

УДК 62-752+62-755

УРАВНОВЕШИВАНИЕ АВТОБАЛАНСИРОМ РОТОРА В УПРУГО-ВЯЗКО ЗАКРЕПЛЕННОМ КОРПУСЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Филимонихин Геннадий Борисович,

д-р техн. наук, профессор кафедры деталей машин и прикладной механики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: filimonikhin@yandex.ua

Гончаров Валерий Владимирович,

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью исследования процесса уравнивания автобалансирами ротора.

Цель работы: оценить переходные процессы при статическом уравнивании автобалансирами со многими корректирующими грузами ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус, совершающий пространственное движение.

Методы исследования: теория устойчивости установившихся движений механических систем; математическая теория устойчивости движений по Ляпунову.

Результаты: Найдены условия наступления автобалансировки и установлено, что:

- корпус и ротор условно образуют составной, более массивный и длинный ротор, характеристики которого влияют на процесс автобалансировки;
- переходные процессы, характеризующие автобалансировку, делятся на: быстрые, при которых практически прекращаются движения корректирующих грузов относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу корректирующих грузов и дисбаланса ротора; медленные, при которых корректирующие грузы приходят в автобалансирующее положение, двигаясь относительно ротора;
- скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, скорости вращения, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на корректирующие грузы, и не зависит от уравниваемого дисбаланса, количества и положений корректирующих грузов;
- скорость протекания медленных переходных процессов дополнительно зависит от уравниваемого дисбаланса, количества и положений корректирующих грузов, но не зависит от сил сопротивления опор.

Ключевые слова:

Ротор, дисбаланс, автобалансиры, основное движение, устойчивость движения.

Введение

Роторы многих центробежных машин – стиральных, экстракторов, сепараторов, центрифуг, осевых вентиляторов и пр. – установлены в корпус с возможностью вращения, а уже корпус закреплен упруго-вязко и совершает неплоское движение. В этих машинах дисбаланс ротора меняется в процессе выполнения технологических операций, поэтому его целесообразно уравнивать на ходу пассивными автобалансирами (АБ) [1–5].

Наиболее полный обзор литературы по пассивной автобалансировке роторов приведен в [5]. Учет этого обзора, более поздних публикаций и работ [6–18] показывает, что на сегодня практически нет работ, в которых аналитически исследуется процесс автобалансировки роторов, совершающих пространственное движение. В указанных работах определяются только условия наступления автобалансировки в виде критических скоростей, при переходе через которые наступает или исчезает автобалансировка. Эти скорости для двухшарового АБ определяются в [1–4, 6–13, 15–18] с применением

метода синхронизации динамических систем И.И. Блехмана [19], для АБ любого типа – с применением эмпирического критерия наступления автобалансировки в [5] или энергетического критерия, использующего функцию Гамильтона, в [14]. При этом переходные процессы не исследуются.

Дифференциальные уравнения движения роторных машин с АБ почти не поддаются аналитическому исследованию ввиду существенной нелинейности и большому количеству степеней свободы системы. Такие уравнения позволяют аналитически исследовать АБ только с двумя корректирующими грузами (КГ) – шарами, роликами, маятниками.

С учетом вышеописанных проблем в работе [20] была предложена методика составления упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ, учитывающая особенности таких механических систем – отношения малости параметров, малость отклонений продольной оси ротора от оси вращения и т. п. В соответствии с этой методикой составляются замкнутые уравне-

ния движения роторной машины с АБ относительно обобщенных координат, описывающих движение ротора и его дисбаланс, так как именно эти координаты описывают процесс автобалансировки и позволяют исследовать АБ со многими КГ. В работе [21] с применением указанной методики были аналитически исследованы переходные процессы, протекающие при статическом уравновешивании АБ со многими КГ ротора, помещенного с возможностью вращения в упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. Там же была предложена методика таких исследований, которая может быть стандартной при решении подобных задач.

В настоящей работе методика исследований, предложенная в работах [20, 21], применяется для аналитического исследования переходных процессов, протекающих при статическом уравновешивании АБ со многими КГ ротора, помещенного с возможностью вращения в упруго-вязко закрепленный корпус, совершающий пространственное движение.

Описание теоретико-механической модели роторной машины

Осесимметричный ротор массы m , установлен в корпусе массы m_c с возможностью вращения вокруг продольной оси (рис. 1). Центры масс ротора и массивного корпуса совпадают и находятся в точке O . Ротор вращается относительно корпуса с постоянной угловой скоростью ω . Корпус удерживают пять упруго-вязких опор.

Движение машины описывается с использованием двух систем осей: $Oxyz$ – неподвижных; $G\xi\eta\zeta$ – подвижных, жестко связанных с ротором. В исходном положении, когда машина неподвижна и находится в положении статического равновесия, системы $Oxyz$ и $G\xi\eta\zeta$ совпадают. Ось Oz на-

правлена вдоль оси вращения ротора. В плоскости $z=d$ находится статический дисбаланс s_0 , образованный точечной массой m_0 , находящейся на расстоянии r_0 от продольной оси ротора. Ось Ox направлена в сторону начального направления вектора статического дисбаланса s_0 , а ось Oy направлена так, что тройка осей $Oxyz$ правая. Свойства упруго-вязких опор характеризуют коэффициенты жесткости k, k_z и вязкости b, b_z .

Модель движения ротора с массивным корпусом и дисбалансом приведена на рис. 2. Вначале совершается поступательное перемещение ротора с корпусом на (x, y, z) вдоль координатных осей. В результате система осей $Oxyz$ переходит в промежуточное положение $Gx_c y_c z_c$ (рис. 2, а). Потом совершаются повороты ротора с корпусом вокруг точки G на углы Резаля α и β (рис. 2, б). В результате система осей $Gx_c y_c z_c$ переходит в $Guvw$. Последним совершается поворот ротора вокруг продольной оси $w=\zeta$ на угол ωt (рис. 2, в). При этом система осей $Guvw$ переходит в систему $G\xi\eta\zeta$.

