УДК 621.52+511.52

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Симонян Саргис Оганесович,
д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Республика Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105.
E-mail: ssimonyan@seua.am

Паповян Рубен Артурович,
аспирант кафедры информационных технологий и автоматизации Национального политехнического университета Армении, Республика Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105. E-mail: ruben.papovyan@gmail.com

Актуальность работы *обусловлена необходимостью разработки нового эффективного метода определения непрерывных решений однопараметрических линейных матричных уравнений, достаточно часто встречающихся в различных областях науки и техники, таких как идентификация параметров электротехнических (вероятно электромеханических) преобразователей энергии, оптимизация параметров электрических сетей, регистрация и обработка измерений скважинной геофизики и др.*
Цель исследования: *разработка простого конструктивного численно-аналитического метода определения решений отмеченного класса задач, легко реализуемого средствами современных информационных технологий.*
Методы исследования. *Для решения рассматриваемых задач в работе использованы методы матричной линейной алгебры, методы теории матриц, а также прямые и обратные дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова, отличающиеся от общеизвестных интегральных преобразований достаточно положительными характеристиками – операцией дифференцирования вместо операции интегрирования (прямое преобразование) и операцией суммирования вместо операции интегрирования (обратное преобразование).*
Результаты. *Предложен конструктивный численно-аналитический метод решения однопараметрических линейных матричных уравнений применением дифференциальных преобразований. При этом решение исходной непрерывной задачи фактически сводится к решению рекуррентной цепочки некоторых линейных систем алгебраических уравнений с числовой инвариантной гиперматрицей и гипервекторами (составными векторами) свободных членов правых частей, при которых определяются матричные дискреты решения исходной задачи. Далее на основе некоторого восстанавливающего соотношения (обратных дифференциальных преобразований) определяется непрерывное решение исходной задачи. Рассмотрен модельный пример, при решении которого предложенным численно-аналитическим методом получено точное маклореновское аналитическое решение, подтверждающее простоту и высокую вычислительную эффективность метода.*

Ключевые слова:
Геоинформационные системы, однопараметрические линейные матричные уравнения, дифференциальные преобразования, рекуррентная цепочка линейных систем алгебраических уравнений, матричные дискреты, непрерывное решение, модельный пример.

Введение

В теории матриц и её различных приложениях, в частности, в задачах управления и автоматического регулирования [1–4] и многих других областях научных исследований, достаточно часто встречаются различные матричные уравнения – как числовые, так и параметрические. Если решению числовых матричных уравнений посвящено большое количество публикаций, в частности [5–12], то в области методов решения однопараметрических матричных уравнений замечается значительное отставание. Аналогичная картина имеет место как в числовых, так и в однопараметрических задачах, в которых широко используются обычные и обобщённые обратные матрицы, в частности, в задачах различных геоинформационных систем [13–17]. Здесь также, если определению числовых обычных и обобщённых обратных матриц посвящено множество работ, в частности [8, 10, 18–21], то в области методов определения однопараметрических обычных и обобщённых обратных матриц также замечается значительное отставание. В одной из таких немногих работ (см., например, [22]) для нахождения однопараметрических обычных и обобщённых обратных матриц были использованы дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [23–27].

При решении матричных уравнений особое место занимают методы, оперирующие различными алгебраическими подходами и широко использующие матричные преобразования. В настоящей работе предлагается метод решения однопараметрических линейных матричных уравнений, также основанный на дифференциальных преобразованиях, и также оперирующий алгебраическим подходом.

Математический аппарат

Рассмотрим общее однопараметрическое линейное матричное уравнение

$$\sum_{l=1}^{p} A_l(t)X(t)B_l(t) = C(t), \qquad (1)$$

где $A_l(t)$, $l=\overline{1,p}$ – матрицы порядка m; $B_l(t)$, $l=\overline{1,p}$ – матрицы порядка n; $C(t)$ – матрица с размерами $m\times n$; $X(t)$ – неизвестная матрица также с размерами $m\times n$, подлежащая определению:

