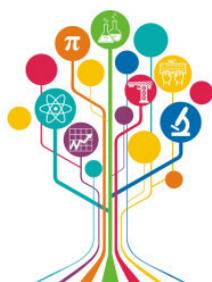


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ

Том 3. Математика

Сборник научных трудов

XVI Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

23–26 апреля 2019 г.

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

Volume 3. Mathematics

Abstracts

XVI International Conference of students, graduate students
and young scientists

April 23–26, 2019



Национальный
исследовательский
**Томский
государственный
университет**



Томск 2019

УДК 501:004(063)
ББК 72:32.81л0
П27

Перспективы развития фундаментальных наук : сборник трудов XVI
П27 Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск,
23–26 апреля 2019 г.). В 7 томах. Том 3. Математика / под ред. И.А. Курзиной,
Г.А. Вороновой. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2019.
– 96 с.

ISBN 978-5-4387-0885-8 (т. 3)
ISBN 978-5-4387-0882-7

Сборник содержит труды участников XVI Международной конференции
«Перспективы развития фундаментальных наук», представленные на секции
«Математика».

Представлены доклады в области математического моделирования и анализа
данных, математических методов в физике, химии, биофизике, биологии, экономике,
медицине, психологии, математической логики и приложений, вычислительной
математики, а также дифференциальных уравнений.

УДК 501:004(063)
ББК 72:32.81л0

Редакционная коллегия

И. А. Курзина, доктор физико-математических наук, доцент;
Г. А. Воронова, кандидат химических наук, доцент;
С. А. Поробова.

ISBN 978-5-4387-0885-8 (т. 3)
ISBN 978-5-4387-0882-7

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ, 2019



Национальный
исследовательский
Томский
государственный
университет

АВТОНОМНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ И БИМЕДИЦИНСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ»



Химический
факультет



САЕ Институт («Умные
материалы и технологии»)

Направление подготовки
Факультет
Форма обучения

Химия
Химический факультет
Очная с элементами
дистанционного обучения
2 года
Русский
10

Продолжительность программы
Язык обучения
Бюджетные места

Условия приёма

Приём на первый курс магистратуры проводится на конкурсной основе по заявлениям лиц, имеющих высшее образование (бакалавриат или специалитет) по результатам вступительных испытаний.

Вступительные испытания: экзамен по химии, собеседование.

Магистерская программа включает возможность обучения по программе двойного диплома совместно с университетом Chemie Paris Tech (Франция). На 2-м курсе обучение осуществляется на площадках Chemie Paris Tech. За период обучения по одной программе магистратуры возможно получить дипломы двух Университетов, углублено освоить курсы химической технологии и инженерии материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ ПРОГРАММЫ

Основы общей
иммунологии

Введение в медицинскую
биологическую химию

Молекулярные методы
в биомедицинских
исследованиях

Элементы физической
химии в процессах
жизнедеятельности

Основы клеточной
биологии
и диагностики клеточных
систем

Химические технологии
в медицине.
Биоматериаловедение

Молекулярная онкология

Основы метрологии, стандартизации и сертификации в области разработки и производства фармацевтических субстанций и биомедицинских материалов

Магистратура «Трансляционные химические и биомедицинские технологии» – ЭТО:

- междисциплинарные знания на стыке химии, биологии, фармакологии, клеточной и молекулярной биомедицины
- компетенции по проведению доклинических и клинических испытаний, разработка технологического регламента, сертификации, маркетингу и малотоннажному производству продукта

- стажировки в ведущих мировых университетах
- диплом международного уровня
- работа с новыми технологиями
- освоение полного цикла получения продукта: синтез-исследование, доклинические исследования, сертификация, маркетинг

КОНТАКТЫ

Менеджер программы: **Шаповалова Елена**, +7 (953) 928 15 49, elenas6691@gmail.com
Заявки оставляйте на сайте: smil.tsu.ru/ru



ПРЕИМУЩЕСТВА ПРОГРАММЫ



Обучение современным химическим и биомедицинским технологиям осуществляется на базе научных центров ТГУ, г. Томска, университетов Гейдельберга и Мюнстера (Германия)



Ведущие зарубежные и российские специалисты



Индивидуальная образовательная траектория



Более 30% учебных дисциплин составляют курсы по выбору



Востребованность специалистов по трансляционным химическим и биомедицинским технологиям

ВЕДУЩИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛИ



Курзина Ирина Александровна
Руководитель магистерской программы;

д.ф.м.н., доцент, профессор кафедры физической и коллоидной химии ХФ ТГУ, зам. заведующего лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия.



Кижковская Юлия Георгиевна
Соруководитель магистерской программы;

д.б.н., профессор, зав. лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия. Университет Гейдельберга, Медицинский факультет, Заведующая Отделом Врожденного Иммуитета и Иммунологической Толерантности Института Трансфузионной Медицины и Иммунологии, Маннгейм, Германия.



