

УДК 621.52+511.52

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

**Аветисян Армине Геворговна,**

д-р техн. наук, доцент кафедры информационных технологий  
и автоматизации Государственного инженерного университета Армении  
(Политехник), Армения, 0009, Ереван, Терян ул., 105.  
E-mail: arm.avetisyan@seua.am

**Гюльзаян Луиза Самвеловна,**

аспирант кафедры информационных технологий и автоматизации  
Государственного инженерного университета Армении (Политехник),  
Армения, 0009, Ереван, Терян ул., 105. E-mail: lgyulzadyan@gmail.com

Актуальность работы обусловлена широким применением задач параметрического линейного программирования в науке, технике, экономике и отсутствием эффективных методов решения исследуемого класса задач.

**Цель исследования:** разработка эффективного алгоритма решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции, с параметрическими коэффициентами в правых частях ограничений, с параметрическими коэффициентами ограничений.

**Методы исследования:** предложенный метод основан на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова и симплекс преобразованиях решения задач линейного программирования. Используются дифференциально-падеевские восстанавливающие соотношения.

**Результаты:** приведено решение модельного примера с параметрическими коэффициентами целевой функции и ограничений, а также с параметрическими коэффициентами в правых частях ограничений нижеизложенным методом. Алгоритм практически может быть применен к различным типам задач параметрического программирования как с линейными зависимостями от параметра, так и с нелинейными.

### Ключевые слова:

Задачи математического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений, дифференциальные преобразования, интервалы оптимальности и допустимости, условия оптимальности и допустимости, симплекс преобразования.

Несмотря на широкое применение задач параметрического программирования в науке и технике, методы их решения немногочисленны. Основной подход заключается в применении модифицированного симплекс метода и решении систем неравенств, что, во-первых, усложняет автоматизацию вычислительных процедур, во-вторых, позволяет решить лишь задачи с параметрическими коэффициентами в целевой функции и правых частях ограничений [1–4]. При параметрическом изменении коэффициентов ограничений, т. е. в тех случаях, когда любой из векторов текущего базиса имеет параметрическую составляющую, параметрическое исследование данным методом невозможно [1].

В работах [5, 6] на основе симплекс и дифференциальных преобразований рассмотрены методы решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции и правых частей ограничений, позволяющие организовать простые итерационные вычисления и исключающие решение систем неравенств. Обобщая подход, примененный в [5, 6], в данной работе на основе дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова [7–10] предложен эффективный метод решения параметрических задач математического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений.

Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования:

$$f(X) = c_1(t) \cdot x_1 + c_2(t) \cdot x_2 + \dots + c_n(t) \cdot x_n \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

$$D: \begin{cases} A(t) \cdot X \leq b(t) \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где  $X=(x_1, \dots, x_n)^T$  –  $n$ -мерный вектор неизвестных переменных, который удовлетворяет ограничениям (2), образующих множество допустимых решений задачи;  $b(t)=(b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t))^T$  и  $C(t)=(c_1(t), \dots, c_n(t))^T$  – параметрические векторы свободных членов ограничений и коэффициентов целевой функции соответственно;  $A(t)_{n \times m}=(a_{ij}(t))$ ,  $i=1 \dots n$ ,  $j=1 \dots m$  –  $n \times m$ -размерная матрица параметрических коэффициентов ограничений. Функциональная зависимость от параметра  $t$  может быть как линейной, так и нелинейной.

Используя симплекс-метод решения задач линейного программирования, выполним симплекс-преобразования на основе составленных таблиц [1, 3] согласно следующим выражениям:

$$a_{ij}^{(q)}(t) = a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 i_0}^{(q-1)}(t), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (3)$$

$$a_{ij}^{(q)}(t) = a_{ij}^{(q-1)}(t) - (a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) \cdot a_{j_0 i_0}^{(q-1)}(t)) / a_{j_0 j_0}^{(q-1)}(t),$$

$$i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (4)$$

$$X_{bi_0}^{(q)}(t) = X_{bi_0}^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad (5)$$

$$X_{bi}^{(q)}(t) = X_{bi}^{(q-1)}(t) - X_{bi_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad (6)$$

$$\Delta_j^{(q)}(t) = \Delta_j^{(q-1)}(t) - \Delta_{j_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (7)$$

где через  $i_0, j_0$  и  $q$  обозначены ведущая строка, ведущий столбец и номер итерации соответственно.