Относительно системы осей $Ouvw$ тензоры инерции ротора и корпуса имеют вид

$$J_r = \text{Diag}(A_r, A_r, C_r), \quad J_c = \text{Diag}(A_c, A_c, C_c).$$

В плоскости $\zeta=d$ ротор уравновешивает АБ, состоящий из n одинаковых КГ (маятников, шаров или цилиндрических роликов). В маятниковом АБ на вал ротора насажено n математических маятников массы m и физической длины r . В шаровом либо роликовом АБ n шаров или цилиндрических роликов массой m катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от продольной оси ротора до центра шара либо продольной оси ролика равно r .

Как это принято в теории пассивных АБ [1–21], действием сил тяжести пренебрегаем и полагаем, что: радиусы КГ (шаров, роликов) намного меньше

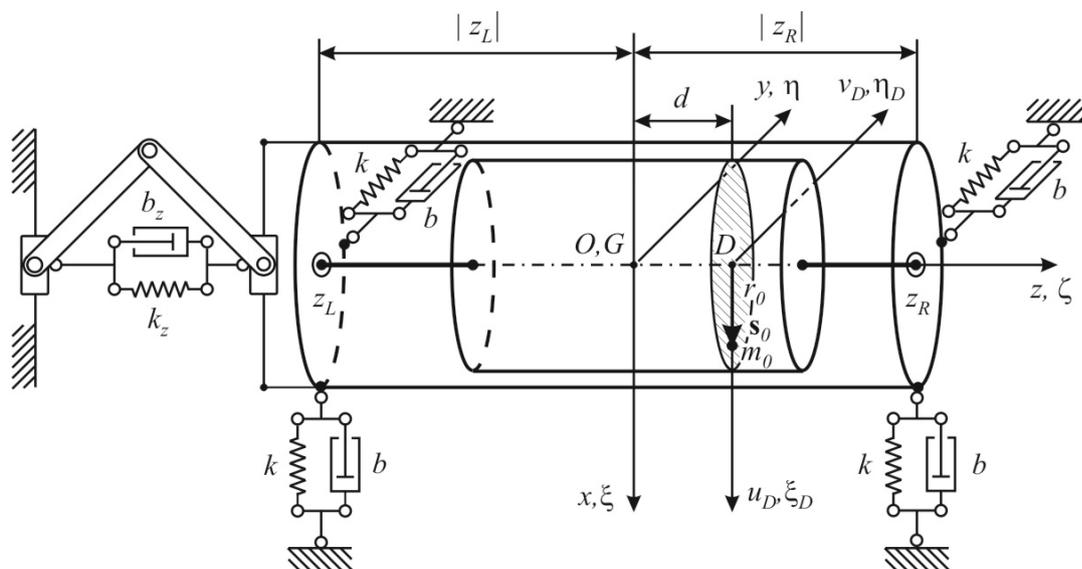


Рис. 1. Ротор в массивном корпусе, установленном на упруго-вязких опорах

Fig. 1. Rotor in massive bed fixed on visco-elastic columns

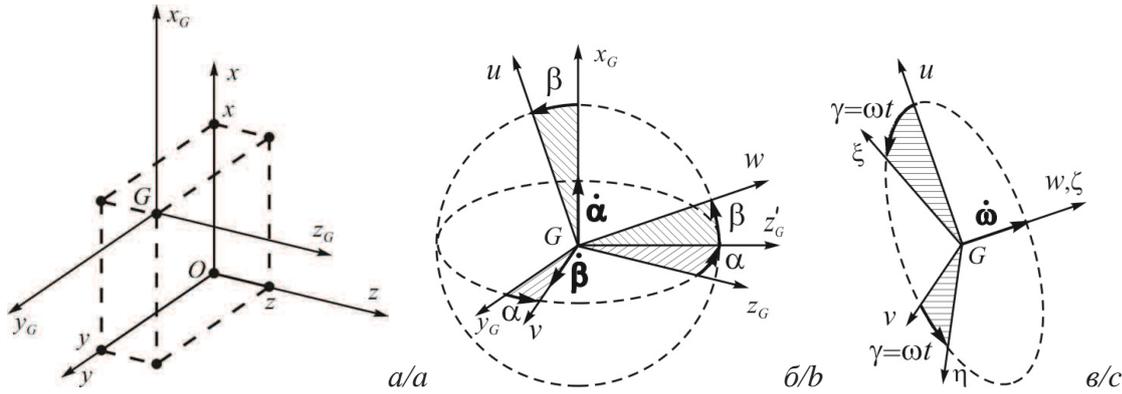


Рис. 2. Кинематика движения ротора и корпуса

Fig. 2. Kinematics of rotor and bed motion

радиусов их беговых дорожек; при нахождении на одной дорожке КГ не мешают движению друг друга.

Положение массы дисбаланса или i -го КГ ($i=0, n$) в плоскости $\zeta=d$ будем определять абсолютными углами φ_i , отсчитываемыми между осью Ou_D и относительными радиус-векторами r_i массы дисбаланса или центров масс КГ (рис. 3, а), или относительными углами ψ_i , отсчитываемыми между осью $O\xi_D$ и относительными радиус-векторами r_i (рис. 3, б). Связи между абсолютными и относительными углами имеют вид $\varphi_i = \omega t + \psi_i, i=0, n/$.

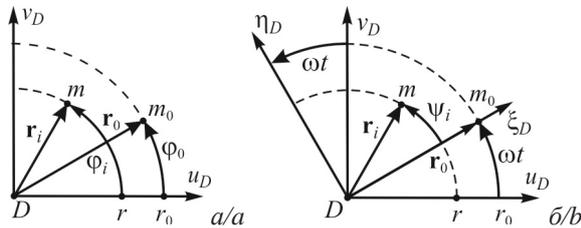


Рис. 3. Кинематика движения КГ и массы дисбаланса: а) абсолютные; б) относительные углы

Fig. 3. Kinematics of corrective weights and mass imbalance: а) absolute; б) relative angles

Относительному движению i -го шара или ролика ($i=0, n$) препятствует ньютоновская сила вязкого сопротивления, модуль которой равен $F_i^{(vis)} = b_i u_i$, где b_i – коэффициент сил вязкого сопротивления; $u_i = r_i |\dot{\varphi}_i - \omega| = r_i |\dot{\psi}_i|$ – модуль относительной скорости КГ (скорости центра масс КГ относительно ротора); точка над величиной обозначает производную по времени. При повороте i -го маятника ($i=0, n$) вокруг оси ротора на него действует момент сил вязкого сопротивления $M_i^{(vis)} = b_i r_i u_i$, где $b_i r_i$ – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведенный к плечу r .

Составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной машины в неподвижной системе координат

При составлении дифференциальных уравнений движения роторной машины используются уравнения Лагранжа II рода вида

$$d(\partial T / \partial \dot{q}) / dt - \partial T / \partial q = -\partial \Pi / \partial q - \partial \Phi / \partial \dot{q},$$

$$q = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T, \quad (1)$$

где T и Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы; Φ – диссипативная функция Релея; q – вектор обобщенных координат, определяющих движение машины. Упрощающие предположения касаются отношений малости величин [20]:

$$|x|, |y|, |z|, |\alpha|, |\beta| \ll 1; |\dot{x}|, |\dot{y}|, |\dot{z}|, |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}| \ll 1;$$

$$mn \ll m_r, m_c \sim m_r.$$

С использованием уравнений (1) получаем систему $5+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат:

$$M\ddot{z} + b_z \dot{z} + k_z z = 0, \quad (2)$$

$$M\ddot{x} + b_x \dot{x} + k_x x + b_{x\beta} \dot{\beta} + k_{x\beta} \beta + \ddot{s}_u = 0,$$

$$M\ddot{y} + b_y \dot{y} + k_y y - b_{y\beta} \dot{\beta} - k_{y\beta} \beta + \ddot{s}_v = 0,$$

$$A\ddot{\beta} + b_\beta \dot{\beta} + k_\beta \beta - C_r \omega \dot{\alpha} + b_{x\beta} \dot{x} + k_{x\beta} x + d\ddot{s}_u = 0,$$

$$-A\ddot{\alpha} - b_\beta \dot{\alpha} - k_\beta \alpha - C_r \omega \dot{\beta} + b_{x\beta} \dot{y} + k_{x\beta} y + d\ddot{s}_v = 0, \quad (3)$$

$$m\kappa \ddot{\varphi}_i r + b_r r (\dot{\varphi}_i - \omega) = m(a_{Du} \sin \varphi_i - a_{Dv} \cos \varphi_i),$$

$$/i = \overline{1, n}/, \quad (4)$$

где $s_u = m_0 r_0 + \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos \varphi_i$, $s_v = \sum_{i=1}^n m_i r_i \sin \varphi_i$ – соответственно проекции суммарного дисбаланса точечной массы и КГ на оси Ou , Ov ; $a_{Du} = \ddot{x} + d\ddot{\beta}$, $a_{Dv} = \ddot{y} + d\ddot{\alpha}$; $M = m_c + m_r$, $A = A_c + A_r$, $k_x = 2k$, $k_\beta = k(z_L^2 + z_R^2)$, $k_{x\beta} = k(z_L + z_R)$, $b_x = 2b$, $b_\beta = b(z_L^2 + z_R^2)$, $b_{x\beta} = b(z_L + z_R)$, $\kappa = 1 + \kappa^{(rot)}$; $\kappa^{(rot)} = 2/5$ – для шаров, $\kappa^{(rot)} = 1/2$ – для цилиндрических роликов, $\kappa^{(rot)} = 0$ – для маятников.

Из равенств (2)–(4) видно, что корпус, совершающий только часть движений ротора, «прибавляет» к соответствующим массо-инерционным характеристикам свои характеристики. При этом условно образуется составной ротор – более массивный и длинный, и именно его характеристики влияют на динамику системы. Поэтому даже ко-

роткий ротор в массивном корпусе может вести себя как длинный.

Система (2)–(4) распадается на две независимые подсистемы – уравнение (2) описывает загужающее движение машины вдоль оси z , остальные уравнения описывают процесс автобалансировки. В дальнейшем будем рассматривать только уравнения (3), (4).

Основные движения роторной системы и дифференциальные уравнения для исследования их устойчивости

На основных движениях ротор уравновешен и вращается вокруг собственной продольной оси, поэтому обобщенные координаты ротора x, y, α, β и проекции суммарного дисбаланса s_u, s_v равны нулю:

$$x = y = \alpha = \beta = s_u = s_v = 0. \quad (5)$$

Устойчивость основных движений будем исследовать по этим обобщенным координатам. Система уравнений (3) незамкнута. Замыкаем ее минимальным количеством уравнений, являющихся комбинациями дифференциальных уравнений движения КГ (4).

Умножим каждое уравнение в (4) поочередно на $\sin\varphi_i$ и сложим, затем – на $\cos\varphi_i$ и сложим. Полученные уравнения в окрестности определенного установившегося движения линеаризуются и принимают вид

$$\begin{aligned} & \kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b_r(\dot{s}_u + \omega s_v) / m = \\ & = -mnd \left[a_{Dv}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) + \right. \\ & \quad \left. + a_{Du}(1 - p_1 \cos 2\omega t + p_2 \sin 2\omega t) \right] / 2, \\ & \kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b_r(\dot{s}_v - \omega s_u) / m = \\ & = mnd \left[a_{Dv}(1 + p_1 \cos 2\omega t - p_2 \sin 2\omega t) + \right. \\ & \quad \left. + a_{Du}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) \right] / 2, \quad (6) \end{aligned}$$

где $p_1 = (\sum_{i=1}^n \cos 2\tilde{\psi}_i) / n$, $p_2 = (\sum_{i=1}^n \sin 2\tilde{\psi}_i) / n$; $\tilde{\psi}_i$, $i=1, n$ – угловое положение i -го КГ в установившемся движении.