Рябов Вячеслав Валерьевич

д.м.н., заместитель директора по научной и лечебной работе НИИ кардиологии Томского НИМЦ, ведущий научный сотрудник лаборатории трансляционной и клеточной биомедицины НИ ТГУ.



Журина Елена Георгиевна

д.м.н., профессор кафедры органической химии ХФ ТГУ, врач иммунолог-аллерголог, профессор кафедры патофизиологии СибГМУ, член российской ассоциации аллергологов и клинических иммунологов, Томск, Россия.



Хайнрих Лотар Альфред

д.х.н., в.н.с. лаборатории трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины НИ ТГУ, Томск, Россия. President of marcotech oHG, Honorary professor of the Westphalian Wilhelms University, Muenster. Руководитель блока инновационных материалов для регенеративной медицины, Мюнстер, Германия



BIOPHARMACEUTICAL COMPANY



LABORATORY FOR TRANSLATIONAL AND MOLECULAR BIOMEDICINE



Фармконтракт группа компаний



ООО «АЛФАРМ»
(г. Москва)



WESTPHALISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER



ТОМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



UNIFAR



UNIVERSITEIT HEIDELBERG

Universiteit Leiden



CHEMIE PARIS TECH

- Тестирование
- 4 курс
- Бакалавриат
- 1 и 2 семестры
- TSU
- 3 и 4 семестры
- Chimie ParisTech
- 5 семестр
- СnPT
- стажировка
- 6 семестр
- Защита
- 2 диплома
- (TSU, Chimie ParisTech)



Chimie ParisTech + TSU
 Междисциплинарная
 магистерская программа
 двойного диплома



ТВОЯ
 образовательная
 траектория

**«Трансляционные химические
 и биомедицинские технологии»**



Chimie ParisTech (Франция) - французская высшая школа, член объединения ParisTech. Престижное образование в направлении химической технологии

Направление подготовки:
 техническое

Условия участия:

1. Средний балл успеваемости не ниже 4.5
2. Рекомендация декана факультета/научного руководителя
3. Уровень английского/французского языка не ниже upper-intermediate.

Форма обучения: очная

Продолжительность программы: 3 года

Язык обучения: французский, английский

При успешном окончании программы двойного диплома, студенты Chimie ParisTech дополнительно получают степень магистра в ТГУ, а студенты ТГУ дополнительно получают степень «Diplôme d'Ingénieur de Chimie ParisTech» в Chimie ParisTech (соответствует степени магистра в области инженерных наук).

WWW: <http://smti.tsu.ru/ru/diplome-dingénieur-de-chimie-paristech/>
 Телефон: + 7 (3822) 78 56 21
 E-mail: gulnara.voronova@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ СКОЛЬЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОПОРНОЙ ЧАСТИ А.А. Каменских, Ю.О. Носов	7
МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЯХ ДЕФОРМАЦИИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНО- УПРУГОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА А.Г. Кушнарёв, Д.Б. Даутбаева	10
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ПРОБИТИИ Л.Р. Ахметшин, Е.Н. Москвичев	13
ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО РАСПЛАВА В ШНЕКОВОМ КАНАЛЕ М.П. Бессонова	16
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТКАНОГО МАТЕРИАЛА С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ А.Е. Гилева	19
МЕТОДИКА И ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ В СОПЛАХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ К.Л. Алигасанова, Р.Ю. Бургомистренко, К.В. Костюшин	22
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА: РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ В.В. Шеметова	25
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ: ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ Г.К. Соколова	28
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЧАСТНОГО ВИДА, ДОПУСКАЮЩИХ ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ОПЕРАТОРОВ А.А. Гайнетдинова	31
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ А.В. Могильников	35
AN EFFICIENT MODIFIED MULTI-STEP METHOD FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS Н. Abdullah	38
INFLUENCE OF THE LONG-RANGE OF COMPACT JETS IN THE ASPIRATION PIPELINE DURING DUST DEPOSING N.N. Akimbekova, A.D. Nurgaliyeva, G.S. Sattarova	41
CONSTRUCTING A RISKY OPTIMAL MEAN/VALUE-AT-RISK PORTFOLIO О.А. Belsner, O.L. Kritski	44
АЛГЕБРА СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В (2+1) ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ А.А. Сараева	47
ИЗЛУЧЕНИЕ ТЕМНЫХ ФОТОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И.В. Ворончихин, Б.И. Василишин	50
ВЛИЯНИЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ВИХРЕВУЮ РЕШЕТКУ В МОДЕЛИ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО А.Е. Кулагин	53
РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ РЕШЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ БОЛЬЦМАНА И ОЦЕНКА ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТИ ПО СРАВНЕНИЮ С МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ Н.С. Гибанов	56

