АНАЛИЗ РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ КООРДИНАТ ДЛЯ СВОБОДНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА

А.В. Гайдучик
Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. А.В. Шаповалов
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пл. Новособорная, 1, 634050
E-mail: gaid.alex.vikt@gmail.com

ANALYSIS OF DEVIDED COORDINATES FOR FREE KLEIN – GORDON EQUATION

A.V. Gaiduchik
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.V. Shapovalov
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Novosobornaja square, 1, 634050
E-mail: gaid.alex.vikt@gmail.com

Abstract. *In the present study, we examined the method of separation of variables in the Klein-Gordon equation, based on full sets of symmetry operators of equation, which was described in papers [1-4]. Separable coordinates presented were analyzed for verification of coordinate transformations with correct inverse formulas determined in the whole space domain of physical variables. Those coordinate systems which do not possess such transformations were modified and the problem of separation of variables was resolved for them. These coordinate systems were called "selected". Corresponding external electromagnetic fields, which admit separation of variables in the Klein – Gordon equation are presented in the selected coordinate systems. The modified coordinate systems form a two – parametric family. We show that the Maxwell equations for the admissible external fields do not depend on the parameters of coordinate systems. Moreover, we expect that the modified coordinate systems will allow us to examine the problem of completeness of solution basises in separable coordinates.*

Введение. В 1972-74 годах была решена задача разделения переменных в уравнении Клейна-Гордона - в серии работ [1 — 4]. Были найдены все типы внешних электромагнитных полей, задаваемых произвольными функциями, допускающих разделение переменных в уравнении Клейна - Гордона, а также криволинейных координат, в которых это разделение производится. В работах приведено свыше 50 наборов разделяющихся криволинейных координат, и соответственно, столько же типов электромагнитных полей. Задача была решена на основе полных наборов операторов симметрии, допускаемых уравнением. Каждому полному набору операторов симметрии уравнения соответствуют координаты, в которых уравнение допускает разделение переменных, и класс внешних полей (задаваемый произвольными функциями), с которым переменные могут быть поделены. Уравнение Клейна - Гордона в произвольной криволинейной системе координат пишем в следующем виде (подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено другое):

$$(g^{kl}P_kP_l - m^2)\psi = 0 \qquad (1)$$

Здесь g^{kl} - метрический тензор, $P_k = i\nabla_k — eA_k$, $k,l = 0,1,2,3$, ∇_k — ковариантная производная по отношению к x^k в пространстве Минковского с метрическим тензором g^{kl}; A_k - ковариантные компоненты потенциала электромагнитного поля, e - заряд электрона, i –мнимая единица, m - масса частицы, ψ - волновая функция частицы. В декартовых координатах будем пользоваться метрикой сигнатуры (+, —, —, —) всюду. Всюду используется естественная система единиц $h = c = 1$.

Новизна проблемы. Был проведен анализ приведенных в работах [1—4] криволинейных систем разделяющихся координат. Проверены известные системы разделяющихся координат для свободного уравнения Клейна-Гордона на предмет наличия определенных во всем пространстве физических переменных формул обратной замены. Для наборов операторов симметрии, которым соответствуют разделяющиеся координаты с не соответствующими требованиям формулами обратной замены, задача разделения переменных была решена заново, и найдены модифицированные системы разделяющихся координат, обладающие требуемым качеством. В модифицированных координатах разделение переменных осуществляется во всех областях пространства - времени.

Проиллюстрируем сказанное. Из [1] известны следующие разделяющиеся координаты для свободного *(A_k=0)* уравнения (1) (здесь нижние индексы координат u_i введены для удобства):

$$\begin{gathered} u_0 = x^1 \\ u_1 = x^2 \\ u_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\varepsilon\frac{x^0 + x^3}{x^0 - x^3}\right) \\ u_3 = \sqrt{\varepsilon(x^0)^2 - (x^3)^2}, \end{gathered} \tag{2}$$

Где ε - безразмерный параметр, подбираемый так, чтобы в каждой области пространства – времени формулы (2) были определены. Параметр ε можно выбрать следующей функцией (либо пропорциональной ей с неким положительным коэффициентом):

$$\varepsilon = \mathrm{sign}((x^0)^2 - (x^3)^2) = \mathrm{sign}\left(\frac{x^0+x^3}{x^0-x^3}\right) \tag{3}$$

Были вычислены формулы обратной замены к (2). Оказывается, что они зависят от того, в какой области пространства – времени мы вычисляем обратные формулы, и имеет смысл выделить 4 области – см. Рис 1.