Введем угол \mathcal{G} и параметр p : $\cos \mathcal{G} = p_1/p$, $\sin \mathcal{G} = p_2/p$, $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Сдвинем время: $2\omega t + \mathcal{G} = 2\omega\tau$ или $t = \tau - \mathcal{G}/(2\omega)$. Тогда уравнения (6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b_r / m \cdot (\dot{s}_u + \omega s_v) = \\ & = -mnd / 2 \cdot [a_{Dv}(1 - p \cos 2\omega\tau) - a_{Du} p \sin 2\omega\tau], \\ & \kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b_r / m \cdot (\dot{s}_v - \omega s_u) = \\ & = mnd / 2 \cdot [a_{Dv} p \sin 2\omega\tau - a_{Du}(1 + p \cos 2\omega\tau)]. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнения (3) не изменятся при переходе к новому времени, поэтому уравнения (7) замыкают их относительно неизвестных функций $x, y, \alpha, \beta, s_u, s_v$.

Уравнения (3), (7) – это система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. В нее входят 16 параметров $M, A, C_r, k_x, k_\beta, b_\beta, k_{x\beta}, b_{x\beta}, b_x, \omega, d, m, n, \kappa, b_r, p$.

Псевдо сворачивание, переход к подвижной системе координат и обезразмеривание системы дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения для исследования устойчивости основных движений в комплексном виде. В комплексных переменных X_z, B_z, S_{zu} :

$$X_z = x + iy, B_z = \beta - i\alpha, S_{zu} = s_u + is_v$$

уравнения (3), (7) примут вид

$$\begin{aligned} L_1 &= M\ddot{X}_z + b_x \dot{X}_z + k_x X_z + b_{x\beta} \dot{B}_z + k_{x\beta} B_z + \ddot{S}_{zu} = 0, \\ \bar{L}_1 &= 0, \\ L_2 &= A\ddot{B}_z + b_\beta \dot{B}_z + k_\beta B_z - i\omega C_r \dot{B}_z + \\ & + b_{x\beta} \dot{X}_z + k_{x\beta} X_z + d\ddot{S}_{zu} = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\ L_3 &= \kappa \bar{D}_t^2 S_{zu} + b_r / m \cdot \bar{D}_t S_{zu} + \\ & + mnd / 2 \cdot [\ddot{X}_z + d\ddot{B}_z - (\ddot{X}_z + d\ddot{B}_z) pe^{2\omega\tau}] = 0, \\ \bar{L}_3 &= 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где $D_t \bullet = \dot{\bullet} + i\omega \bullet$ – оператор.

Приведение уравнений к автономному виду. В новых комплексных переменных $\Xi_z = X_z e^{i\omega\tau}$, $\Theta_z = B_z e^{i\omega\tau}$, $S_z = S_{zu} e^{i\omega\tau}$ система (8) приводится к автономному виду

$$\begin{aligned} L_1 &= MD_t^2 \Xi_z + b_x D_t \Xi_z + k_x \Xi_z + b_{x\beta} D_t \Theta_z + \\ & + k_{x\beta} \Theta_z + D_t^2 S_z = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= AD_t^2 \Theta_z + b_\beta D_t \Theta_z + k_\beta \Theta_z - i\omega C_r D_t \Theta_z + \\ & + b_{x\beta} D_t \Xi_z + k_{x\beta} \Xi_z + dD_t^2 S_z = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\ L_3 &= \kappa \ddot{S}_z + b_r / m \cdot \dot{S}_z + \\ & + mnd / 2 \cdot \left[D_t^2 \Xi_z + dD_t^2 \Theta_z - \right. \\ & \quad \left. - p(\bar{D}_t^2 \Xi_z + d\bar{D}_t^2 \Theta_z) \right] = 0, \quad \bar{L}_3 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Уравнения в безразмерном виде. При стандартном обезразмеривании уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned} L_1 &= D^2 \xi_z + \tilde{b}_x D \xi_z + \xi_z + \\ & + \tilde{k}_{x\beta} (\tilde{b}_x D \theta_z + \theta_z) + D^2 s_z = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= D^2 \theta_z + (\tilde{k}_\beta \tilde{b}_x - i\tilde{\omega} \tilde{C}) D \theta_z + \tilde{k}_\beta \theta_z + \\ & + \tilde{k}_{x\beta} (\tilde{b}_x D \xi_z + \xi_z) + \tilde{d} D^2 s_z = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad (10) \\ L_3 &= \tilde{s}'_z + \tilde{b} s'_z + \tilde{m} \left[D^2 (\xi_z + \tilde{d} \theta_z) - \right. \\ & \quad \left. - p \bar{D}^2 (\bar{\xi}_z + \tilde{d} \bar{\theta}_z) \right] = 0, \\ \bar{L}_3 &= 0, \quad (11) \end{aligned}$$

где $\xi_z = \Xi_z M / (mr)$, $\theta_z = \Theta_z \sqrt{AM} / (mr)$, $s_z = S_z / (mr)$ – безразмерные комплексные обобщенные координаты; штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{\tau} = \omega_0 t$; $D(\bullet) = (\bullet)' + i\tilde{\omega}(\bullet)$ – оператор, $\tilde{k}_x = b_x \omega_0 / k_x$, $\omega_0 = \sqrt{k_x / M}$, $\tilde{k}_{x\beta} = k_{x\beta} / (\omega_0^2 \sqrt{AM})$, $\tilde{d} = d / \sqrt{AM}$, $\tilde{k}_\beta = k_\beta / (A\omega_0^2)$, $\tilde{C} = C_r / A$, $\tilde{\omega} = \omega / \omega_0$, $\tilde{k}_{x\beta} = b_r / (m\kappa\omega_0)$, $m\tilde{\omega} = mn / (2\kappa M) \ll 1$.