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ ПОЛОСТИ. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА СРЕД	59
С.А. Михайленко	
ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ НА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННУЮ КОНВЕКЦИЮ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ	62
Д.С. Лоенко (Бондаренко)	
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ С ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ МЕТОДАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ	65
М.С. Астанина	
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТА РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ РДТТ И ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛОВИТЕ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ	68
А.В. Червакова, М.С. Середина, К.В. Костюшин	
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ В ПРОТОЧНОМ ТРАКТЕ РДТТ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ НАПОЛНИТЕЛЯ	71
К.В. Костюшин, М.С. Середина, А.В. Червакова	
RELIABILITY MODEL OF A HOMOGENEOUS WARM-STANDBY DATA TRANSMISSION SYSTEM WITH GENERAL REPAIR TIME DISTRIBUTION	74
Н.Г.К. Ноуанкро	
РАЗВЕДОЧНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ОБ ОТКАЗАХ ПРОМЫСЛОВЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПАО «НК «Роснефть»	78
Д.П. Кармачев	
О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПОРЯДКА p	81
А.О. Шерстобитова	
ФОРМИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ КРИПТОВАЛЮТ МЕТОДОМ МАРКОВИЦА	84
Е.К. Фокина	
К СОЗДАНИЮ ПРИКЛАДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ КОГНИТИВНОЙ СФЕРЫ ПАЦИЕНТОВ С НЕВРОЛОГИЧЕСКОЙ ПАТОЛОГИЕЙ	88
В.Б. Обуховская	
ВСТРАИВАЕМЫЙ ЧАТ-БОТ В ГОТОВЫЕ КОРПОРАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ	92
Г.С. Чурсин, Н. И. Исmoilов, А. В. Доржиев	

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ СКОЛЬЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОПОРНОЙ ЧАСТИ

А.А. Каменских, Ю.О. Носов

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.А. Адамов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,

Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, 614990

E-mail: anna_kamenskih@mail.ru

DEFORMATION OF THE FLAT SLIDING LAYER OF THE SPHERICAL BEARING

A.A. Kamenskikh, Yu.O. Nosov

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.A. Adamov

Perm National Research Polytechnic University, Russia, Perm, Komsomolsky avenue, 29, 614990

E-mail: anna_kamenskih@mail.ru

Abstract. Deformation behavior of antifriction material as a thin flat layer of sliding of a spherical bearing is considered in the work. In this case, a periodicity cell with a spherical groove filled with grease is highlighted in the volume of antifriction material and the problem of deforming contact node "rigid steel plate-periodicity cell" is considered. The analysis influence of the antifriction material properties and thickness on the stress-strain state of the node in question taking into account the frictional contact on the mating surfaces under the action of different levels pressure of was performed as part of the work.

Введение. Оптимизация работы ответственных узлов транспортно-логистических систем с целью увеличения безремонтного ресурса их работы является актуальной задачей механики. К таким конструкциям относятся сферические опорные части пролетных строений мостов [1]. Оптимизация работы опорных частей связана с рядом частных задач, в том числе, с задачей о научно обоснованном конструктивном оформлении технологических углублений в плоских и сферических слоях скольжения из антифрикционного полимерного материала.

В работе рассмотрен один из вариантов конструктивного оформления углубления в виде усеченной сферической ямки. В плоском слое скольжения сферической опорной части выделена ячейка периодичности, размеры которой показаны на рис. 1. Плоский слой скольжения контактирует со стальной плитой сферической опорной части.

Постановка задачи. В рамках работы рассматривается задача (рис. 2) о деформировании жестким стальным штампом (1) ячейки периодичности (2) из модифицированного фторопласта с технологическим сферическим углублением (3), заполненным смазочным материалом. Математическая постановка ранее описана в [2], в качестве модели поведения антифрикционного полимерного материала выбрана деформационная теория упругопластичности.

На границе контакта $S_K = S_{K_1} \cup S_{K_2}$ реализуется фрикционное контактное взаимодействие с разными коэффициентами трения, характер распределения зон контактных состояний заранее не известен, на границе контакта реализуются все типы контактных состояний (проскальзывание, отлипание и полное сцепление) [2].