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ x_{m1}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}=(x_{ij}(t)),$$
$$i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Предположим, что для матриц $A_l(t)$, $B_l(t)$, $l=\overline{1,p}$; $C(t)$ и $X(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования [23–27]

$$A_l(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\left.\frac{dA_l^k(t)}{dt^k}\right|_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq$$
$$\risingdotseq\ A_l(t)=\chi_1(t,t_v,H,A_l(K),K=\overline{0,\infty}),\ l=\overline{1,p}, \tag{3}$$

$$B_l(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\left.\frac{dB_l^k(t)}{dt^k}\right|_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq$$
$$\risingdotseq\ B_l(t)=\chi_2(t,t_v,H,B_l(K),K=\overline{0,\infty}),\ l=\overline{1,p}, \tag{4}$$

$$C(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\left.\frac{dC^k(t)}{dt^k}\right|_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq$$
$$\risingdotseq\ C(t)=\chi_3(t,t_v,H,C(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{5}$$

$$X(K)=\frac{H^k}{K!}\cdot\left.\frac{dX^k(t)}{dt^k}\right|_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \risingdotseq$$
$$\risingdotseq\ X(t)=\chi_4(t,t_v,H,X(K),K=\overline{0,\infty}), \tag{6}$$

где $A_l(K)$, $l=\overline{1,p}$ – матричные дискреты матриц $A_l(t)$, $l=\overline{1,p}$; $B_l(K)$, $l=\overline{1,p}$ – матричные дискреты матриц $B_l(t)$, $l=\overline{1,p}$; $C(K)$ – матричные дискреты матрицы $C(t)$; $X(K)$ – матричные дискреты матрицы $X(t)$; $K=\overline{0,\infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; символ $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\bullet)$–$\chi_4(\bullet)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A_l(t)$, $B_l(t)$, $l=\overline{1,p}$; $C(t)$ и $X(t)$ соответственно.

Теперь, с учетом (3)–(6), в соответствии с правилами алгебры дифференциальных преобразований ([23, С. 72, формула (4.7)]) на основе использования матричного уравнения (1) при переводе его из области оригиналов в область дифференциальных изображений будем иметь соотношение

$$\sum_{l=1}^{P}\left(\sum_{u=o}^{k}A_l(K-U)\sum_{v=0}^{u}X(V)B_l(U-V)\right)=C(K),$$
$$K=\overline{0,\infty}. \tag{7}$$

Тогда с учетом представления (7) получим:

<u>при $K=0$:</u>

$$\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(0)B_l(0)=C(0)$$

или

$$A_1(0)X(0)B_1(0)+A_2(0)X(0)B_2(0)+\cdots$$
$$\cdots+A_P(0)X(0)B_P(0)=C(0), \tag{8}$$

где $A_l(0)$, $B_l(0)$, $l=\overline{1,p}$ и $X(0)$, $C(0)$ – нулевые по номеру матричные дискреты. Для определения из последнего матричного уравнения неизвестного матричного дискрета $X(0)$ воспользуемся подходом, представленным в [8, 10]. В соответствии с ним матричное уравнение (8) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$G(0,0)_{mn\times mn}\,\hat{X}(0)_{mn\times 1}=\hat{C}(0)_{mn\times 1}, \tag{9}$$

где составные векторы

$$\hat{X}(0)=(x_{11}(0),\cdots,x_{1n}(0)\vdots x_{21}(0),\cdots,$$
$$x_{2n}(0))\vdots\cdots\vdots x_{m1}(0),\cdots,x_{mn}(0))^T, \tag{10}$$

$$\hat{C}(0)=(c_{11}(0),\cdots,c_{1n}(0)\vdots c_{21}(0),\cdots,$$
$$c_{2n}(0))\vdots\cdots\vdots c_{m1}(0),\cdots,c_{mn}(0))^T, \tag{11}$$

а гиперматрица

$$G(0,0)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(0)\otimes B_l^T(0)) \tag{12}$$

является суммой прямых (кронекеровых) произведений матриц $A_l(0)$ и $B_l^T(0)$, $l=\overline{1,p}$. Тогда, с учетом (10)–(12) и теоремы 8.4.1 из [10. С. 239] при условии $rangG(0,0)=mn$ решение системы (9) будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{X}(0)=G^{-1}(0,0)\,\hat{C}(0); \tag{13}$$

