ИНРАНЖИРОВАНИЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ СЛАБЫХ ПОРЯДКОВ

Е.Ю. Емельянова
Томский политехнический университет
zeta@tpu.ru

Целью любой задачи выбора как проблемы агрегирования индивидуальных суждений о порядке предпочтений на конечном множестве альтернатив является определение оптимального итогового ранжирования β_{fin}, согласованного со всеми исходными отношениями предпочтения.

Упорядочение альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называемое *отношением предпочтения* λ на множестве A предполагает использование понятий *слабого порядка* $\lambda = (a_1 \sim a_2 \succ \ldots \sim a_n)$, обладающего рядом свойств, представленных в таблице 1.

Таблица 1. Основные свойства бинарных отношений

Свойство	Формальная запись
Рефлексивность	$(a_i, a_i) \in \lambda, \ \forall i$
Антирефлексивность	$(a_i, a_i) \notin \lambda, \ \forall i$
Симметричность	$(a_i, a_j) \in \lambda \Rightarrow (a_j, a_i) \in \lambda \ \forall i, j$
Антисимметричность	$(a_i, a_j) \in \lambda \wedge (a_j, a_i) \in \lambda \Rightarrow a_i = a_j$
Асимметричность	$(a_i, a_j) \in \lambda \Rightarrow (a_j, a_i) \notin \lambda$
Транзитивность	$(a_i, a_j) \in \lambda \wedge (a_j, a_k) \in \lambda \Rightarrow (a_i, a_k) \in \lambda$

Выполнение четырёх условий при $i, j = 1, \ldots, n$: $a_i \in A_k \wedge a_j \notin A_k \Rightarrow a_i \succ a_j$; (1) $a_i, a_j \in A_k \vee a_i, a_j \notin A_k \Rightarrow a_i \sim a_j$; (2) $a_i \notin A_k \wedge a_j \in A_k \Rightarrow a_i \prec a_j$; (3) $a_i, a_j \in A_k$ соседние натуральные числа $\Rightarrow j \equiv i + 1$, (4) позволяет ввести отношение предпочтения, наведенное интервалом I_k называемое *инранжированием* λ_k, $k = 1, \ldots m$. Инранжирование обладает определенной структурой слабого порядка $\lambda = A_k \succ \bar{A}_k$, при которой дискретные значения представлены в виде интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{m}$ и записаны через соответствующие индексы элементов. Интервал I_k представляем как два непересекающихся подмножества, характеризующих классы толерантностей A_k и $\bar{A}_k$, где элементы, принадлежащие интервалу, соответствуют подмножеству A_k, а все остальные принадлежат $\bar{A}_k$, при чем $A_k \cap \bar{A}_k = \varnothing$. Таким образом, входной профиль может содержать m-инранжирований $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$.

При анализе профиля Λ сами отношения предпочтения не подвергаются обработке – функция *расстояния* обеспечивает основные данные, на которых уже работают разные аналитические аппараты [1]. В нашем случае используется рекурсивный алгоритм ветвей и границ Recursall [2]. Применим понятие расстояния к определению согласованного β_{fin}, при чем $\beta_{fin} = \rho \cup \tau$. Математической моделью для построения отношений предпочтения могут служить точки геометрического пространства бинарных отношений. Итоговым ранжированием β_{fin} является точка, наиболее согласующаяся с профилем Λ и расположенная на минимальном расстоянии от него, для которой $D_u = D_{least}$ согласно алгоритму Recursall. В большинстве случаев в метрической модели эту роль выполняет медиана или среднее значение. Однако даже в классическом понимании медиана не обязательно определяется однозначно и единственным образом, хотя среднее всегда единственно, но оно далеко не всегда является самым оптимальным решением [3].

Рассмотрим структуру пространства слабых порядков и изображение геометрии отношений предпочтения. Мощность слабых порядков рассчитывается по формуле: $\left|\Omega_0\right| = \sum_{q=0}^{n} q! S_{n,q}$ (5).

Комбинаторные числа Стирлинга 2-го рода $S_{n,q}$ позволяют определить количество неупорядоченных разбиений n-элементного множества на q-непустых подмножеств. Значение q задает структуру пространства отношений предпочтения λ, определяя количество непересекающихся подмножеств множества A, задавая количество $(q-1)$-символов $\succ$ в рассматриваемом λ. В таблице 2 представлены значения $S_{n,q}$ необходимые для расчета мощностей слабых порядков.

Таблица 2. Комбинаторные числа как свойства слабых порядков

n	q: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	**3**	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	**7**	6	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	**15**	25	10	1	0	0	0	0	0
6	0	1	**31**	90	65	15	1	0	0	0	0
7	0	1	**63**	301	350	140	21	1	0	0	0
8	0	1	**127**	966	1701	1050	266	28	1	0	0
9	0	1	**255**	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0
10	0	1	**511**	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Каждое из слагаемых выражения (5) определяет конкретную геометрию пространства и соответствующие ему свойства бинарных отношений [4].