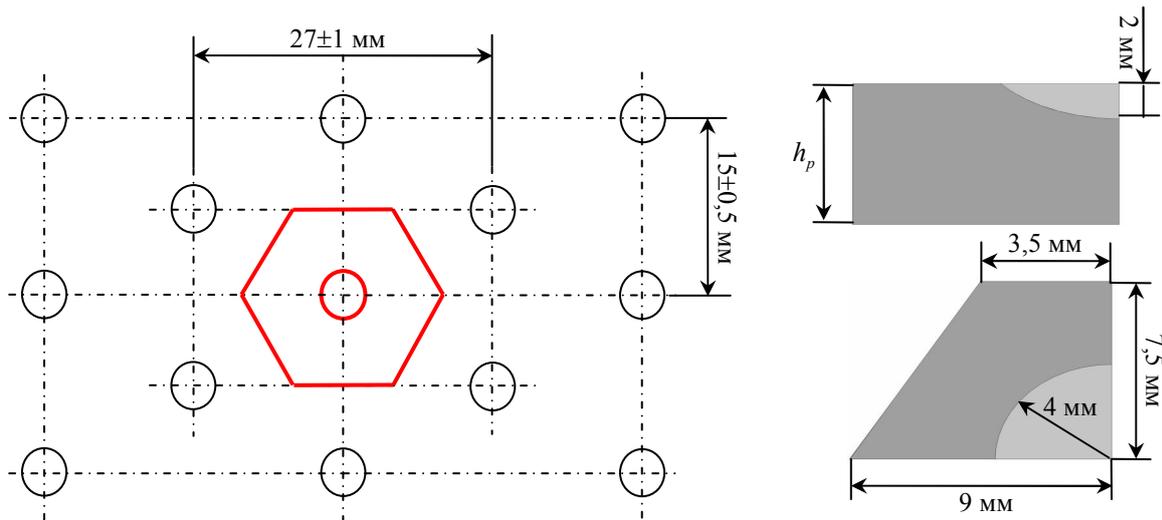


Рис. 1. Фрагмент слоя антифрикционного материала со сферическими углублениями для смазки

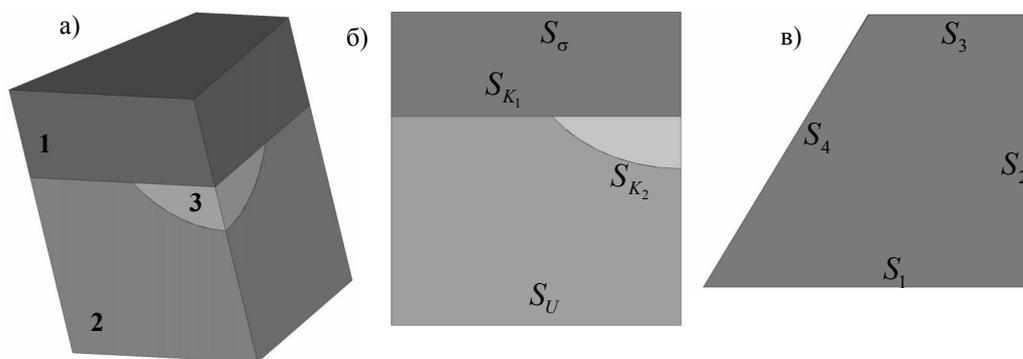


Рис. 2. Расчетная схема деформирования ячейки периодичности стальной плиты:

а) пространственная геометрия; б) вид спереди; в) вид сверху

На границах S_1 , S_2 , S_3 , S_4 действуют условия симметрии, на границе S_U запрещены перемещения, к границе S_σ приложено постоянное давление от 65 до 90 МПа. Так же в работе выполнен анализ влияния толщины прослойки из антифрикционного материала $h_p = 4,6$ и 8 мм на напряженно-деформированное состояние и интегральную жесткость ячейки периодичности.

Результаты. В рамках исследования выявлена зависимость $\sigma_{II}(P)$, а так же рассмотрено влияние толщины антифрикционной прослойки на σ_{II} . На рис. 3 показаны σ_{II} для P , равного 60 и 90 МПа.

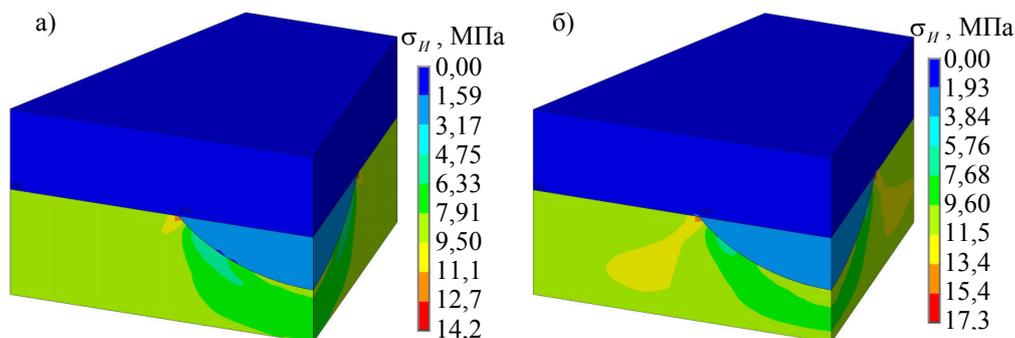


Рис. 3. Интенсивность напряжений: а) $P = 60$ МПа; б) $P = 90$ МПа

При увеличении давления в 1,5 раза, характер распределения σ_{II} имеет незначительные изменения: расположение зоны максимальной интенсивности напряжений не изменяется и находится в зоне контакта полимера с плитой пресса вблизи сферического углубления, заполненного смазкой. Уровень $\max \sigma_{II}$ при увеличении давления в 1,5 раза увеличивается приблизительно в 1,22 раза.