В вышеуказанных выражениях по отношению к элементам с функциональными зависимостями применим прямые дифференциальные преобразования [7–10], например дифференциально-падеевские преобразования [7]:

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[ \frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t=t_0}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \bar{\tau} \quad x(t) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_m \cdot \tau_m}{1 + b_1 \cdot \tau + \dots + b_n \cdot \tau_n} + \rho(\tau), \quad (8)$$

где  $X(K)$  – изображение оригинала  $x(t)$ ;  $H$  – масштабный коэффициент;  $t_0$  – центр аппроксимации;  $\tau = tH^{-1}$  – аргумент относительности и  $\rho(\tau)$  остаточный член, который в частном случае может быть равным 0.

Учитывая некоторые выражения алгебры дифференциальных (Д-) преобразований, симплекс-преобразования (3)–(7) переведем в область дифференциальных изображений.

Для (3), (4) изображения вычисляются согласно (9)–(15):

$$a_{i_0j}^{(q)}(K) = \left( a_{i_0j}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^K a_{i_0j}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0j_0}^{(q-1)}(p) \right) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(0), \quad j = \overline{1, n+m}, K = \overline{0, \infty}, \quad (9)$$

$$d_{ij}^{(q-1)}(t) = a_{i_0j}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (10)$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(t) = d_{ij}^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (11)$$

$$a_{ij}^{(q)}(t) = a_{ij}^{(q-1)}(t) - b_{ij}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Для выражений (10)–(12) имеем:

$$d_{ij}^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^K a_{i_0j}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(p), \quad (13)$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(K) = \frac{d_{ij}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^K b_{ij}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (14)$$

$$a_{ij}^{(q)}(K) = a_{ij}^{(q-1)}(K) - b_{ij}^{(q-1)}(K), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (15)$$

Соответственно, (5), (6) в области изображений имеют следующий вид:

$$X_{bi_0}^{(q)}(K) = \frac{X_{bi_0}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^K X_{bi_0}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad i = \overline{1, n}, K = \overline{0, \infty}, \quad (16)$$

$$f_i^{(q-1)}(t) = X_{bi_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$f_i^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^K X_{bi_0}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(p), \quad i \neq i_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (18)$$

$$g_i^{(q-1)}(t) = f_i^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad (19)$$

$$g_i^{(q-1)}(K) = \frac{f_i^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^K g_i^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (20)$$

$$X_{bi}^{(q)}(K) = X_{bi}^{(q-1)}(K) - g_i^{(q-1)}(K). \quad (21)$$

Для (7) дискреты вычисляются согласно (22)–(26):

$$p_j^{(q-1)}(t) = a_{i_0j}^{(q-1)}(t) \cdot \Delta_{j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (22)$$

$$p_j^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^K a_{i_0j}^{(q-1)}(K-p) \cdot \Delta_{j_0}^{(q-1)}(p), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (23)$$

$$r_j^{(q-1)}(t) = p_j^{(q-1)}(t) / a_{i_0j_0}^{(q-1)}(t), \quad (24)$$

$$r_j^{(q-1)}(K) = \frac{p_j^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^K r_j^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (25)$$

$$\Delta_j^{(q)}(K) = \Delta_j^{(q-1)}(K) - r_j^{(q-1)}(K). \quad (26)$$

Если среди нулевых дискрет вектора симплекс разностей есть отрицательные значения, то согласно условию оптимальности симплекс-метода выполняется следующая итерация и базисной становится переменная, соответствующая наибольшей по абсолютной величине нулевой дискреты вектора  $\Delta(t)$ . Если вектор  $\Delta(0)$  не содержит отрицательных элементов, то в точке  $t=t_0$  оптимальное решение найдено. Далее на основе вычисленных дискрет восстанавливаются оригиналы для центра аппроксимации  $t_0$  по обратному дифференциально-падеевскому (ДП)-преобразованию (8). Согласно условиям оптимальности и допустимости определяется интервал значений параметра  $t$ , для которых полученное при  $t=t_0$  решение остается оптимальным и допустимым. Положим, что эти значения заключены в интервале  $(0, t_1)$ . Это означает, что при  $t$ , превышающих  $t_1$ , решение будет неоптимальным и недопустимым. Следовательно, для

$t=t_1$  необходимо найти новое решение, которое будет оптимальным и допустимым в интервале  $(t_1, t_2)$ . Вышеуказанный процесс повторяется до нахождения значения  $t$ , для которого решения не существует или предыдущее решение не изменяется.