Мощность подпространства строгих порядков задается $n!$-линейными порядками на A, на рисунке представлены как вершины усечённых октаэдров, идеально подходящих для графического представления пространств слабых порядков, начиная с $n = 4$.

Мощность подпространства порядков, содержащих один символ толерантности ~ может быть рассчитана как общее число ребер усечённого октаэдра по формуле: $\left|\Omega_{\mathrm{m}}\right| = \dfrac{n!(n-1)}{2}$. С геометрической точки зрения формирует подпространство, заключенное между точками середин ребер усечённых октаэдров, пример ранжирований подпространства Ω_{m}: 235(14) и 32(14)5 (рисунок 1).

Мощность подпространства порядков, содержащих один символ строго порядка $\succ$ и удовлетворяющих (1)–(3) условиям, может быть рассчитана через $S_{n,q}$ или мощность множества всех подмножеств, $P(A) = 2^n$ по формуле: $\left|\Omega_1\right| = 2S_{n,2} + 1 = S_{n+1,2} = 2^n - 1$. Ω_1 включает в себя подпространство инранжирований, мощность которого определяется *треугольными числами* T_n и рассчитываются по формуле: $\left|\Omega_2\right| = T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Каждое инранжирование является порождением некого набора исходных элементов его образующих, будем называть *порождающим множеством* Ψ_k. Мощность порождающего множества для индивидуального инранжирования определяется $|\Psi_k| = |A_k|! \cdot |\bar{A}_k|!$.

Мощность порождающего множества для Λ определяется процедурой конкатенации перестановок $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_{|A_k|!}\}$ и $\Pi' = \{\pi'_1, ..., \pi'_{|\bar{A}_k|!}\}$, соответствующих подмножествам A_k и $\bar{A}_k$, а реализуется как декартово произведение $\Psi_k = \Pi \times \Pi' = \{(\pi_u, \pi'_v) \mid \pi_u \in \Pi,\ \pi'_v \in \Pi'\}$.

Порождающий набор для инранжирования λ_k = (23)(145) будет состоять из следующих $|\Psi_k| = 2! \cdot 3! = 12$ элементов Ψ_k: 23145, 23154, 23415, 23451, 23514, 23541, 32145, 32154, 32415, 32451, 32514, 32541. Изображение геометрии порождающего множества для (23)(145) представлено на рисунке:

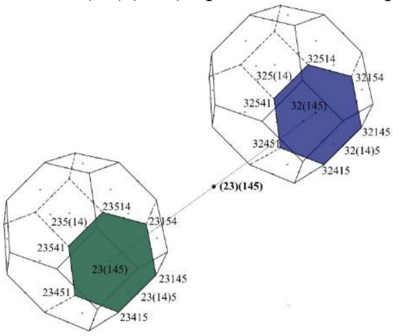

Рис. 1. Ψ_k для инранжирования (23)(145)

В силу того, что в качестве меры близости принято расстояние между отношениями предпочтений, то для полного анализа пространства слабых порядков и определения оптимального решения на нем, необходимо рассмотреть меру близости от любого строго упорядочения альтернатив до максимального (по включению) подмножества, характеризующего равнозначность всех альтернатив ($a_1 \sim a_2 \sim ..., \sim a_n$). С графической точки зрения это расстояние от вершины до центра универсального множества может быть найдено по формуле: $T_{n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Полученная целочисленная последовательность, имеет номер A000217 в онлайн-энциклопедии OEIS [5] описывает *треугольные числа* T_{n-1} и показывает, что с ростом n растет и минимально возможное расстояние от центра до строго упорядочения.

Заключение

При детальном рассмотрении структуры слабых порядков можно утверждать следующее:

1. Размерность каждого из подпространств увеличивается с ростом n.
2. Мощности пространств определяются на основе математических закономерностей с использованием комбинаторных свойств слабых порядков.
3. Анализ порождающего множества позволит определить причины множественности решений при использовании алгоритма Recursall и предугадывать появление парадокса Кондорсе.
4. Анализ мощности A_k позволяет сократить полный перебор при работе с инранжированиями определённой структуры.
5. Символ толерантности ~ задает пространственную фигуру и определяет индивидуальный порождающий набор для λ_k.

Список использованных источников

1. Кузьмин В.Б. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений. – М.: Наука, 1982 – С.168.
2. Muravyov S. V., Khudonogova L. I., Emelyanova E. Y. Interval data fusion with preference aggregation //Measurement.– 2018.–Vol. 116.–P.621-630.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. – М.: Сов. радио, 1972. – С. 192.
4. Емельянова Е.Ю. Графическое представление пространств ранжирований и инранжирований с учетом свойств слабых порядков комплексированных данных / науч. рук. С. В. Муравьев // Молодёжь и современные информационные технологии: сборник трудов XV Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, г. Томск, 4-7 декабря 2017 г. – Томск: Изд-во ТПУ, 2017. – С. 110-111.
5. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. [Электронный ресурс]. – URL: https://oeis.org/A000217 (дата обращения: 21.11.18).