Особый интерес представляют параметры зоны контакта (контактное давление, контактное касательное напряжение и зоны контактных состояний) на границе контакта плиты пресса с ячейкой периодичности, которые показаны на рис. 4 для двух видов давления.

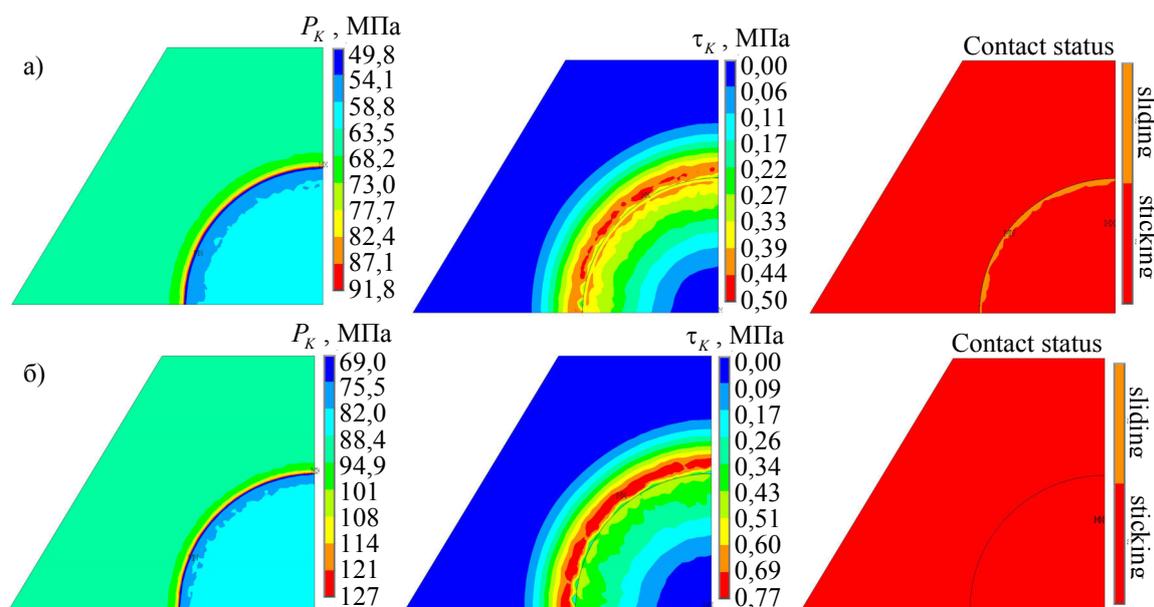


Рис. 4. Параметры зоны контакта: а) $P = 60$ МПа; б) $P = 90$ Мпа

Установлено, что при коэффициенте трения 0,007 в области контакта со смазкой и коэффициенте трения 0,01 в области контакта сталь-полимер максимальный уровень контактного давления P_k (рис. 4) больше приложенного давления P более чем в 1,4 раза. Уровень контактного давления τ_k , как и следовало ожидать для антифрикционного материала, на несколько порядков ниже, чем уровень P_k . Зона проскальзывания при минимальном уровне давления 60 МПа незначительная и находится в зоне контакта плиты пресса со смазочным материалом, при увеличении давления P в рассматриваемой зоне контакта остается только полное сцепление.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00147).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kamenskih A.A., Trufanov N.A. Regularities Interaction of Elements Contact Spherical Unit with the Antifrictional Polymeric Interlayer // Friction and Wear. – 2015. – Т. 36., № 2. – Pp. 170-176.
2. Каменских А.А., Адамов А.А. Численное исследование сферического контактного узла с полимерной антифрикционной прослойкой // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2012. – № 3-2. – С. 48-55.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ ПРИ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЯХ ДЕФОРМАЦИИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНО-
УПРУГОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА**

А.Г. Кушнарёв, Д.Б. Даутбаева

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А.А. Козулин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: kushnarev97@gmail.com

**MODELING OF THE STRESSED-DEFORMABLE CONDITION OF ELEMENTS OF
CONSTRUCTIONS WITH GREAT DEGREES OF DEFORMATION TAKING INTO ACCOUNT
NONLINEAR ELASTIC MECHANICAL BEHAVIOR OF MATERIAL**

A.G. Kushnaryov, D.B. Dautbaeva

Scientific Supervisor: PhD A.A. Kozulin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: kushnarev97@gmail.com

