

УДК 519.2

ОЦЕНКА СПЕКТРА МОЩНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СПЛАЙНОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Устинова Ирина Георгиевна,

канд. техн. наук, доцент каф. высшей математики физико-технического института ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: igu@sibmail.com

Лазарева Елена Геннадьевна,

канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общей математики ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36. E-mail: lazareva-e-g73@mail.ru

Подберезина Елена Ивановна,

канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики физико-технического института ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: pei@tpu.ru

Актуальность работы обусловлена тем, что спектр мощности, так же как и функция корреляции, является одной из важнейших характеристик второго порядка случайного процесса, так как он показывает, какого рода гармоники преобладают в данном процессе, какова структура процесса; позволяет получить оценки спектрального состава изучаемых полезных сигналов и помех. По спектрам возможен синтез (восстановление) сигнала, а также построение линейных, в том числе оптимальных фильтров, а также получение оценки погрешности линейной фильтрации.

Цель работы: Оценка спектра мощности стационарного случайного процесса в виде сплайна первого порядка при следующих схемах измерений: когда в каждый момент времени производится ровно одно измерение и когда в каждый момент времени производится случайное число измерений. Исследование статистических характеристик полученных оценок.

Методы исследования: Для расчетов использованы методы теории вероятностей и математической статистики.

Результаты: Получена несмещенная оценка спектра мощности в виде сплайна первого порядка в двух схемах измерения: в каждый момент времени производится ровно одно измерение; в каждый момент времени производится случайное число измерений.

Показано, что дисперсия оценок асимптотически ведет себя как $\frac{1}{T}$, где T – время наблюдения.

Ключевые слова:

Спектр мощности, корреляционная функция, сплайн первого порядка, оценки параметров, статистические свойства оценок.

Введение

Цифровой спектральный анализ является мощным современным методом обработки сигналов [1]. В его основании лежит оценка и изучение спектра мощности сигнала, принимаемого за некоторый случайный процесс [2]. Функция плотности спектра мощности определяет распределение дисперсии случайного процесса по частотам [3].

Для нахождения оценки функции плотности спектра существуют следующие основные способы:

1. Определение спектральной плотности $S(\omega)$ по заданной корреляционной функции $R[\tau]$. Вы-

числение $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R[\tau] \cos(\omega\tau) d\tau$ затруд-

нительно, ибо этот интеграл не всегда вычисляется в элементарных функциях, и корреляционная функция известна, как правило, на дискретном множестве переменной τ [4–8].

2. Оценивание спектральной плотности с помощью процедур, использующих быстрое преобразование Фурье. Такой подход к спектральному анализу эффективен и, как правило, обеспечивает получение приемлемых результатов. Однако у этого подхода есть существенное ограничение, а именно ограничение частотного разрешения, т. е. способности различать частотные линии двух и более сигналов [5].
3. К классическим методам оценки спектра мощности относится периодограммный метод, в котором дискретное преобразование Фурье применяется непосредственно к последовательности, полученной дискретизацией реализации случайного процесса. Однако, как показано в [9], периодограмма не является состоятельной оценкой спектра мощности.
4. В работах [10–12] установлено, что существует связь спектра мощности с фрактальными свой-

ствами случайного процесса. Вышеупомянутая связь выражается следующим образом:

$$S(\omega) = \frac{c}{\omega^{5-2D}},$$
 где c – скейлинговая константа,

зависящая от амплитуды сигнала; D – фрактальная размерность, причем эта взаимосвязь носит оценочный характер, ибо она является асимптотическим решением интегрального уравнения [13–16].

5. Если об исследуемом процессе известна некоторая совокупность сведений, позволяющая выбрать приемлемую аппроксимацию процесса, то в этом случае можно получить более точную спектральную оценку, определив предварительно параметры выбранной модели по результатам измерений [6].

Целью данной работы является нахождение оценки спектра мощности стационарного случайного процесса в виде сплайна первого порядка. Обычно сплайн определяют следующим образом [17–19]. Функцию $S(t)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a, b]$, называют полиномиальным сплайном порядка m с узлами $x_i \in \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$, если на каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, n}$ $S(y)$ есть алгебраический полином степени m .

Постановка задачи

Пусть значения процесса $y(t)$ измеряются на отрезке времени $[0; T]$. Моменты измерений t_i , $i = \overline{1, N}$ известны точно. Будем полагать, что $y_i = y(t_i) + \xi_i$, где ξ_i – независимые случайные величины, причем, $M[\xi_i] = 0$, $D[x_i] = \sigma^2$, $M[y(t_i)] = 0$, $M[y(t_i)y(t_j)] = R[t_j - t_i]$.