<u>при $K=1$:</u>

$$A_1(1)X(0)B_1(0)+A_1(0)X(1)B_1(0)+A_1(0)X(0)B_1(1)+$$
$$+A_2(1)X(0)B_2(0)+A_2(0)X(1)B_2(0)+$$
$$+A_2(0)X(0)B_2(1)+\cdots+A_P(1)X(0)B_P(0)+$$
$$+A_P(0)X(1)B_P(0)+A_P(0)X(0)B_P(1)=C(1)$$

или

$$\sum_{l=1}^{P}A_l(1)X(0)B_l(0)+\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(1)B_l(0)+$$
$$+\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(0)B_l(1)=C(1). \tag{14}$$

Тогда, по аналогии (8) из (14) имеем:

$$G(1,0)\,\hat{X}(0)+G(0,0)\,\hat{X}(1)+G(0,1)\,\hat{X}(0)=\hat{C}(1), \tag{15}$$

где составные векторы:

$$\hat{X}(1)=(x_{11}(1),\cdots,x_{1n}(1)\vdots x_{21}(1),\cdots,$$
$$x_{2n}(1)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(1),\cdots,x_{mn}(1))^T, \tag{16}$$

$$\hat{C}(1)=(c_{11}(1),\cdots,c_{1n}(1)\vdots c_{21}(1),\cdots,$$
$$c_{2n}(1)\vdots\cdots\vdots c_{m1}(1),\cdots,c_{mn}(1))^T, \tag{17}$$

а гиперматрицы

$$\begin{cases} G(1,0)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(1)\otimes B_l^T(0)), \\ G(0,1)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(0)\otimes B_l^T(1)). \end{cases} \quad (18)$$

Далее, с учетом (16)–(18), из (15) получим

$$G(0,0)\,\hat{X}(1)+\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,1}\\ r=\overline{0,1}}}^{q+r=1}G(q,r)\right]\hat{X}(0)=\hat{C}(1),$$

откуда

$$\hat{X}(1)=G^{-1}(0,0)\left\{\hat{C}(1)-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,1}\\ r=\overline{0,1}}}^{q+r=1}C(q,r)\right]\hat{X}(0)\right\}; \quad (19)$$

<u>при K=2:</u>

$$\begin{gathered} A_1(2)\cdot X(0)\cdot B_1(0)+A_1(0)\cdot X(2)\cdot B_1(0)+ \\ +A_1(0)X(0)B_1(2)+A_1(1)X(1)B_1(0)+ \\ +A_1(1)X(0)B_1(1)+A_1(0)X(1)B_1(1)+ \\ +A_2(2)X(0)B_2(0)+A_2(0)X(2)B_2(0)+ \\ +A_2(0)X(0)B_2(2)+A_2(1)X(1)B_2(0)+ \\ +A_2(1)X(0)B_2(1)+A_2(0)X(1)B_2(1)+\cdots \\ \cdots+A_P(2)X(0)B_P(0)+A_P(0)X(2)B_P(0)+ \\ +A_P(0)X(0)B_P(2)+A_P(1)X(1)B_P(0)+ \\ +A_P(1)X(0)B_P(1)+A_P(0)X(1)B_P(1)=C(2) \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} \sum_{l=1}^{P}A_l(2)X(0)B_l(0)+\sum_{l=1}^{P}A_l(1)X(1)B_l(0)+ \\ +\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(2)B_l(0)+\sum_{l=1}^{P}A_l(1)X(0)B_l(1)+ \\ +\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(0)B_l(2)+\sum_{l=1}^{P}A_l(0)X(1)B_l(1)=C(2). \end{gathered} \quad (20)$$

Тогда, по аналогии (8) или (14), из (20) имеем

$$\begin{gathered} G(2,0)\,\hat{X}(0)+G(1,0)\,\hat{X}(1)+G(0,0)\,\hat{X}(2)+ \\ +G(1,1)\,\hat{X}(0)+G(0,2)\,\hat{X}(0)+G(0,1)\,\hat{X}(1)=\hat{C}(2), \end{gathered} \quad (21)$$