Интервалы допустимости и оптимальности определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\begin{aligned} \bar{t} &\rightarrow \max & \underline{t} &\rightarrow \min \\ -\Lambda_j(\bar{t}) &\leq 0, j=1\dots n \text{ и } \Lambda_j(\underline{t}) \geq 0, j=1\dots n, \\ \bar{t}' &\rightarrow \max & \underline{t}' &\rightarrow \min \\ -\beta_j(\bar{t}') &\leq 0, j=1, \dots, m \text{ и } \beta_j(\underline{t}') \geq 0, j=1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_j(t)$ ,  $j=1, \dots, n$  и  $\beta_j(t)$ ,  $j=1, \dots, m$  – параметрические элементы вектора симплекс-разностей  $\Delta(t)$ , соответствующие небазисным переменным, и параметрические элементы вектора базисных переменных  $X_b(t)$  соответственно.  $\bar{t}'(\bar{t}'')$  – верхняя граница интервала оптимальности (допустимости), т. е. наибольшее значение параметра  $t$ , при превышении которого по крайней мере одно из условий оптимальности (допустимости) нарушается;  $\underline{t}'(\underline{t}'')$  – нижняя граница интервала оптимальности (допустимости), т. е. наименьшее значение параметра  $t$ , при котором решение оптимально (допустимо):

- 1) если  $\bar{t}'' < \bar{t}'$ , то первым нарушается условие оптимальности и в качестве новой точки аппроксимации выбирается  $\bar{t} = \bar{t}'$ ;
- 2) если  $\bar{t}'' < \bar{t}'$ , то первым нарушается условие допустимости, следовательно, новый центр аппроксимации  $\bar{t} = \bar{t}''$ .

Двойственная задача исходной задачи (1), (2) имеет следующий вид:

$$\varphi(Y) = b_1(t)y_1 + b_2(t)y_2 + \dots + b_m(t)y_m \rightarrow \min_{x \in D}, \quad (27)$$

$$D: \{-A^T(t)y \leq -C(t)\}. \quad (28)$$

Используя теоремы двойственности [1–4], из результатов решения прямой задачи (1), (2) можно получить решение двойственной задачи (27), (28): значения двойственных переменных  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$  и целевой функции  $f^*(X)=\varphi^*(Y)$ .

Рассмотрим следующую задачу параметрического математического программирования [1]

$$z = (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3},$$

$$\begin{cases} (1+t)x_1 + 2x_2 + x_3 \leq (40-t) \\ (3-2t)x_1 + 2x_3 \leq (60+2t) \\ (1+3t)x_1 + 4x_2 \leq (30-7t) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача в области Д-преобразований при  $t=t_0=t_0=0$  и  $K=2$  имеет следующий вид:

$$A^0(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^0(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^0(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_B^0(0) = (x_4, x_5, x_6) = (40, 60, 30),$$

$$X_B^0(1) = (-1, 2, -7), \quad X_B^0(2) = (0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(0) = (-3, -2, -5, 0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(1) = (6, 2, -5, 0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Выбрав в качестве ведущей строки  $i_0=2$  и ведущего столбца  $j_0=3$ , вычислим  $A^1(K)$  дискреты согласно выражениям (9), (13)–(15):

$$A^1(0) = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^1(1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее по (16)–(21) определяются дискреты базисных переменных:

$$X_B^1(0) = (x_4, x_3, x_6) = (10, 30, 30),$$

$$X_B^1(1) = (-2, 1, -7), \quad X_B^1(2) = (0, 0, 0).$$

Наконец, согласно выражениям (22)–(26) определяются дискреты вектора симплекс-разностей:

$$\Delta^1(0) = (4, 5, -2, 0, 0, 2, 5, 0),$$

$$\Delta^1(1) = (8, 5, 2, 0, 0, 2, 5, 0),$$

$$\Delta^1(2) = (-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Выбрав в качестве ведущей строки  $i_0=1$  и ведущего столбца  $j_0=2$ , определим дискреты  $A^2(K)$ :

$$A^2(0) = \begin{bmatrix} -0,25 & 1 & 0 & 0,5 & -0,25 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, по (17)–(22) и (23)–(27) определяются дискреты базисных переменных и симплекс-разностей:

$$\begin{aligned} X_B^2(0) &= (x_2, x_3, x_6) = (5, 30, 10), \\ X_B^2(1) &= (-1, 1, -3), \quad X_B^2(2) = (0, 0, 0), \\ \Delta^2(0) &= (4, 0, 0, 1, 2, 0), \\ \Delta^2(1) &= (11, 0, 0, -1, 3, 0), \\ \Delta^2(2) &= (-7, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