По результатам наблюдений требуется построить оценку $S(\omega)$ спектра мощности $S(\omega)$ в виде сплайна первого порядка.

Построение оценки спектра мощности в виде сплайна первого порядка

Разобьем всю ось частот ω на отрезки $[0; \Omega]$, $[\Omega; 2\Omega]$, $[2\Omega; 3\Omega]$, Рассмотрим статистику

$$Q = \frac{1}{\pi T} \sum_{i,j; i \neq j} y_i y_j \varphi(t_j - t_i), \quad (1)$$

где для функции $\varphi(\tau)$ справедливо условие:

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (2)$$

Заметим, что

$$M[Q] = \frac{1}{\pi T} \sum_{i,j; i \neq j} R[t_j - t_i] \varphi[t_j - t_i].$$

Можно считать, что имеет место следующее приближение:

$$M[Q] \approx \frac{1}{\pi T} \int_0^T \int_0^T R[u - v] \varphi(u - v) du dv.$$

Сделав замену переменных, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T R[u - v] \varphi(u - v) du dv &= \left| \begin{matrix} u - v = z \\ du = dz \end{matrix} \right| = \\ &= \int_0^T dv \int_{-v}^{T-v} R(z) \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования, используя область интегрирования, изображенную на рис. 1.

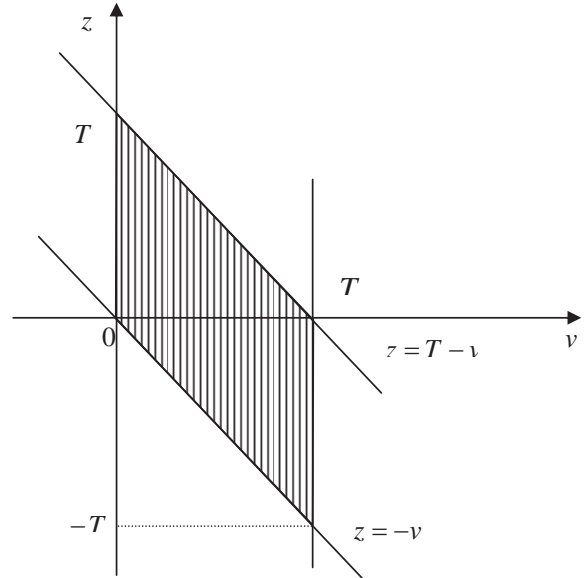


Рис. 1. Область интегрирования

Fig. 1. Integration domain

Это позволит от исходного двойного интеграла перейти к однократному интегралу

$$\begin{aligned} \int_{-T}^0 R[z] \varphi(z) dz \int_{-z}^T dv + \int_0^T R[z] \varphi(z) dz \int_0^{T-z} dv &= \\ = \int_{-T}^0 (T + z) R[z] \varphi(z) dz + \int_0^T (T - z) R[z] \varphi(z) dz &= \\ = T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|z|}{T} \right) R[z] \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

В асимптотическом случае, когда $T \rightarrow \infty$, выражение $\frac{|z|}{T} \rightarrow 0$ и, соответственно,

$$\int_{-T}^T \left(1 - \frac{|z|}{T} \right) R[z] \varphi(z) dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} R[z] \varphi(z) dz.$$

Таким образом

$$M[Q] \approx \frac{T}{\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} R[z] \varphi(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R[z] \varphi(z) dz.$$

Воспользовавшись выражением (2), получим

$$\begin{aligned} M[Q] &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R[\tau] \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega \int_0^{\infty} R[\tau] \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned}$$

Используя известное соотношение Винера-Хинчина [2], окончательно получим

$$M[Q] \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) S(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Для построения оценки $\hat{S}(\omega)$ спектра мощности $S(\omega)$ в виде сплайна первого порядка будем полагать, что на отрезке $[(k-1)\Omega; k\Omega]$ функция $S(\omega)$ представима в виде

$$S(\omega) = S_{k-1} \frac{k\Omega - \omega}{\Omega} + S_k \frac{\omega - (k-1)\Omega}{\Omega}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{(k-1)\Omega}^{k\Omega} S(\omega) \left(A \frac{k\Omega - \omega}{\Omega} + B \frac{\omega - (k-1)\Omega}{\Omega} \right) d\omega,$$