Из (5) и способа введения новых обобщенных координат следует, что на основных движениях

$$\xi_z = \bar{\xi}_z = 0, \theta_z = \bar{\theta}_z = 0, s_z = \bar{s}_z = 0.$$

Уравнения (10), (11) линейны и стационарны, поэтому устойчивость основных движений роторной системы можно исследовать по обобщенным комплексным координатам $\xi_z, \bar{\xi}_z, \theta_z, \bar{\theta}_z, s_z, \bar{s}_z$ с применением теории устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что в уравнения входят девять независимых безразмерных параметров $\tilde{d}, \tilde{C}, \tilde{m}, \tilde{\omega}, \tilde{k}_\beta, \tilde{k}_{x\beta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}, p$.

Оценка величин безразмерных параметров

$$\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{C}, \tilde{m}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_{x\beta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}, p$$

Параметр $\tilde{\omega}$ соответствует угловой скорости вращения ротора и теоретически может меняться в пределах от 0 до $+\infty$. Нужно определить такие области изменения $\tilde{\omega}$, в пределах которых будут устойчивыми основные движения.

Для реальных роторных машин масса КГ намного меньше массы ротора с корпусом, поэтому $\tilde{m} \ll 1$. Параметр \tilde{d} равен отношению расстояния от центра масс составного ротора до плоскости дисбаланса к радиусу инерции составного ротора относительно его поперечной центральной оси, поэтому $\tilde{d} \geq 0$.

Параметр \tilde{k}_β характеризует жесткость опор. Для реальных роторных машин он эквивалентен 1. Параметр $\tilde{k}_{x\beta}$ характеризует расположение опор относительно центра масс системы и может изменяться в пределах от -1 до 1. При почти симметричных опорах он эквивалентен 0.

Параметры \tilde{b}_x, \tilde{b} , соответственно, характеризуют силы вязкого сопротивления в опорах и силы сопротивления относительно движению КГ. Для реальных роторных машин $\tilde{m} \ll \tilde{b}_x \ll 1, \tilde{b} \sim 1$.

Параметры p и \tilde{C} подробно описаны в [21]: p зависит от расположения КГ в АБ и принимает значения в пределах от 0 до 1; \tilde{C} характеризует вид составного ротора (при $\tilde{C} < 1$ ротор длинный, при $\tilde{C} \approx 1$ – сферический, при $\tilde{C} > 1$ – короткий). Будем считать, что $\tilde{C} \sim 1$.

Окончательно имеем такие оценки величин безразмерных параметров:

$$\tilde{\omega} \in (0, +\infty), \tilde{m} \ll 1, \tilde{d} \geq 0, \tilde{C}, \tilde{k}_\beta, \tilde{b} \sim 1, p \in [0, 1],$$

$$\tilde{m} \ll \tilde{b}_x \ll 1, \tilde{k}_{x\beta} \in [-1; 1] (\tilde{k}_{x\beta} \sim 0).$$

Исследование устойчивости основных движений и характера переходных процессов

Характеристическое уравнение системы (10), (11) имеет вид

$$\lambda^2(\lambda + \tilde{b})^2 X \bar{X} - \lambda(\lambda + \tilde{b})(X \bar{Y} + \bar{X} Y) \cdot \tilde{m} + (1 - p^2) Y \bar{Y} \cdot \tilde{m}^2 = 0, \quad (12)$$

где

$$X = (\Lambda^2 - 1 + i \tilde{b}_x \Lambda) \Lambda_1 - [\tilde{d} \Lambda^2 - (\tilde{d} - \tilde{k}_{x\beta})(1 - i \tilde{b}_x \Lambda)]^2,$$

$$Y = \Lambda^4 \Lambda_1, \Lambda = -\tilde{\omega} + i \lambda,$$

$$\Lambda_1 = \Lambda^2(1 + \tilde{d}^2) + \Lambda \tilde{C} \tilde{\omega} - a_1 + a_1 i \tilde{b}_x \Lambda,$$

$$a_1 = \tilde{d}^2 - 2 \tilde{d} \tilde{k}_{x\beta} + \tilde{k}_\beta.$$

Заметим, что мнимые части корней характеристического уравнения определяют частоту колебаний в переходных процессах, а их продолжительность зависит от величин отрицательных действительных частей этих корней – чем они меньше, тем меньше продолжительность.

Разложение корней уравнения (12) по степеням малых параметров $0 < \tilde{m} \ll \tilde{k}_x \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & - \frac{[(1 - \tilde{C} + \tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_\beta + 2\tilde{d}\tilde{k}_{x\beta}]\tilde{\omega}^4}{(\tilde{\omega}^2 - 1)[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - \tilde{k}_\beta] - \tilde{k}_{x\beta}^2} \times \\ & \times \frac{1 \pm p}{\tilde{b}} \tilde{m} + O(\tilde{m}^2), \quad \lambda_{3,4} = -\tilde{b} + O(\tilde{m}), \\ \lambda_{5,8} = & -i(\tilde{\omega} + \Lambda_{5,8}^{(0)}) - \\ & - \tilde{b}_x \frac{\left[\begin{array}{l} (1 + \tilde{k}_\beta)(\Lambda_{5,8}^{(0)})^2 + \\ + \tilde{\omega} \tilde{C} \Lambda_{5,8}^{(0)} - 2(\tilde{k}_\beta - \tilde{k}_{x\beta}^2) \end{array} \right] \Lambda_{5,8}^{(0)}}{\left[\begin{array}{l} 2\Lambda_{5,8}^{(0)} [(\Lambda_{5,8}^{(0)})^2 - \Lambda_{5,8}^{(0)} \tilde{C} \tilde{\omega} - \tilde{k}_\beta] + \\ + [(\Lambda_{5,8}^{(0)})^2 - 1](2\Lambda_{5,8}^{(0)} - \tilde{C} \tilde{\omega}) \end{array} \right]}} + \\ & + O(\tilde{b}_x^2), \quad \lambda_{9,12} = \bar{\lambda}_{5,8}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Lambda_{5,8}^{(0)} \in R$ – корни уравнения

$$(\Lambda^2 - 1)(\Lambda^2 + \tilde{\omega} \tilde{C} \Lambda - \tilde{k}_\beta) - \tilde{k}_{x\beta}^2 = 0. \quad (14)$$