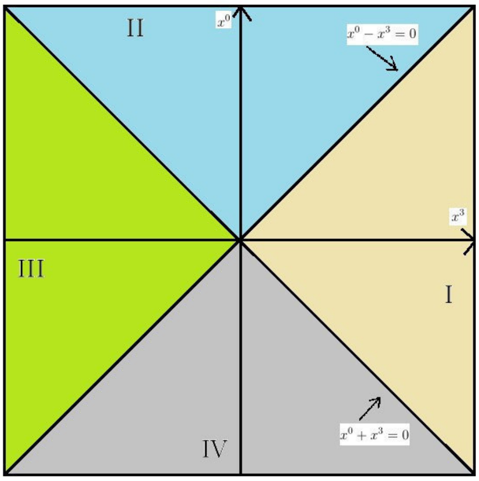

Рис. 1. Области пространства – времени, в которых формулы замены, обратной к (2), различны

При этом получается, например, что в областях I и III параметр (3) принимает одинаковое значение $\varepsilon = -1$, однако формулы обратной замены получаются различными в этих областях, т.е.

параметр не позволяет единообразно записать обратную замену. Аналогичное рассуждение имеет место для областей II и IV. Отсюда следует необходимость модификации систем разделяющихся координат, соответствующих пространственно - подобным и времени - подобным областям пространства-времени. Набор операторов симметрии для свободного уравнения (1), которому в [1] сопоставлены разделяющиеся координаты (2), имеет вид $\{p_1, p_2, L_{30}\}$, где $p_j = i\frac{\partial}{\partial x^j}$, $L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$. Для этого набора задача разделения переменных была решена заново, более общим образом, и получены модифицированные разделяющиеся координаты для свободного уравнения (1):

$$
\begin{aligned}
u_0 &= x^1,\\
u_1 &= x^2,\\
u_2 &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\frac{x^0+x^3}{x^0-x^3}\right),\\
u_3 &= \sqrt{\frac{(x^0)^2-(x^3)^2}{\alpha^2-\beta^2}},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где α и β - безразмерные параметры ($\alpha^2 \neq \beta^2$), которые позволяют единообразно написать обратную замену во всех областях I-IV (Рис.1):

$$
\begin{aligned}
x^3 &= u_3(\alpha \sinh u_2 + \beta \cosh u_2),\\
x^0 &= u_3(\alpha \cosh u_2 + \beta \sinh u_2).
\end{aligned}
$$

Набор операторов симметрии $\{p_1, p_2, L_{30}\}$ допускает потенциал вида $A_l((x^0)^2 - (x^3)^2)$. Это означает, что оператор уравнения (1) с таким потенциалом по-прежнему будет коммутировать с набором $\{p_1, p_2, L_{30}\}$. Как следствие, по теореме о разделении переменных, приведенной в [1], координаты (2) и (4) – разделяющиеся для уравнения (1) с произвольным потенциалом вида $A_l((x^0)^2 - (x^3)^2)$.

Значение. Модифицированные разделяющиеся координаты (4) позволяют проводить разделение переменных единообразно как в пространственно - подобных областях, так и во времени - подобных. Ожидается, что полученные модифицированные системы координат (4) позволят исследовать проблему полноты для решений уравнения Клейна - Гордона, получающихся в разделенных координатах.

Полученные результаты. Получены искомые системы разделяющихся координат (4) в более общей форме, чем (2). Для класса электромагнитных полей, допускающих разделение переменных в классе модифицированных криволинейных системах координат, получены явные выражения. Выписаны уравнения Максвелла для этих полей в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. Разделение переменных в уравнении Клейна – Гордона I // Известия ВУЗов, Физика. – 1973, Ноябрь.- №11. - стр. 66-72.
2. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. Разделение переменных в уравнении Клейна – Гордона II // Известия ВУЗов, Физика. – 1973, Декабрь.- №12. - стр. 45-52.
3. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. Разделение переменных в уравнении Клейна – Гордона III // Известия ВУЗов, Физика. – 1974, Июнь.- №6. - стр. 74-78.
4. Багров В.Г., Мешков А.Г., Шаповалов В.Н., Шаповалов А.В. Разделение переменных в уравнении Клейна – Гордона IV // Известия ВУЗов, Физика. – 1975, Март.- №3. - стр. 152-154.