По вычисленным дискретам восстанавливаются оригиналы, согласно обратному ДП-преобразованию (8) при центре аппроксимации  $t_v=0$  и масштабном коэффициенте  $H=1$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{vmatrix} -0,25+t & 1 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5-t & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 2-t & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \\ X_B(t) &= (x_2, x_3, x_6) = (5-t, 30+t, 10-3t), \\ \Delta(t) &= (-7t^2+11t+4, 0, 0, 1-t, 3t+2, 0), \\ f(X) &= 160+3t. \end{aligned}$$

Решение двойственной задачи:

$$\varphi(Y) = 160+3t, \quad Y(t) = (y_1, y_2, y_3) = (1-t, 3t+2, 0).$$

Поскольку в точке  $t_v=0$  нулевые дискреты вектора симплекс-разностей не содержат отрицательных элементов, то оптимальное решение найдено и необходимо определить множество значений параметра  $t$ , при котором полученное решение остается оптимальным и допустимым. Верхние границы оптимальности и допустимости определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\begin{aligned} \bar{t} \rightarrow \max_t \quad & \bar{t} \rightarrow \max_t \\ \begin{cases} 7t^2-11t-4 \leq 0 \\ t-1 \leq 0 \\ -3t-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{t} = 1 \quad \text{и} \quad & \begin{cases} t-5 \leq 0 \\ -t-30 \leq 0 \Rightarrow \bar{t} = 10/3 \\ 3t-10 \leq 0, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Для следующего оптимального плана примем  $t_1=1$  и выполним соответствующие итерации согласно вышеизложенным выражениям:

$$\begin{aligned} A^0(0) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ A^0(1) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ A^0(2) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ X_B^0(0) &= (x_4, x_5, x_6) = (39, 62, 23), \end{aligned}$$

$$X_B^0(1) = (-1, 2, -7), \quad X_B^0(2) = (0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(0) = (3, 0, -10, 0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(1) = (6, 2, -5, 0, 0, 0),$$

$$\Delta^0(2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$i_0 = 2, \quad j_0 = 3,$$

$$A^1(0) = \begin{vmatrix} 1,5 & 2 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A^1(1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A^1(2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$X_B^1(0) = (x_4, x_3, x_6) = (8, 31, 23),$$

$$X_B^1(1) = (-2, 1, -7), \quad X_B^1(2) = (-2, 1, -7),$$

$$\Delta^1(0) = (8, 0, 0, 0, 5, 0),$$

$$\Delta^1(1) = (-1, 5, 2, 0, 0, 2, 5, 0),$$

$$\Delta^1(2) = (-5, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Оригиналы:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1,5+2(t-1) & 2 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0,5-(t-1) & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 4+3(t-1) & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$X_B(t) = (8-2(t-1), 31+(t-1), 23-7(t-1)),$$

$$\Delta_B(t) = \begin{pmatrix} \frac{8-28,166666(t-1)}{1-3,333333(t-1)}, \\ 2(t-1), 0, 0, 5+2,5(t-1), 0 \end{pmatrix}.$$

Интервалы оптимальности и допустимости определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\begin{aligned} \bar{t} \rightarrow \max_t \quad & \bar{t} \rightarrow \max_t \\ \begin{cases} 5t^2-8,5t-4,5 \leq 0 \\ 1-t \leq 0 \\ -1-t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{t} = 2,1238 \quad \text{и} \quad & \begin{cases} 2t-10 \leq 0 \\ -t-30 \leq 0 \\ 7t-30 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{t} = 30/7, \\ 1 \leq t \leq 2,1238. \end{aligned}$$