В случае симметричного расположения опор ($\tilde{k}_{x\beta} \sim 0$) корни уравнения (14) находятся аналитически. При этом корни (13) принимают вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & - \frac{(1 - \tilde{C} + \tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_\beta}{(\tilde{\omega}^2 - 1)[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - \tilde{k}_\beta]} \tilde{\omega}^4 \cdot \frac{1 \pm p}{\tilde{b}} \tilde{m} + O(\tilde{m}^2), \\ \lambda_{3,4} = & -\tilde{b} + O(\tilde{m}), \\ \lambda_{5,6} = & -i(\tilde{\omega} \mp 1) - \frac{1 - \tilde{k}_\beta \mp \tilde{\omega} \tilde{C}}{2(1 - \tilde{k}_\beta \pm \tilde{\omega} \tilde{C})} \tilde{b}_x + O(\tilde{b}_x^2), \\ \lambda_{7,8} = & -i(\tilde{\omega} \tilde{C} \mp \sqrt{\tilde{\omega}^2 \tilde{C}^2 + 4\tilde{k}_\beta}) / 2 - \\ & - \frac{(1 + \tilde{k}_\beta)\tilde{k}_\beta}{\tilde{C} \tilde{\omega} (4\tilde{\omega} \tilde{C} \pm 3\sqrt{\tilde{\omega}^2 \tilde{C}^2 + 4\tilde{k}_\beta})} \tilde{b}_x + O(\tilde{b}_x^2), \quad \lambda_{9,12} = \bar{\lambda}_{5,8}. \end{aligned}$$

Эти же корни в размерном виде

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & - \frac{\omega^4}{2} \sqrt{\frac{M}{k_x}} \frac{(A - C_r + Md^2)\omega^2 - k_\beta - d^2 k_x}{(\omega^2 M - k_x)[\omega^2(A - C_r) - k_\beta]} \times \\ & \times \frac{1 \pm p}{b_r} m^2 n + O\left(\frac{m^2 n^2}{M^2}\right), \\ \lambda_{3,4} = & - \frac{b_r}{\kappa m} \sqrt{\frac{M}{k_x}} + O\left(\frac{mn}{M}\right), \\ \lambda_{5,6} = & -i \left(\omega \sqrt{\frac{M}{k_x}} \mp 1 \right) + \\ & + \frac{b_x}{2\sqrt{Mk_x}} \frac{\omega \mp (Ak_x - Mk_\beta) / (\sqrt{Mk_x} C_r)}{\omega \pm (Ak_x - Mk_\beta) / (\sqrt{Mk_x} C_r)} + O\left(\frac{b_x^2}{k_x M}\right), \end{aligned}$$

$$\lambda_{7,8} = -i \frac{C_r}{2A} \sqrt{\frac{M}{k_x}} (\omega \mp \sqrt{\omega^2 + 4k_{\beta} A / C_r^2}) - \frac{(k_x A / C_r^2 + k_{\beta} M / C_r^2) k_{\beta} / k_x}{\omega (4\omega \pm 3\sqrt{\omega^2 + 4k_{\beta} A / C_r^2})} \frac{b_x}{\sqrt{Mk_x}} + O\left(\frac{b_x^2}{k_x M}\right),$$

$$\lambda_{9,12} = \bar{\lambda}_{5,8}.$$

Анализ устойчивости.

Корни $\lambda_{3,12}$ имеют отрицательную действительную часть, а следовательно, соответствующие им частные решения асимптотически устойчивы при любых . Эти корни определяют быстрые переходные процессы, при которых практически прекращаются движения КГ относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу КГ и дисбаланса ротора. Скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, его скорости вращения, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений КГ. Поэтому возможна отдельная оптимизация этих параметров роторной машины с целью скорейшего наступления ее автобалансировки.

Корни $\lambda_{1,2}^{(1)}$ устойчивы при выполнении условия

$$\{(\tilde{\omega}^2 - 1)[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - \tilde{k}_{\beta}] - \tilde{k}_{x\beta}^2\} \times \times [(1 - \tilde{C} + \tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_{\beta} + 2\tilde{d}\tilde{k}_{x\beta}] > 0. \quad (15)$$

В размерном виде условие (15) имеет вид

$$\{(M\omega^2 - k_x)[\omega^2(A - C_r) - k_{\beta}] - k_{x\beta}^2\} \times \times [(A - C_r + Md^2)\omega^2 - d^2k_x - k_{\beta} + 2dk_{x\beta}] > 0. \quad (16)$$

Условие (16), с точностью до обозначений, получено и исследовано в работе [5] при помощи эмпирического критерия наступления автобалансировки, и в работе [14] – при помощи энергетического метода, основанного на применении функции Гамильтона. Условие (16) получено для многосферного, многомятникового или многошарового АБ и ротора, заключенного в упруго-вязко закреплённый корпус, а условия в работах [5, 14] получены для любого типа АБ и ротора на упругих опорах.

Корни $\lambda_{1,2}^{(1)}$ соответствуют медленным переходным процессам – реакции КГ на движение ротора, установившееся после затухания быстрых переходных процессов. КГ медленно стремятся к автобаланси́ровочному положению. При чрезмерном количестве КГ существует семья установившихся движений и КГ стремятся к одному из движений этой семьи. Скорость протекания медленных переходных процессов зависит уже и от уравновешиваемого дисбаланса, количества КГ и их текущих положений, но не зависит от сил сопротивления опор.

Полученные разложения корней позволяют оптимизировать параметры роторной машины из

условия наименьшего времени наступления автобаланси́ровки.

Результаты работ [5, 14] позволяют сделать следующие заключения об условиях наступления автобаланси́ровки.