***Abstract.** A comparative analysis of the results of experimental investigation of mechanical behavior of the rubber sample during schemes-uniaxial and biaxial compression testing with numerical simulation results obtained by the finite element method was carried out to determine the correctness of the model applied in the engineering calculations of elastic structural elements made of the rubber. The governing equation represents the five-parameter Mooney-Rivlin model with the constants determined from experimental data. The investigation results showed that these constants reliably describe the mechanical behavior of the material under consideration. The created mathematical model can be used for strength calculations of the responsible elements of the construction from the investigated class of materials.*

Введение. Особенности деформационного поведения и информация об упругопрочностных свойствах при больших степенях деформации играет важную роль при проектировании резиновых опорных частей ответственных механизмов, виброизоляторов и амортизаторов. Высокая концентрация напряжений, возникающая в некоторых местах таких деталей при эксплуатации, способствует тому, что изделие быстро выходит из строя и разрушается раньше заданного срока. В этом случае, использование численного моделирования на этапах проектирования деталей, на практике способствует продлению жизненного цикла механизмов и помогает избежать преждевременных выходов из строя всей конструкции. Определение напряженно-деформированного состояния изделий, изготовленных из резиноподобных материалов, особенностью которых является сохранение нелинейно-упругих свойств при больших деформациях, называемых гиперупругостью, требует выбора определяющих уравнений отличных от тех, что описывают линейно-упругое поведение [1]. Модель Муни-Ривлина является основной моделью, доступной для представления деформационно-деформированного поведения гиперупругих материалов из-за его несложного формирования и способности получать параметры с помощью простых экспериментальных результатов [2,3].

Целью данной работы было создание адекватной физико-математической модели, точно описывающей деформационное поведение конструкционной резины при больших степенях деформаций.

Материал и методы исследования. Для достижения поставленной цели в работе проведён ряд экспериментов по сжатию цилиндрических образцов, изготовленных из конструкционной резины ИРП-1378-1. Эксперименты проводились по двум схемам нагружения – одноосное и двухосное сжатие при скорости деформации 0,01 1/с. Размеры цилиндрических образцов составляли: высота 25 мм; диаметр 17,8 мм. Одноосное сжатие реализовано с возможностью перемещения торцевых поверхностей в радиальных направлениях. Двухосное сжатие проводилось на цилиндрических образцах того же вида, но с приклеенными к торцам стальными таблетками, что предотвращало перемещение их торцов в радиальных направлениях, создавая сложнапряженное состояние при сжатии. В результате проведения двух типов экспериментов испытаны по пять цилиндрических образцов и получены кривые напряжения-деформации для исследуемого материала.

При создании физико-математической модели в качестве определяющего уравнения выбрана многопараметрическая модель Муни-Ривлина. Оригинальное определяющее уравнение Муни-Ривлина, как функция плотности энергии деформации выглядит следующим образом:

$$W = \sum_{i,r=0}^n C_{ir} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^r + \sum_{k=1}^q D_k (J - 1)^{2k},$$

где C_{ir} - константы материала относящиеся к деформационному отклику, D_k - константы материала относящиеся к изменению объема, \bar{I}_1, \bar{I}_2 - первый и второй инварианты левого тензора деформации Коши-Грина.

На основе экспериментальных данных определены значения констант определяющего уравнения. Проведена серия вычислительных экспериментов, в которых имитировались условия проведенных натуральных экспериментов. Задача решалась методом конечных элементов.

Результаты. Результаты экспериментов по сжатию показали, что исследуемый материал может деформироваться упруго вплоть до 70 %, экспериментальные диаграммы имеют ярко выраженную нелинейность, причем начальная линейно-упругая часть деформационной кривой с модулем упругости 8 МПа не превышала 5 %.

Таблица 1

Значения констант для модели Муни-Ривлина

Константа	C_{10}	C_{01}	C_{11}	C_{20}	C_{02}
Значение, МПа	1,63	-1,33	-1,22	1,91	0,27

Для рассматриваемого случая эмпирическим путем определено, что пяти параметрическая модель Муни-Ривлина лучше описывает нелинейное поведение исследуемого материала при больших степенях деформации. Константы определяющего уравнения, полученные регрессионным методом, представлены в таблице. Учет двух видов нагружения при определении констант уравнения уточняют их значения.

При численном решении задачи в связи с большими степенями деформациями возникает проблема с достижением сходимости результатов из-за значительного вырождения формы конечных

элементов. Поэтому в расчетный алгоритм был введен метод адаптивного перестроения конечно-элементной сетки при достижении критического значения их формы.