Для 3-го интервала имеем:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{-1+4t} & 0 & \frac{2}{-1+4t} & \frac{-1}{-1+4t} & 0 \\ 0 & \frac{-6+4t}{-1+4t} & 1 & \frac{-3+2t}{-1+4t} & \frac{1+t}{-1+4t} & 0 \\ 0 & \frac{-8+4t}{-1+4t} & 0 & \frac{-2+6t}{-1+4t} & \frac{1+3t}{-1+4t} & 1 \end{vmatrix},$$

$$X_B(t) = (x_1, x_3, x_6) =$$

$$= \left( \frac{20-4t}{-1+4t}, \frac{-60+145t}{-1+4t}, \frac{-16t^2+71t-50}{-1+4t} \right),$$

$$\Delta_B(t) = \left( 0, \frac{28t^2-44t-16}{-1+4t}, \right.$$

$$\left. 0, \frac{10t^2-17t-9}{-1+4t}, \frac{-5t^2+11t+7}{-1+4t}, 0 \right),$$

$$\begin{array}{l} \bar{t}' \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} -28t^2+44t+16 \leq 0 \\ -10t^2+17t+9 \leq 0 \\ 5t^2-11t-7 \leq 0 \\ 1-4t \end{array} \right. \\ \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} \bar{t}'' \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} -20+4t \leq 0 \\ -145t+60 \leq 0 \\ 16t^2-71t+50 \leq 0 \\ 1-4t \leq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow t'' = 3,559, \end{array}$$

$$2,1238 \leq t \leq 3,5596.$$

Решение для  $t \geq 3,5596$  интервала приведено ниже:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4-2t}{1+3t} & 0 & 1 & -0,5 & \frac{0,5-2t}{1+3t} \\ 0 & \frac{6-4t}{1+3t} & 1 & 0 & 0,5 & \frac{-1,5+t}{1+3t} \\ 1 & \frac{4}{1+3t} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+3t} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_B(t) = \left( 0, \frac{26t^2-38t+16}{1+3t}, 0, \right.$$

$$\left. 0, \frac{5t^2-8,5t-4,5}{1+3t}, 2,5t+2,5 \right),$$

$$X_B(t) = (x_4, x_3, x_1) =$$

$$= \left( \frac{8t^2-35,5t+25}{1+3t}, \frac{-4t^2+131,5t+15}{1+3t}, \frac{30-7t}{1+3t} \right),$$

$$\begin{array}{l} \bar{t}' \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} -8t^2+35,5t-25 \leq 0 \\ 4t^2-131,5t+15 \leq 0 \\ 7t-30 \leq 0 \\ -1-3t \leq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow t' = 30/7 = 4,2857 \text{ и} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{t}'' \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} -26t^2+38t-16 \leq 0 \\ -5t^2+8,5t+4,5 \leq 0 \\ -2,5t-2,5 \leq 0 \\ -1-3t \leq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow t' \rightarrow \infty, \end{array}$$

$$3,5596 \leq t \leq 4,2857.$$

Наконец, для  $t_4 > 4,2857$  имеем:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4-2t}{1+3t} & 0 & 1 & -0,5 & \frac{0,5-2t}{1+3t} \\ 0 & \frac{6-4t}{1+3t} & 1 & 0 & 0,5 & \frac{-1,5+t}{1+3t} \\ 1 & \frac{4}{1+3t} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+3t} \end{vmatrix},$$

$$X_B(t) = (x_4, x_3, x_1) =$$

$$= \left( \frac{8t^2-35,5t+25}{1+3t}, \frac{-4t^2+131,5t+15}{1+3t}, \frac{30-7t}{1+3t} \right),$$

$$\Delta_B(t) = \left( 0, \frac{26t^2-38t+16}{1+3t}, 0, \right.$$

$$\left. 0, \frac{5t^2-8,5t-4,5}{1+3t}, 2,5t+2,5 \right),$$

$$\frac{30-7t}{1+3t} \leq 0,$$

следовательно в интервале  $4,2857 \leq t \leq \infty$  задача не имеет решения. Окончательное решение приведено в таблице.

#### Выводы

Изложен эффективный алгоритм решения задач линейного параметрического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений, основанный на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова. Отметим также, что предложенный алгоритм практически может быть применен к различным типам задач параметрического программирования как с линейными зависимостями от параметра, так и с нелинейными.