а) Для длинного составного ротора ($C_r < A$):

- если $k_{x\beta} \neq 0$ или $k_{x\beta} = 0, \omega_{c\beta 1} = \sqrt{k_x/M} \neq \omega_{c\beta 2} = \sqrt{k_{\beta}/(A - C_r)}$ и $d \neq 0$, то машина имеет три разные резонансные частоты

$$\omega_{1,3} = \sqrt{\left\{ \omega_{c\beta 1}^2 + \omega_{c\beta 2}^2 \pm \sqrt{(\omega_{c\beta 1}^2 - \omega_{c\beta 2}^2)^2 + 4k_{x\beta}^2 / [M(A - C_r)]} \right\} / 2},$$

$$\omega_2 = \sqrt{k_x d^2 - 2k_{x\beta} d + k_{\beta}} / \sqrt{A - C_r + Md^2},$$

причем $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ и автобаланси́ровка наступает при $\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, \infty)$;

- если $k_{x\beta} = 0, \omega_{c\beta 1} \neq \omega_{c\beta 2}$ и $d = 0$, то резонансная частота ω_2 совпадает с ω_1 при $\omega_{c\beta 1} > \omega_{c\beta 2}$ или с ω_3 при $\omega_{c\beta 1} < \omega_{c\beta 2}$ и автобаланси́ровка, соответственно, наступает на скоростях $\omega \in (\omega_1, \infty)$ или $\omega \in (\omega_3, \infty)$;
- если $k_{x\beta} = 0$ и $\omega_{c\beta 1} = \omega_{c\beta 2}$, то все три резонансные частоты совпадают – $\omega_{1,2,3} = \omega_{c\beta 1}$ и автобаланси́ровка наступает на скоростях $\omega \in (\omega_1, \infty)$.

Для обеспечения наступления автобаланси́ровки на как можно меньших скоростях вращения ротора нужно уменьшать жесткость закрепления корпуса (k_x, k_{β}).

б) Для сферического составного ротора ($C_r = A$):

- если $k_{\beta} \neq k_{x\beta} d$, то машина имеет две разные резонансные скорости

$$\omega_1 = \sqrt{(k_x - k_{x\beta}^2 / k_{\beta}) / M},$$

$$\omega_2 = \sqrt{(k_x d^2 - 2k_{x\beta} d + k_{\beta}) / (Md^2)},$$

причем $\omega_1 < \omega_2$ и автобаланси́ровка наступает на скоростях $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ (если $d \rightarrow 0$, то $\omega_2 \rightarrow +\infty$). При этом сферический ротор целесообразно уравновешивать в плоскости, проходящей через центр масс ротора и корпуса.

- если $k_{\beta} = k_{x\beta} d$, то резонансные скорости одинаковы ($\omega_1 = \omega_2$) и область автобаланси́ровки вырождается в точку.

в) Для короткого составного ротора ($C_r > A$):

- если $d^2 > (C_r - A) / M$, то у машины существует единственная резонансная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\left\{ \omega_{c\beta 1}^2 - k_{\beta} / (C_r - A) + \sqrt{[\omega_{c\beta 1}^2 + k_{\beta} / (C_r - A)]^2 - 4k_{x\beta}^2 / [M(C_r - A)]} \right\} / 2}$$

и автобаланси́ровка наступает на скоростях $\omega \in (\omega_1, \infty)$;

- если $d^2 \leq (C_r - A) / M$, то у машины появляется дополнительная резонансная частота

$$\omega_2 = \sqrt{(k_x d^2 - 2k_{x\beta} d + k_{\beta}) / (Md^2 - C_r + A)}, \quad \omega_2 > \omega_1$$

и автобаланси́ровка наступает на скоростях $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$.

Для обеспечения наступления автобалансировки на как можно меньших скоростях вращения ротора нужно уменьшать k_x и увеличивать k_p, k_{xp} .

Выводы

1. Корпус и ротор ведут себя как условный составной ротор – более массивный и удлиненный, чем сам ротор, и характеристики этого составного ротора влияют на процесс автобалансировки.
2. Если составной ротор длинный, то у машины существуют три резонансные скорости вращения ротора и автобалансировка наступает между первой и второй и над третьей скоростью. Если составной ротор сферический или короткий, то у машины существует одна или две резонансные скорости вращения ротора. При этом в случае двух резонансных скоростей автобалансировка наступает между этими скоростями, а в случае одной резонансной скорости автобалансировка наступает над этой скоростью для короткого составного ротора, и никогда не наступает для сферического составного ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 1. Leblanc balancers // Machine Design. – 1950. – V. 22. – № 9. – P. 119–124.
2. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 2. Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design. – 1950. – V. 22. – № 10. – P. 103–106.
3. Ларри Дж. Автоматическое балансирование вращающихся масс // Сб. переводов и обзоров периодической иностранной литературы. – 1955. – Т. 23. – № 5. – С. 14–19.
4. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
6. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
7. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск, 1990. – 34 с.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics // Int. J. Rotating Machinery. – 2000. – V. 6. – № 4. – P. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing // Machine Dynamics Problems. – 2001. – V. 25. – № 3/4. – P. 139–152.
10. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of the Sommerfeld-Effect in a Rigid Rotor One-plane Autobalancing Device // Advanced Problems in Mechanics: Proc. of XXX Summer School. – St. Petersburg, 2002. – P. 554–563.
11. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor / L. Sperling, B. Ryzhik, Ch. Linz, H. Duckstein // Mathematics and Computers in Simulation. – 2002. – V. 58. – № 4–6. – P. 351–365.
12. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.

3. Переходные процессы, характеризующие наступление автобалансировки, делятся на: быстрые, при которых прекращаются быстрые движения КГ относительно ротора и устанавливается устойчивое движение ротора, соответствующее текущему суммарному дисбалансу; медленные, при которых КГ приходят в автобалансировочное положение, медленно двигаясь относительно ротора.
4. Скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, скорости вращения ротора, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравниваемого дисбаланса, количества и положений КГ.
5. Скорость протекания медленных переходных процессов дополнительно зависит от уравниваемого дисбаланса, количества и положений КГ, но не зависит от сил сопротивления опор.