где составные векторы

$$\begin{gathered} \hat{X}(2)=(x_{11}(2),\cdots,x_{1n}(2)\vdots x_{21}(2),\cdots, \\ x_{2n}(2)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(2),\cdots,x_{mn}(2))^T, \end{gathered} \quad (22)$$

$$\begin{gathered} \hat{C}(2)=(\tilde{n}_{11}(2),\cdots,\tilde{n}_{1n}(2)\vdots \tilde{n}_{21}(2),\cdots, \\ \tilde{n}_{2n}(2)\vdots\cdots\vdots \tilde{n}_{m1}(2),\cdots,\tilde{n}_{mn}(2))^T, \end{gathered} \quad (23)$$

а гиперматрицы

$$\begin{cases} G(2,0)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(2)\otimes B_l^T(0)), \\ G(1,1)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(1)\otimes B_l^T(1)), \\ G(0,2)=\sum_{l=1}^{P}(A_l(0)\otimes B_l^T(2)). \end{cases} \quad (24)$$

Далее, с учетом (22)–(24), из (21) получим

$$\begin{gathered} G(0,0)\,\hat{X}(2)+\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,2}\\ r=\overline{0,2}}}^{q+r=2}G(q,r)\right]\times \\ \times\hat{X}(0)+\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,1}\\ r=\overline{0,1}}}^{q+r=1}G(q,r)\right]\hat{X}(1)=\hat{C}(2), \end{gathered}$$

откуда

$$\hat{X}(2)=G^{-1}(0,0)\left\{\begin{gathered}\hat{C}(2)-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,2}\\ r=\overline{0,2}}}^{q+r=2}G(q,r)\right]\times \\ \times\hat{X}(0)-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,1}\\ r=\overline{0,1}}}^{q+r=1}G(q,r)\right]\hat{X}(1)\end{gathered}\right\}. \quad (25)$$

Теперь, не вдаваясь в подробности, представим общее окончательное соотношение по определению K-го гипервекторного дискрета $\hat{X}(K)$ составного вектора $\hat{X}(t)$. Имея ввиду (13), (19) и (25), получим:

$$\begin{gathered} \hat{X}(K)=G^{-1}(0,0)\times \\ \times\left\{\begin{gathered} C(K)-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,K}\\ r=\overline{0,K}}}^{q+r=K}G(q,r)\right]\times \\ \times\hat{X}(0)-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,K-1}\\ r=\overline{0,K-1}}}^{q+r=K-1}G(q,r)\right]\times \\ \times\hat{X}(1)-\cdots-\left[\sum_{\substack{q=\overline{0,1}\\ r=\overline{0,1}}}^{q+r=1}G(q,r)\right]\hat{X}(K-1) \end{gathered}\right\}, \end{gathered} \quad (26)$$

где составные векторы

$$\hat{X}(K)=\begin{pmatrix} x_{11}(K),\cdots x_{1n}(K)\vdots x_{21}(K), \\ \cdots x_{2n}(K)\vdots\cdots\vdots x_{m1}(K),\cdots x_{mn}(K) \end{pmatrix}^T, \quad (27)$$

$$\hat{C}(K) = \begin{pmatrix} c_{11}(K), \cdots c_{1n}(K) \vdots c_{21}(K), \\ \cdots c_{2n}(K) \vdots \cdots \vdots c_{m1}(K), \cdots c_{mn}(K) \end{pmatrix}^T, \qquad (28)$$

а гиперматрица

$$\begin{cases} G(K,0) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(K) \otimes B_l^T(0)), \\ G(K-1,0) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(K-1) \otimes B_l^T(0)), \ldots, \\ G(1,1) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(1) \otimes B_l^T(1)), \\ G(1,0) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(1) \otimes B_l^T(0)), \\ G(0,0) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(0) \otimes B_l^T(0)), \\ G(0,1) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(0) \otimes B_l^T(1)), \ldots, \\ G(0,K-1) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(0) \otimes B_l^T(K-1)), \\ G(0,K) = \sum_{l=1}^{P} (A_l(0) \otimes B_l^T(K)). \end{cases} \qquad (29)$$

Таким образом, с учетом (27)–(29), вычислив составные векторы дискрет $\hat{X}(0), \hat{X}(1), \hat{X}(2), \ldots, \hat{X}(K)$, в соответствии с представлениями (13), (19), (25), (26), с учетом некоторого матричного обратного дифференциального преобразования (6) можно восстанавливать решение (2).

