК неизвестных параметров

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p. \qquad (4)$$

Последовательный план (3), (4) позволяет контролировать среднеквадратическую точность получаемых оценок за счет выбора порога процедуры H. Длительность процедуры при этом пропорциональна порогу процедуры.

Результаты исследования. Рассмотрим результаты моделирования для процесса авторегрессии первого порядка с непрерывным временем. Моделирование реализовывается при условиях: $\Delta t = 0{,}1, X_0 = 0$, объем выборки $N = 500$, истинное значение оцениваемого параметра $\theta = 0{,}2$. Оценки вычисляются путем усреднения результатов оценивания по 250 реализациям.

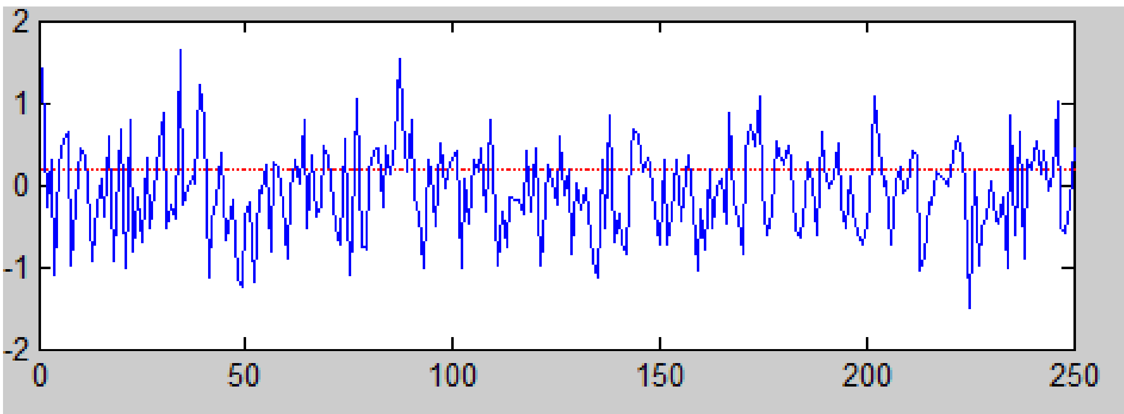

Рис. 1. Отклонение последовательных оценок, вычисленных в случайный момент остановки τ, от истинного значения параметра θ

По результатам моделирования можно говорить о том, что последовательная процедура оценивания с применением правила остановки является эффективной и позволяет получить оптимальные оценки в среднеквадратическом для модели авторегрессии ($AR(p)$) с непрерывным временем.

Также был сделан вывод об асимптотическом распределении оценок. Результаты численного моделирования показали, что полученные оценки распределены нормально: проведена проверка гипотезы о соответствии выборки оценок нормальному распределению с помощью критерия Жака-Бера с уровнем доверия $\gamma = 95\%$.

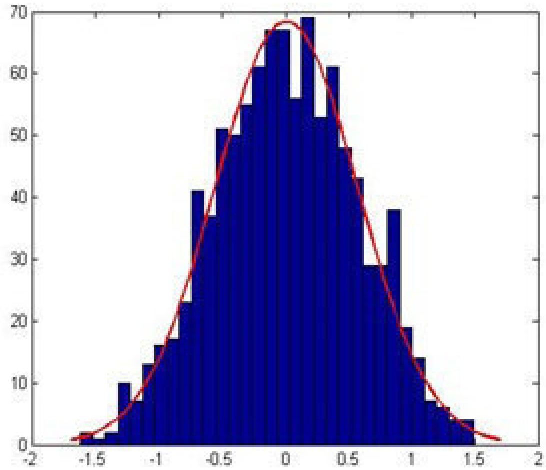

Рис. 2. Полигон частот для последовательных оценок параметра θ, иллюстрирующий принадлежность оценок нормальному распределению

Заключение. Таким образом, в результате проведенного исследования построена последовательная процедура с использованием специального правила остановки. Построенный последовательный план позволяет контролировать среднеквадратическую точность получаемых оценок за счет выбора порога процедуры. Кроме того, получаемые последовательные оценки обладают свойством асимптотической нормальности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии. – Вестник Томского государственного университета: Математика и механика. №5(25). Томск, 2013, с. 12-25.
2. Линьков Ю. Н. Об оценках параметров процессов диффузионного типа. – В кн.: Теория случайных процессов. Вып. 9. Киев: Наук. думка, 1981, с.71-78.
3. Кутоянц Ю. А. Оценивание параметров случайных процессов. Ереван. Изд-во АН АрмССР, 1980.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974.