Работа выполнена в соответствии с госбюджетной темой Министерства образования и науки Украины № 0105U001506, период выполнения 2012–2014 гг.

13. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Anisotropically Supported Rigid Rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 37–50.
14. Філімоніхін І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух // Збірник наукових праць КНТУ. – 2007. – Вип. № 18. – С. 34–41.
15. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – V. 43. – Iss. 6. – P. 527–541.
16. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
17. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity: *Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics*. – Blacksburg, Virginia, 2010. – 317 p.
18. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
19. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
20. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобаланси́р // Збірник наукових праць КНТУ. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.
21. Филимоныхин Г.Б., Гончаров В.В. Уравнивание автобаланси́ром ротора в упруго-вязко закреплённом корпусе с неподвижной точкой // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 71–77.

Поступила 21.05.2014 г.

UDC 62–752+62–755

ROTOR BALANCING by AUTO-BALANCER IN VISCO-ELASTIC FIXED BED BEING IN SPATIAL MOTION

Gennadiy B. Filimonikhin,

Dr. Sc., Kirovograd National Technical University, 8, University Avenue,
Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: filimonikhin@yandex.ua

Valery V. Goncharov,

Cand. Sc., Kirovograd National Technical University, 8, University Avenue,
Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: matkora@yandex.ru.

The relevance of the study is caused by the need to research rotor balancing by auto-balancers.

The main aim of the study is to evaluate the transients during static balancing rotor with many corrective weights by auto-balancer. The rotor is placed in heavy visco-elastic fixed bed being in spatial motion; the rotor can spin there.

The methods used in the study: theory of stability of mechanical system steady motions; mathematical theory of motion stability by Lyapunov.

The results: the authors have determined the conditions of auto-balance occurring and have found out that:

- bed and rotor form conventionally the composite rotor, more massive and long; its characteristics influence auto-balancing;
- transients that characterize auto-balancing are divided into: fast – when corrective weights motion relative to rotor stop and rotor motion corresponding to the total imbalance of corrective weights and rotor imbalance is set; slow – when corrective weights come in auto-balancing position moving relative to rotor;
- flow rate of the fast transients depends on bed fixing parameters, inertia characteristics of the composite rotor, rotation speed, balancing plane position, viscous resistance forces influencing the corrective weights; it does not depend on rotor imbalance, quantity and positions of corrective weights;
- flow rate of slow transients depends additionally on rotor imbalance, number and positions of corrective weights, but it does not depend on resistance forces of supports.

Key words:

Rotor, imbalance, auto-balancer, main motion, stability of motion.

It is the taxpayer-funded research of the Ministry of Education and Science of the Ukraine № 0105U001506, 2012–2014.

REFERENCES

1. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 1. Leblanc balancers. *Machine Design*, 1950, vol. 22, no 9, pp. 119–124.
2. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 2. Ring, pendulum and ball balancers. *Machine Design*, 1950, vol. 22, no. 10, pp. 103–106.
3. Larri Dzh. Avtomaticheskoe balansirovanie vrashchayushchikhsya mass [Automatic balancing of rotating masses]. *Sbornik perevodov i obzorov periodicheskoy inostrannoy literatury* [Translations and reviews of periodic foreign literature]. Moscow, 1955, vol. 23, no 5, pp. 14–19.
4. Gusarov A.A. *Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya* [Autobalancing direct action devices]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 119 p.
5. Filimonikhin G.B. *Zrivnovazhennyya i vibrozakhyst rotoriv avtobalansirami z tverdymi korigivalnymi vantazhami* [Balancing and vibration protection of rotors by avtobalancers with solid corrective weights]. Kirovograd, KNTU Publ., 2004. 352 p.
6. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic balancing of rotors of the devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, Tomsk University Press, 1985. 84 p.
7. Nesterenko V.P. *Teoriya i praktika ustroystv avtomaticheskoy balansirovki rotorov. Avtoreferat Dokt. Dis.* [Theory and practice of devices of automatic rotors balancing. Dr. Diss. Abstract]. – Novosibirsk, 1990. – 34 p.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics. *Int. J. Rotating Machinery*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 2001, vol. 25, no. 3/4, pp. 139–152.
10. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of the Sommerfeld-Effect in a Rigid Rotor One-plane Autobalancing Device. *Proc. Of XXX Summer School «Advanced Problems in Mechanics»*. St. Peterburg, 2002. pp. 554–563.
11. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, vol. 58, no. 4–6, pp. 351–365.
12. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
13. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Anisotropically Supported Rigid Rotors. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 37–50.
14. Filimonikhina I.I. Zastosuvannya funktsii Gamiltona do viznachennya umov zrivnovazhennyya avtobalansiramy rotora, zdiysnyuyuchogo prostorovery rukh [Applying Hamilton function to determine the conditions of rotor balancing by avtobalancers, making spatial movement]. *Zbirnyk naukovykh prats KNTU*, 2007, Iss. 18, pp. 34–41.
15. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, Iss. 6, pp. 527–541.
16. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, Iss. 3, pp. 884–896.

17. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity. *Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics*. Blacksburg, Virginia, 2010. 317 p.
18. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, Iss. 9, pp. 1139–1154.
19. Blekhman I.I. *Sinkhronizatsiya dinamicheskikh sistem* [The sync of dynamic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 896 p.
20. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Metodika skladannya dyferentsialnykh rivnyan rukhu rotornykh sistem z avtobalansirami i i'i' zastosuvannya do sistemy rotor – masyvny korpus – avtobalansir [Methodology of compiling differential equations of rotor system motion with avtobalancers and its application to rotor systems – a massive building – avtobalancer]. *Zbirnik naukovykh prats KNTU*, 2009, Iss. 22, pp. 357–363.
21. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Uravnovesivanie avtobalansirov rotora v uprugovo-vyazkoy zakreplennom korpusy s nepodvizhnoy tochkoy [Rotor balancing in visco-elastic fixed casing with fixed point using avtobalancer]. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no 2, pp. 71–77.

Received: 21 May 2014.