вычисление которого приводит к выражению

$$\frac{\Omega}{6} \{ S_{k-1} (2A + B) + S_k (A + 2B) \}.$$

Заметим, что при $A=2$ и $B=-1$ $I = \frac{\Omega}{2} S_{k-1}$. Тогда

$\Phi(\omega)$ выражения (3) будет иметь вид:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\Omega} \left(\frac{2 \frac{k\Omega - \omega}{\Omega}}{\frac{\omega - (k-1)\Omega}{\Omega}} \right), & \omega \in [(k-1)\Omega; k\Omega], \\ 0, & \omega \notin [(k-1)\Omega; k\Omega]. \end{cases}$$

Используя выражение (2), находим

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \int_{(k-1)\Omega}^{k\Omega} \frac{2}{\Omega} \left(3k - 1 - 3 \frac{\omega}{\Omega} \right) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\Omega} \left\{ \frac{3}{\Omega \tau^2} \begin{pmatrix} \cos(k-1)\Omega \tau - \\ -\cos k\Omega \tau \end{pmatrix} - \frac{\sin k\Omega \tau}{\tau} - \frac{2 \sin(k-1)\Omega \tau}{\tau} \right\}, & \omega \in [(k-1)\Omega, k\Omega], \\ 0, & \omega \notin [(k-1)\Omega, k\Omega]. \end{cases} \end{aligned}$$

Полагаем, что при $k=1$ $\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau)$, при $k=2$ $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau), \dots$. Подставляя в выражение (1) найденные значения $\varphi(\tau)$, находим последовательно S_0, S_1, \dots , которые соединяем отрезками прямых, что и дает оценку $S(\omega)$ в виде сплайна первого порядка. Из построения оценок коэффициентов сплайна следует, что полученные оценки узлов сплайна являются несмещенными.

Оценка дисперсии полученных оценок спектра мощности

Найдем теперь асимптотическую оценку дисперсии $D[Q]$ статистики Q при $T \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим

$$Q^2 = \frac{1}{\pi^2 T^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N y_j y_i y_l y_k \varphi(t_j - t_i) \varphi(t_l - t_k).$$

Усредняя по реализациям процесса $y(t)$ при фиксированных моментах измерений, получим

$$\begin{aligned} M[y_j y_i y_l y_k] &= M[y(t_j) y(t_i) y(t_l) y(t_k)] = \\ &= R[t_j - t_i] R[t_l - t_k] + R[t_j - t_l] R[t_i - t_k] + \\ &\quad + R[t_j - t_k] R[t_i - t_l]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M[Q^2] &= \frac{1}{\pi^2 T^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \varphi(t_j - t_i) \varphi(t_l - t_k) \times \\ &\quad \times \left(R[t_j - t_i] R[t_l - t_k] + R[t_j - t_l] R[t_i - t_k] + \right. \\ &\quad \left. + R[t_j - t_k] R[t_i - t_l] \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Далее следует рассмотреть усреднение по моментам измерений каждого слагаемого, содержащего сомножитель вида $R[t_j - t_i] R[t_l - t_k]$ выражения (4). Здесь возможны следующие варианты:

1) Все индексы j, i, l, k различные. Заменяя t_j на u, t_i на u', t_l на v, t_k на v' , получаем

$$\frac{1}{\pi^2 T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \left(R[u - u'] R[v - v'] \times \right. \\ \left. \times \varphi(u - u') \varphi(v - v') dudvdu'dv' \right),$$

вычисление которого дает при $T \rightarrow \infty$ квадрат математического ожидания статистики Q , а именно

$\frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R[z] \varphi(z) dz \right)^2$, которое вычитается при нахождении дисперсии.

2) Два индекса равны между собой, а именно $i=k$, то есть $t_i = t_k$, тогда рассматриваемое слагаемое выражения (4) будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi^2 T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T R[u - u'] R[v - u'] \varphi(u - u') \varphi(v - u') dudvdu'.$$

После замены переменных и изменения порядка интегрирования последнее выражение может быть приведено к виду

$$\frac{2}{\pi^2 T^2} \left\{ \begin{aligned} & T \int_0^T R[z] \varphi(z) dz \int_{z-T}^T R[t] \varphi(t) dt + \\ & + \int_0^T R[z] \varphi(z) dz \int_{z-T}^T t R[t] \varphi(t) dt \end{aligned} \right\},$$

откуда видно, что при $T \rightarrow \infty$ основной вклад в дисперсию будет вносить слагаемое $\frac{1}{\pi^2 T} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R[z] \varphi(z) dz \right)^2$.