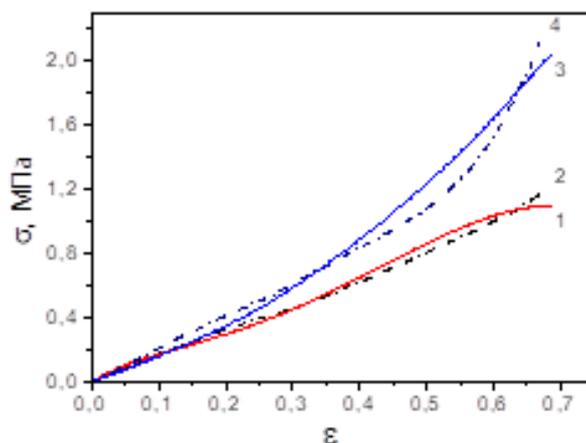


Рис. 1. Сравнение экспериментальных данных с расчетными: 1 – расчет, двухосное сжатие; 2 – эксперимент, двухосное сжатие; 3 – расчет, одноосное сжатие; 4 – эксперимент, одноосное сжатие

Верификация физико-математической модели показала свою адекватность, отражающую реальное деформационное поведение нелинейно-упругого образца при больших степенях деформаций качественно описывая поведение испытываемого объекта, а напряженно-деформированное состояние, возникающие в опытном образце качественно и количественно повторяют результаты натурального эксперимента в пределах допустимой погрешности. Сравнение графиков полученных экспериментально и с использованием вычислительного эксперимента представлено на рис.1.

Заключение. Проведены эксперименты по одноосному и двуосному сжатию образца изготовленного из конструкционной резины ИРП-1378-1. На основе экспериментальных данных создана физико-математическая модель, описывающая нелинейное гиперупругое поведение материала при сжатии стандартных цилиндрических образцов. В качестве определяющего уравнения выбрана пяти параметрическая модель Муни-Ривлина, константы определены на основе результатов натуральных экспериментов. Верификация математической модели показала свою адекватность, отражающую реальное деформационное поведение нелинейно-упругого образца при больших степенях деформаций. Созданная математическая модель может быть использована для прочностных расчетов ответственных элементов конструкции из исследуемого класса материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрипняк В.А., Козулин А.А. Влияние технологических микродефектов структуры на долговечность полимерных материалов // Известия высших учебных заведений. Физика. - 2007. - Т. 50., № 7. - С. 3-6.
2. Mohotti D., Ali M., Ngo T., Lu J., Mendis P. Strain rate dependent constitutive model for predicting the material behavior of polyuria under high strain rate tensile loading // Materials and Design. – 2014. - 53. P. 830-837.
3. Kozulin A.A., Skripnyak V.A. Strength calculation of polymer pipeline elements // The 8th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology KORUS. - 2005. - P. 29-31.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА
ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ПРОБИТИИ**

Л.Р. Ахметшин^{1,2}, Е.Н. Москвичев^{1,2}

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. В.А. Скрипняк

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,

Россия, г. Томск, Академический пр., 2/4, 634021

E-mail: this_is_patrik@mail.ru

**SIMULATION OF DEFORMATION AND FRACTURE OF
SHEET MATERIAL BY PUNCH-TEST**

L.R. Akhmetshin^{1,2}, E.N. Moskvichev^{1,2}

Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.A. Skripnyak

¹National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Institute of Strength and Materials Science SB RAS, Russia, Tomsk, Academic str., 2/4, 634021

E-mail: this_is_patrik@mail.ru

Abstract. *The processes of deformation and destruction of light aluminum alloy AMg6 are numerically investigated. The high strain rate punch tests were conducted. An axially symmetrical cylindrical drummer was chosen as the drummer. Mathematical modeling was carried out to verify the dynamic penetration model. During the simulation results were obtained on the nature of the destruction of numerical samples. Full-scale tests on high-speed penetration were carried out to verify the model.*

Введение. Перспективным направлением при модернизации эффективных образцов защитных конструкций от высокоскоростных ударов является применение легких конструкционных материалов. Также актуален вопрос создания физико-математических моделей, адекватно описывающих данный процесс [1]. В этом вопросе математическое моделирование является удобным теоретическим инструментом, позволяющим реализовать выявление основных механизмов и закономерностей. Дополнительно, адекватная физико-математическая модель позволит оптимизировать режимы высокоскоростного пробития. Поэтому точные прогностические численные модели для алюминиевых сплавов представляют значительный интерес, особенно для аэрокосмической и автомобильной промышленности. Действительно, очень важно предсказать механическое поведение данного класса материалов, зависящих от скорости деформации, подвергающихся ударам и динамической нагрузке [2].

Разрушение твердых тел при динамических нагрузках, в частности, ударными волнами и последующими волнами разгрузки, когда скорости деформации достигают величины 10^4 – 10^6 с⁻¹ и более, имея много общего с процессом разрушения при квазистатических силовых воздействиях, отличается рядом специфических особенностей. Это не позволяет применять для описания явления и предсказания возможности разрушения линейную механику разрушения [3].

Металлы и другие материалы, подвергающиеся динамическим нагрузкам, таким как удар индентора по преграде, подвергаются большим напряжениям в очень лимитированном промежутке времени. Большая часть пластической работы, выполняемой этими динамическими нагрузками, преобразуется в тепло. Поэтому, большие пластические деформации в условиях динамической нагрузки также включают высокие температуры и приводят к термическому размягчению. Конкуренция между деформационным упрочнением и термическим размягчением может приводить к локализованным деформационным неустойчивостям в виде интенсивного локализованного сдвига, что часто приводит к катастрофическому разрушению материала [4].