Модельный пример

Пусть задано однопараметрическое линейное матричное уравнение с комплексными матрицами

$$\begin{bmatrix} (1+t) & 0 & 0 \\ (-1+jt) & (1+j) & 0 \\ 0 & jt & 1 \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & jt \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ j & (1-jt) & 1 \\ jt & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ jt & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & jt \\ 0 & jt & 1 \\ j & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -jt \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (2-2t+jt+3jt^2) & (t+t^2) \\ (t+t^2+j+4jt) & (-4t+2jt+jt^2) \\ (2jt+jt^2) & (-t-2t^2+jt^2) \end{bmatrix},$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда, при $t_v=0$, $H=1$ приходим к следующим маклореновским матричным дискретам:

<u>при $K=0$:</u>

$$A_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & (1+j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_1(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, \; B_1(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2;$$

$$A_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ j & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ j & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2;$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{bmatrix}, \; B_2(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2;$$

$$A_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ j & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2;$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_3(1) = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_3(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \forall K \ge 2.$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C(1) = \begin{bmatrix} (-2+j) & 1 \\ (1+4j) & (-4+2j) \\ 2j & -1 \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 3j & 1 \\ 1 & j \\ j & (-2+j) \end{bmatrix}, \; C(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; k \ge 3.$$

Следовательно, имея ввиду (12), получим

$$A_1(0) \otimes B_1^T(0) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -j & 0 & (-1+j) & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (1+j) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$A_2(0) \otimes B_2^T(0) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ \hline j & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & j & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$A_3(0)\otimes B_3^T(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G(0,0)=\begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & (1+2j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^{-1}(0,0)=-\frac{1}{3+2j}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 & (-1-2j) & 0 & 1 & 0 & (-2+j) \\ 0 & -4j & 0 & -2j & (-2+3j) & (-1+2j) \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 2j \\ (-3-2j) & (-2-j) & 0 & -2j & 0 & 2 \\ 0 & 2j & 0 & j & 0 & (-1-2j) \\ 0 & 2j & (-3-2j) & j & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а составной вектор $\hat{X}(0)$ с учетом (13) и нулевая по номеру матричная дискрета $X(0)$ будут выглядеть так:

$$\hat{X}(0)=G^{-1}(0,0)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ j \end{pmatrix},\quad X(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

Далее, при K=1 имеем:

$$A_1(1)\otimes B_1^T(0)=\begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2(1)\otimes B_2^T(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3(1)\otimes B_3^T(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(1,0)=\begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -j & j & 0 & 0 \\ j & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(0)\otimes B_1^T(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & (-1+j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix},$$

$$A_2(0)\otimes B_2^T(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3(0)\otimes B_3^T(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 \end{bmatrix},$$

Следовательно, в соответствии с (15) имеем

$$G(0,0)\cdot\hat{X}(1)=\hat{C}(1)-G(1,0)\cdot\hat{X}(0)-G(0,1)\cdot\hat{X}(0)=$$

$$=\begin{pmatrix} (-2+j) \\ 1 \\ (1+4j) \\ (-4+2j) \\ 2j \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2j \\ (-2+2j) \\ 2j \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} j \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда составной вектор $\hat{X}(1)$ и матричная дискрета $X(1)$ выглядят так:

$$\hat{X}(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\\hline 0\\0\\\hline 0\\1\end{pmatrix},\quad X(1)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

И, наконец, при K=2 получим:

$$G(2,0)=\cancelto{0}{A_1(2)}\otimes B_1^T(0)+\cancelto{0}{A_2(2)}\otimes B_2^T(0)+$$
$$+\cancelto{0}{A_3(2)}\otimes B_3^T(0)=[0],$$
$$G(1,1)=A_1(1)\otimes B_1^T(1)+A_2(1)\otimes B_2^T(1)+$$
$$+A_3(1)\otimes B_3^T(1)=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0&0&0&0&0&0\\0&j&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\\hline 0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\end{array}\right],$$
$$G(0,2)=A_1(0)\otimes\cancelto{0}{B_1^T(2)}+A_2(0)\otimes\cancelto{0}{B_2^T(2)}+$$
$$+A_3(0)\otimes\cancelto{0}{B_3^T(2)}=[0].$$