**Таблица.** Решение прямой задачи

| $t$                   | $x_1(t)$                | $x_2(t)$ | $x_3(t)$                       | $z(t)$                                   |
|-----------------------|-------------------------|----------|--------------------------------|------------------------------------------|
| $0 < t < 1$           | 0                       | $5-t$    | $30+t$                         | $7t^2+143t+160$                          |
| $1 < t < 2,1238$      | 0                       | 0        | $30+t$                         | $5t^2+155t+150$                          |
| $2,1238 < t < 3,5596$ | $\frac{20-4t}{-1+4t}$   | 0        | $\frac{-60+145t}{-1+4t}$       | $\frac{749t^2+293t-240}{-1+4t}$          |
| $3,5596 < t < 4,2857$ | $\frac{30-7t}{1+3t}$    | 0        | $\frac{-4t^2+131,5t+15}{1+3t}$ | $\frac{-20t^3+679,5t^2+381,5t+15}{1+3t}$ |
| $t > 4,2857$          | Задача не имеет решений |          |                                |                                          |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 2005. – 912 с.
2. Dantzig G.B. Linear Programming: Theory and Extensions. – New York: Springer, 2003. – 448 p.
3. Sinha S.M. Mathematical Programming: Theory and Methods. – Elsevier Science, 2006. – 572 p.
4. Гасс С. Линейное Программирование. – М.: Физматгиз, 1961. – 305 с.
5. Гюльзаян Л. Метод решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции, основанный на дифференциальных преобразованиях (на армянском) // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научных трудов ГИУА. – Ереван, 2012. – Вып. 1. – С. 341–347.
6. Гюльзаян Л. К методу решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции и свободных членов ограничений, основанному на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. – 2011. – Вып. 14. – Т. 2. – С. 130–137.
7. Пухов Г. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова Думка, 1980. – 419 с.
8. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 158 с.
9. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова Думка, 1990. – 230 с.
10. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.

Поступила 09.09.2013 г.

UDC 621.52+511.52

## METHOD FOR SOLVING PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMS

Armine G. Avetisyan,

Dr. Sc., State Engineering University of Armenia (Polytechnic), Republic of Armenia, 0009, Yerevan, Teryan Str., 105. E-mail: arm.avetisyan@seua.am

Luiza S. Gyulzadyan,

State Engineering University of Armenia (Polytechnic), Republic of Armenia, 0009, Yerevan, Teryan Str., 105. E-mail: lgyulzadyan@gmail.com

*The relevance of the work is caused by the extensive use of parametric linear programming problems in science, engineering, economics and the lack of effective methods to solve the researched class of problems.*

**The main aim of the study** is to develop an efficient algorithm for solving linear programming problems with parametric changes in coefficients of goal function and constraints, right-hand sides of constraints as well.

**The methods used in the study:** the proposed method is based on G.E. Pukhov's differential transforms and simplex transformations for linear programming. Reverse transforms are performed by differential Pade restoring relations.

**The results:** The paper introduces the solution of modeling example with parametric changes in coefficients of goal function and constraints, right-hand sides of constraints by below described method. The algorithm can be practically applied to various types of parametric programming problems both with linear and non-linear dependence on the parameters.

### Key words:

Parametric mathematical programming problems with parametric coefficients of constraints, differential transformations, optimality and feasibility conditions, optimality and feasibility intervals, simplex transformations.

## REFERENCES

1. Takha H. *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction into operations research]. Moscow, Mir, 2005. 912 p.
2. Dantzig G.B. *Linear Programming: Theory and Extension*. New York, Springer, 2003. 448 p.
3. Sinha S.M. *Mathematical Programming: Theory and Methods*. Elsevier Science, 2006. 572 p.
4. Gass S. *Lineynoe Programirovanie* [Linear Programming]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 305 p.
5. Gyulzadyan L. Metod resheniya zadach lineynogo programirovaniya s parametricheskimi koeffitsientami tselevoy funktsii, osnovanny na differentsialnykh preobrazovaniyakh [A method for solving parametric linear programming problems (in Armenian)]. *Modelirovanie, optimizatsiya, upravlenie: sb. nauchnykh trudov GIUA* [Proc. Modeling, optimization, controlling]. Erevan, 2012, no. 1, pp. 341–347.
6. Gyulzadyan L. K методу решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции и свободных членов ограничений, основанному на дифференциальных преобразованиях. [A method for solving mathematical programming problems with parametric changes in the goal function based on differential transforms]. *Vestnik GIUA*, 2011, vol. 2, no. 14, pp. 130–137.
7. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya funktsiy i uravneniy* [Differential transforms of functions and equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1980. 419 p.
8. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Differential transforms and mathematical modeling of physical processes]. Kiev, Naukova Dumka, 1986. 158 p.
9. Pukhov G.E. *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectra and models]. Kiev, Naukova Dumka, 1990. 230 p.
10. Simonyan S.O., Avetisyan A.G. *Prikladnaya teoriya differentsialnykh preobrazovaniy* [Applied theory of differential transforms]. Erevan, Chartaraget, 2010. 361 p.