Аналогичный результат получаем при равенстве индексов j и k, i и l, j и l .

3) Две пары индексов равны между собой, а именно $j=l, i=k$, тогда рассматриваемое слагаемое выражения (4) будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi^2 T^2} \int_0^T \int_0^T R[u - u'] R[u - u'] \varphi(u - u') \varphi(u - u') dudud'.$$

Делая замену переменных и меняя порядок интегрирования, этот интеграл приводим к виду $\frac{1}{\pi^2 T^2} T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|z|}{T}\right) R^2[z] \varphi^2(z) dz$, который при $T \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{1}{\pi^2 T} \int_{-\infty}^{+\infty} R^2[z] \varphi^2(z) dz$.

Рассмотрев точно так же два других слагаемых выражения (4), после проведенного исследования можно утверждать, что дисперсия статистики Q при $T \rightarrow \infty$ убывает как $\frac{1}{T}$.

Оценка спектра мощности в виде сплайна первого порядка при случайном числе данных в моментах измерений

К условиям предыдущей задачи добавим еще одно, а именно: в каждый момент времени производится случайное число измерений n_i , где n_i – случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром λ . Аналогичная задача рассматривается в работе [20], однако в ней используется другой подход к получению сплайна, а именно подход, в котором сначала ищется оценка функции корреляции, а затем уже находится оценка спектра мощности, причем коэффициенты сплайна оцениваются все сразу.

Выясним, как в нашем случае наличие условия случайного числа измерений в каждый момент времени повлияет на оценки коэффициентов сплайна.

Для решения задачи разбиваем всю ось частот аналогично тому, как мы делали это ранее и рассмотрим статистику вида

$$Q = \frac{1}{\lambda^2 \pi T} \sum_{i,j; i \neq j} n_i n_j y_i y_j \varphi(t_j - t_i), \quad (5)$$

где $\varphi(\tau)$ задаются выражением (2). Усреднив (5) по величинам n_i , получим выражение

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi T} \sum_{i,j; i \neq j} y_i y_j \varphi(t_j - t_i),$$

которое в дальнейшем и будет использоваться для нахождения оценок коэффициентов сплайна. Все остальные выкладки будут аналогичны рассмо-

треным ранее в разделе «Построение оценки спектра мощности в виде сплайна первого порядка».

Имитационное моделирование полученных оценок

Все расчеты и построение графиков выполнены в системе Mathcad 2000.

В соответствии с [21] было проведено моделирование реализации стационарного случайного процесса, которое описывается разностным уравнением первого порядка

$$x(n) = 0,8x(n-1) + v(n), \quad (6)$$

где $v(n)$ – случайные величины, равномерно распределенные на $[-1; 1]$. В качестве первого элемента генерируемой реализации $x(0)$ было взято значение 1,5. Результат моделирования реализации стационарного случайного процесса представлен на рис. 2.

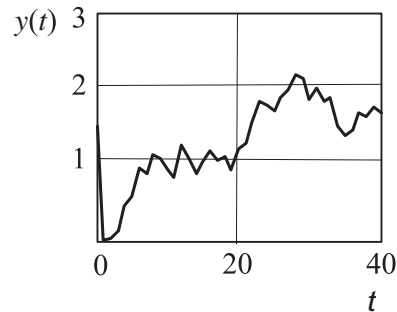


Рис. 2. Модельная реализация стационарного случайного процесса

Fig. 2. Model implementation of a stationary random process

На рис. 3 построены оценки спектра мощности коррелограммным методом и в виде сплайна первого порядка.

Оценим значимость полученных оценок спектра мощности. Для изучения качества полученной модели воспользуемся критерием Фишера–Снедекора. Для этого найдем наблюдаемое значение критерия

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{S}_{1i} - \bar{S})^2}{\sum_{i=1}^n (S_i - \hat{S}_{1i})^2}, \quad \text{здесь } m - \text{число оцениваемых параметров}$$