Следовательно, в соответствии с (21) имеем:

$$G(0,0)\cdot\hat{X}(2)=\hat{C}(2)-\cancelto{0}{G(2,0)}\cdot\hat{X}(0)-G(1,0)\cdot\hat{X}(1)-$$
$$-G(1,1)\cdot\hat{X}(0)-\cancelto{0}{G(0,2)}\cdot X(0)-G(0,1)\cdot\hat{X}(1)=$$
$$=\left[\begin{pmatrix}3j\\1\\\hline 1\\j\\\hline j\\(-2+j)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2j\\1\\\hline -1\\j\\\hline j\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\\hline 2\\0\\\hline 0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}j\\0\\\hline 0\\0\\\hline 0\\(1+j)\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\\hline 0\\0\\\hline 0\\0\end{pmatrix},$$

откуда составной вектор $\hat{X}(2)$ и матричная дискрета X (2) выглядят так:

$$\hat{X}(2)=\begin{pmatrix}0\\0\\\hline 0\\0\\\hline 0\\0\end{pmatrix},\quad X(2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Такая же картина, как нетрудно убедиться, имеет место и при $\forall K\geq 3$.

Следовательно, окончательное решение задачи $X(t)$ с учетом матричных дискрет $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ при использовании обратных дифферинциально-маклореновских преобразований [22–27] имеет вид:

$$X(t)=\begin{bmatrix}t&0\\0&2\\0&(j+t)\end{bmatrix}.$$

В абсолютной точности этого решения можно легко убедиться его подстановкой в исходное матричное уравнение.

Замечание 1. Очевидно, что разработанный метод можно использовать и для однопараметрических линейных матричных уравнений более общего вида – для уравнений с прямоугольными матрицами $A_l(t)$ и $B_l(t)$, $l=\overline{1,p}$.

Замечание 2. В тех случаях, когда $rang G(0,0)<m\cdot n$, можно поменять центр аппроксимации t_v таким образом, чтобы имело место условие $rang G(0,0)=m\cdot n$, (или, что одно и то же, $\exists G^{-1}(0,0)$) и использовать вычислительные схемы (13), (19), (25) и (26).

Заключение

Таким образом, для нахождения непрерывных решений однопараметрических линейных матричных уравнений (1) при предложенном методе оперируем рекуррентными численными матрично-векторными вычислительными процедурами (9)–(13), (14)–(19), (20)–(25) и (26)–(29), которые предоставляют широкие возможности для эффективного использования средств современных информационных технологий [28–31].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
3. Трофимов А.Н., Егупов Н.Д., Дмитриев А.Н. Методы теории автоматического управления, ориентированные на применение ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 653 с.
4. Helmke U., Moore J.B. Optimization and Dynamical Systems. – London: Springer-Verlag, 1994. – 389 p.
5. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. -385 с.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
7. Воронцов Ю. О. Условия разрешимости и численные алгоритмы для решения линейных, полулинейных, квадратичных и полуторалинейных матричных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: 2014. – 17 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 2010. – 575 с.
9. Икрамов Х. Л. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 190 с.
10. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 666 с.
12. Цехан О.Б. Матричный анализ. – Гродно: ГГУ, 2004. – 371 с.
13. Ганьшин В.Н. Псевдообращение матрицы нормальных уравнений свободных геодезических сетей // Известия вузов. Геодезия, аэрофотосъёмка. – 1989. – Вып. 6. – С. 3–5.
14. Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астромерии. – СПб.: Наука, 1997. – 319 с.

15. Журкин И.Г., Шайтура С.В. Геоинформационные системы. – М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2009. – 273 с.
16. Капустин Ю.Е. Горные компьютерные технологии и геостатистика. – СПб.: Недра, 2002. – 424 с.
17. Михалевич И.М. Применение математических методов при анализе геологической информации (с использованием компьютерных технологий: Statistica). – Иркутск: ИГУ, 2006. – 115 с.
18. Светлаков А.А. Обобщённые обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.
19. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. – NYC: Springer, 2003. – 435 p.
20. Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. – 232 p.
21. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices and Singular Value Decomposition. – NYC: Spring, 2011. – 236 p.
22. Симонян С.О. Методы определения комплексных однопараметрических обобщённых обратных матриц // Известия ТПУ. – 2015. – Т. 326. – № 1. – С. 157–163.
23. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
24. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 158 с.
25. Пухов Г.Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наукова думка, 1988. – 246 с.
26. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
27. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361.
28. Метьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Сиб-Киев, 2001. – 713 с.
29. Шлее М. Qt 9.8. Профессиональное програмирование на C++. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 912 с.
30. Stroustrup B. The C++ Programming Language. 4th ed. – Boston: Addison – Wesley Professional, 2013. – 1368 p.
31. The Math Works, Inc., MATLAB. The Language of technical programming using MATLAB Graphics, Version 7.

Поступила 04.12.2014 г.

UDC 621.52+511.52

METHOD FOR SOLVING ONE-PARAMETER LINEAR EQUATIONS BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

Sargis H. Simonyan,
National Engineering University of Armenia (Polytechnic), 105, Teryan street, Yerevan, 0009, Armenia. E-mail: ssimonyan@seua.am

Ruben A. Papovyan,
National Engineering University of Armenia (Polytechnic), 105, Teryan street, Yerevan, 0009, Armenia. E-mail: ruben.papovyan@gmail.com

The relevance *of the research is caused by the need to develop a new efficient method for defining continuous solutions of one-parametric linear matrix equations, often found in various studies, such as identification of electromechanical energy transformer parameters, optimization of electrical circuits parameter, registration and processing of borehole geophysics measurements, etc.*
The aim *of the research is to develop a simple constructive numerical-analytical method for determining the solution of the mentioned class of problems, which is easy to implement by the modern information technology.*
The investigation methods. *For solving the considered problems, the authors have applied the method of matrix linear algebra, matrix theory method, as well as the direct and inverse differential transforms of G.E. Pukhov, which differ from the well-known integral transforms by rather positive characteristics – a differentiating operation instead of integrating operations (direct transformation) and a summing operation instead of integrating operation (inverse transformation).*
The results. *The authors proposed the constructive numerical-analytical method for solving one-parametric linear matrix equations by using differential transformation. In this case, the solution of the original continuous problem is actually reduced to solving the recurrent chain of some linear systems of algebraic equations by numerical invariant hypermatrix and hypervectors of free members of the right parts, when the matrix discretes for solving the original problem are determined. Then, on the basis of a reducing ratio (inverse differential transformations) the continuous solution of the original problem is determined. The paper considers the model example. Solving this example the exact Maclaurin analytical solution confirming the simplicity and the high computational efficiency of the method is obtained by numerical-analytical method.*
Conclusions. *The proposed constructive numerical-analytical method is based on two basic mathematical apparatus – the operating method of differential transformation and information solutions obtained with the recurrence of linear matrix equations to solve the recurrence of equivalent linear systems of algebraic equations in the widespread use works of kronikorov numerical matrices.*

Key words:
Geoinformation systems, one-parametric linear matrix equations, differential transformations, recurrent chain of linear systems of algebraic equations, matrix discrete, continuous solution, model example.