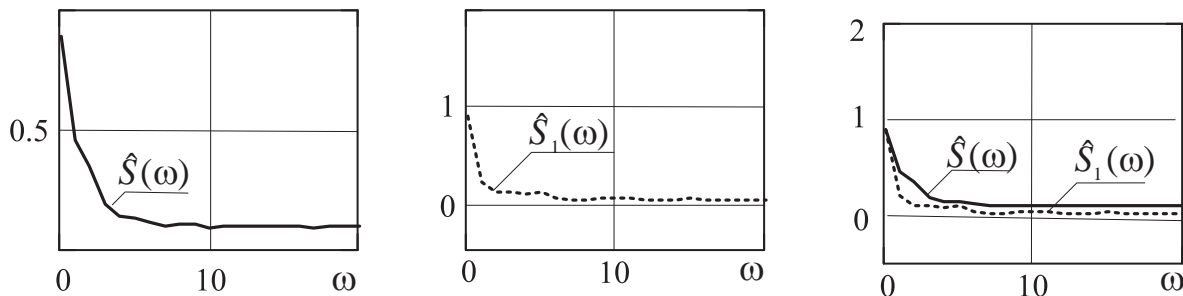


Рис. 3. Оценки: $S(\omega)$ спектра мощности $S(\omega)$ коррелограммным методом, $S_1(\omega)$ – в виде сплайна первого порядка для реализации случайного процесса рис. 2

Fig. 3. Estimations: $\hat{S}(\omega)$ of power spectrum $S(\omega)$, $\hat{S}_1(\omega)$ as a first-order spline for implementing the random process of the Fig. 2

раметров, n – объем выборки, S – выборочное среднее, $S_i, i=1, n$ – значения спектра для модельной реализации случайного процесса (6), который имеет вид:

$$S_i = \frac{0,09}{0,41 - 0,4 \cos i} \text{ и } \hat{S}_{1i}, i=1, n \text{ – оцененные значения}$$

спектра мощности в виде сплайна. Наблюдаемое значение критерия оказалось равным 23,684, что значительно превосходит табличное значение $F_{\alpha, m-1, n-m} = 3,6$ критерия Фишера–Снедекора при уровне значимости $\alpha=0,05$ и числом степеней свободы $k_1=m-1$ и $k_2=n-m$. Так как $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$, то полученная оценка спектра мощности в виде сплайна первого порядка является значимой. Индекс корреляции

$$R_{S_{\omega}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \hat{S}_{1i})^2}{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}} = 0,997 \text{ показывает, что}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
2. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
4. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. – М.: Советское радио, 1968. – 256 с.
5. Кривошеев В.И. Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). – Нижний Новгород: ННГУ, 2006. – 117 с.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 608 с.
7. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
8. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. – М.: Наука, 1965. – 463 с.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
10. Person B.N.J., Albohr O. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion // *J. of Physics: Condensed Matter*. – 2005. – V. 17. – № 1. – P. 1–62.
11. Majumdar A., Bhushan B. Characterization and modeling of surface roughness and contact mechanics. *Handbook of Micro/Nanotribology*. – New York: CRC Press LLC, 1999. – 861 p.
12. Федотов А. Спектр мощности как характеристика шероховатости поверхности // *Фотоника*. – 2010. – № 6. – С. 18–21.
13. Peitgen H.O., Saupe D. *The Science of Fractal Images*. – New York: Springer-Verlag, 1988. – 312 p.
14. Flandrin P. On the Spectrum of Fractional Brownian Motions // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 1989. – V. 35. – № 1. – P. 197–199.
15. Mandelbrot B.B., van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM Review*. – 1968. – V. 10. – № 4. – P. 422–437.
16. Berry M.V. *Diffractals* // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1979. – V. 12. – № 6. – P. 781–797.
17. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
18. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
19. Шевелицкий И.В. Интерполяционные сплайны в задачах цифровой обработки сигналов // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*. – 2003. – № 4. – С. 42–53.
20. Терпугов А.Ф., Константинова И.Г. Оценка спектра мощности стационарного случайного процесса сплайнами первого порядка при случайном числе измерений // *Вестник ТГУ*. – 2000. – Т. 269. – С. 85–89.
21. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 99 с.

Поступила 24.03.2014 г.

UDC 519.2

EVALUATION OF THE POWER SPECTRUM OF A STATIONARY RANDOM PROCESS AS A FIRST-ORDER SPLINE

Irina G. Ustinova,

Cand. Sc., National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia. E-mail: igu@sibmail.com

Elena G. Lazareva,

Cand. Sc., National Research Tomsk State University, 36, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia. E-mail: lazareva-e-g73@mail.ru

Elena I. Podberезina,

Cand. Sc., National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia. E-mail: pei@tpu.ru

The urgency of the work is caused by the fact that the power spectrum as well as the correlation function, is one of the most important characteristics of the second order of stochastic process. The spectrum shows what kind of harmonics prevails in the process, its structure; allows estimating spectral composition of the studied useful signals and noises. It is possible to synthesize (recover) signal, as well as to construct linear, including optimal filters, to obtain error estimates of linear filtering by the spectra.