REFERENCES

1. Afanasev V.N., Kolmanovsky V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya kostruirovaniya sistem upravleniya* [Mathematical theory of designingcontrol systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1998. 574 p.
2. Kvakernaak H., Sivan R. *Lineynye optimalnye sistemy upravleniya* [Linear optimal control systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 650 p.
3. Trofimov A.N., Egupov N.D., Dmitriev A.N. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya, orientirovannye na primenenie EVM* [Methods of the automated control theory, oriented to computer application]. Moscow, Eenergoatomizdat Publ., 1997. 653 p.
4. Helmke U., Moore J.B. *Optimization and Dynamical Systems*. London, Springer-Verlag, 1994. 389 p.
5. Beklemishev D.V. *Dopolnitelnye glavy lineynoy algebry* [Complementary chapters of linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 385 p.
6. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction into the matrix system]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 351 p.
7. Vorontsov Yu.O. *Usloviya razreshimosti i chislennye algoritmy dlya resheniya lineynykh, polulineynykh, kvadratichnykh i polutoralineynykh matrichnykh uravneniy. Aftoreferat Dis. Kand. nauk* [Conditions of solubility and numerical algorithms for solving linear, semi-linear, squared and semi-linear matrix equations. Cand. Diss. Abstract]. Moscow, 2014. 17 p.
8. Gantmaher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 2010. 575 p.
9. Ikramov H. L. Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniy [Numerical solution of matrix equations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 190 p.
10. Lankaster P. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 280 p.
11. Horn R., Dzhonson Ch. *Matrichny analiz* [Matrix analysis]. Moscow, Mir Publ., 1989. 666 p.
12. Tsekhan O.B. *Matrichny analiz* [Matrix analysis]. Grodno, GGU Press, 2004. 371 p.
13. Ganshin V.N. Psevdoobrashchenie matritsy normalnykh uravneniy svobodnykh geodezicheskikh setey [Pseudoinversion of normal equation matrices of free geodetic networks]. Izvestiya vuzov. Geodeziya, aerofotosemka, 1989, Iss. 6, pp. 3–5.
14. Gubanov V.S. *Obobshchenny metod naimenshikh kvadratov. Teoriya i primenenie v astrometrii* [Generalized method of the least squares. Theory and application in astrometry]. St. Petersburg, Nauka Publ., 1997. 319 p.
15. Zhurkin I.G., Shaytura S.V. *Geoinformatsionnye sistemy* [Geo-information systems]. Moscow, KUDIC-PRESS, 2009. 273 p.
16. Kapustin Yu.E. *Gornye kompyuternye tekhnologii i geostatistika* [Mining computer technologies]. St. Petersburg, Nedra Publ., 2002. 424 p.
17. Mikhalevich I.M. *Primenenie matematicheskikh metodov pri analize geologicheskoy informatsii (s ispolzovaniem kompyuternykh tekhnologiy: Statistica)* [Application of mathematical methods when analyzing geologicalinformation (using computer technologies: Statistica)]. Irkutsk, IGU Press, 2006. 115 p.
18. Svetlakov A.A. *Obobshchennye obratnye matritsy: nekotorye voprosy teorii i primeneniya v zadachakh avtomatizatsii upravleniya protsessami* [Generalized inverses: some issues of the theory and applications in the tasks of process control automation]. Tomsk, NTL Publ., 2003. 388 p.
19. Ben-Israel A., Greville T.N.E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. NYC, Springer, 2003. 435 p.
20. Campbell S.L., Meyer C.D. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. 232 p.
21. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices and Singular Value Decomposition*. NYC, Spring, 2011. 236 p.
22. Simonyan S.O. *Metody opredeleniya kompleksnykh odnoparametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits* [Methods for determining complex single-parametric inverse matrices]. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, 2015, vol. 326, no. 1, pp. 157–163.
23. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya funktsiy i uravneniy* [Differential transformations of functions and equations]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 420 p.
24. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Differential transformations and mathematical modeling of physical processes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986. 158 p.
25. Pukhov G.E. *Priblizhennye metody matematicheskogo modelirovaniya, osnovannye na primenenii differentsialnykh T-preobrazovaniy* [Approximate methods of mathematical modeling, based on application of differential T-transforms]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1988. 246 p.
26. Pukhov G.E. *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectra and models]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1990. 184 p.
27. Simonyan S.O., Avetisyan A.G. *Prikladnaya teoriya differentsialnykh preobrazovaniy* [Applied theory of differential transformations]. Erevan, Chartaraget publ., 2010. 361 p.
28. Metews J.G., Fink K.D. *Chislennye metody. Ispolzovanie MATLAB* [Numerical methods. Use of MATLAB]. Moscow, Sib-Kiev, 2001. 713 p.
29. Shlee M. Qt 9.8. *Professionalnoe programirovanie na S + +* [Qt 9.8. Professional programming in S + +]. St. Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2012. 912 p.
30. Stroustrup B. *The S + + Programming Language*. 4th ed. Boston, Addison – Wesley Professional, 2013. 1368 p.
31. *The Math Works, Inc., MATLAB. The Language of technical programming using MATLAB Graphics, Version 7*.

Received: 04 December 2014.