The main aim of the study is to evaluate the power spectrum of a stationary random process as a first-order spline under the following measurement schemes: one measurement is made every moment, a random number of measurements is made every moment. Study of statistical characteristics of the estimates.

The methods used in the study: the methods of probability theory and mathematical statistics are used for calculation.

The results: The authors obtained an unbiased estimate of the power spectrum as a first-order spline in two schemes of measurement: one measurement is made every moment, a random number of measurements is made every moment. It is shown that the variance of

estimates behaves asymptotically like $\frac{1}{T}$, where T is the time of observation.

Key words:

Power spectrum, correlation function, first-order spline, parameter estimations, statistical properties of estimations.

REFERENCES

1. Nikitin A.A. *Teoreticheskie osnovy obrabotki geofizicheskoy informatsii* [Theoretical bases of processing geophysical information]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 342 p.
2. Marple S. L. *Tsifrovoy spektralnyy analiz i ego prilozheniya* [Digital spectral analysis and its application]. Moscow, Mir Publ., 1990. 584 p.
3. Ventzhel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [Random process theory and its engineering applications]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2000. 383 p.
4. Romanenko A.F., Sergeev G.A. *Voprosy prikladnogo analiza sluchaynykh protsessov* [Issues of random process application analysis]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1968. 256 p.
5. Krivosheev V.I. *Sovremennye metody tsifrovoy obrabotki signalov (tsifrovoy spektralnyy analiz)* [Modern techniques of signal digital processing (digital spectral analysis)]. Nizhniy Novgorod, NNGU Publ., 2006. 117 p.
6. Sergienko A.B. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Signal digital processing]. St. Petersburg, Piter Publ., 2003. 608 p.
7. Bendat J.S., Piersol A. *Prikladnoy analiz sluchaynykh dannykh* [Application analysis of random data]. Moscow, Mir Publ., 1989. 540 p.
8. Bendat J.S. *Osnovy teorii sluchaynykh shumov i ee primenenie* [Principles and applications of random noise theory]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 463 p.
9. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primenenie tsifrovoy obrabotki signalov* [Theory and application of signal digital processing]. Moscow, Mir Publ., 1978. 848 p.
10. Person B.N.J., Albohr O. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *J. of Physics: Condensed Matter*, 2005, vol. 17, no. 1, pp. 1–62.
11. Majumdar A., Bhushan B. *Characterization and modeling of surface roughness and contact mechanics. Handbook of Micro/Nanotribology*. New York, CRC Press LLC, 1999. 861 p.
12. Fedotov A. Spektr moshchnosti kak kharakteristika sherokhovatosti poverkhnosti [Power spectrum as a characteristic of surface roughness]. *Fotonika*, 2010, no. 6, pp. 18–21.
13. Peitgen H.O., Saupe D. *The Science of Fractal Images*. New York, Springer-Verlag, 1988. 312 p.
14. Flandrin P. On the Spectrum of Fractional Brownian Motions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1989, vol. 35, no. 1, pp. 197–199.
15. Mandelbrot B.B., van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, no. 4, pp. 422–437.
16. Berry M.V. Diffractals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, vol. 12, no. 6, pp. 781–797.
17. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody* [Numerical techniques]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 632 p.
18. Korneychuk N.P. *Splayny v teorii priblizheniy* [Splines in approximation theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
19. Shevelitskiy I.V. Interpolyatsionnye splayny v zadachakh tsifrovoy obrabotki signalov [Interpolation splines in problems of signal digital processing]. *Exponenta Pro. Matematika v prilozheniyakh*, 2003, no. 4, pp. 42–53.
20. Terpugov A.F., Konstantinova I.G. Otsenka spektra moshchnosti statsionarnogo sluchaynogo protsesssa splaynami pervogo poryadka pri sluchaynom chisle izmereniy [Estimation of steady process power spectrum by the first order splines at a random number of measurements]. *Vestnik TGU*, 2000, vol. 269, pp. 85–89.
21. Vadutov O.S. *Matematicheskie osnovy obrabotki signalov. Praktikum* [Mathematical bases of signal processing. Workshop]. Tomsk, TPU Publ. House, 2007. 99 p.

Received: 24 March 2014.