Основная цель исследования – численное моделирование и анализ механизмов разрушения пластин из алюминиевого сплава 1560, в процессе высокоскоростного пробития недеформируемым снарядом.

Материалы и методы исследования. В качестве материала исследования был выбран легкий конструкционный алюминиевый сплав 1560.

В работе определены механизмы разрушения плоских круглых заготовок из исследуемого сплава проводили методами численного моделирования. Для описания механического поведения исследуемого материала выбрана модель Джонсона-Кука, которая учитывает влияние температуры и скорости деформации на напряжение течения и предельную степень деформации материала:

$$\sigma = \left[A + B\varepsilon_p^n \right] \left[1 + C \log \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right]$$

где ε_p – эффективная пластическая деформация, T_m – температура плавления, T_r – комнатная температура, $A, B, C, n, m, \varepsilon_0$ – параметры модели.

Для создания численных моделей деформационного поведения легких листовых сплавов марки 1560 в условиях больших пластических деформаций проведена серия экспериментов на сервогидравлическом стенде Instron VHS 40/50-20.

Метод определения пластичности при динамическом нагружении листовых сплавов включает в себя двухосное растяжение образцов для испытаний, производимых путем моделирования глубокой вытяжки образцов толщиной 2 мм. При испытаниях аксиально симметричный индентор со скоростью 5, 7.5, и 10 м/с пробивает жестко зафиксированный образец листового материала. При этом материал образца до разрушения испытывает большие пластические деформации.

Результаты и обсуждения. В ходе эксперимента подразумевается разрушение материала, поэтому для более точного численного описания подбиралась модель разрушения. Для описания этого процесса использовали модель разрушения Джонсона–Кука:

$$D = \frac{1}{\varepsilon_f} \sum_i \Delta \varepsilon_p^i$$

где ε_f – величина предельной деформации в материале, $\Delta \varepsilon_p^i$ – приращение эффективной пластической деформации в элементе на i -м шаге интегрирования по времени.

Для визуализации процесса разрушения использовали эрозионную модель. Принцип работы эрозионной модели заключался в следующем: при достижении единицы параметром поврежденности D в элементе, этот элемент автоматически исключался из решения, однако присутствовал в сеточной модели,

создавая иллюзию сплошности, при включении эрозионной модели элементы, в которых достигался критерий разрушения, удалялись. Тем самым, включение в расчет эрозионной модели в совокупности с моделью разрушения Джонсона–Кука позволили получить максимально приближенную к реальности картину разрушения.

Моделирование выполнялось для скоростей удара 5, 7.5 и 10 м/с, чтобы получить баллистический предел. Рассматривалось только воздействие аксиально симметричного цилиндрического ударника с образцом. На рис. 1 представлены кривые сила-время для всех случаев.

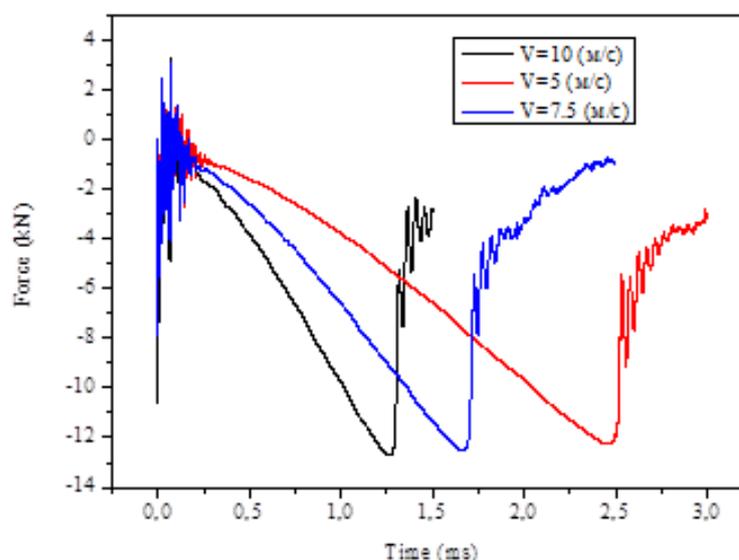


Рис 1. Зависимость деформирующей нагрузки от времени при моделировании разрушения материала со скоростью нагружения 5, 7.5 и 10 м/с

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технологических процессов динамического прессования листовых материалов, а также при оценке прочности и долговечности конструкций из сплава АМг6 при динамических воздействиях.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, направление III.23

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметшин Л.Р., Кушнарев А.Г., Москвичев Е.Н. Численное моделирование деформации образцов листового проката из магниевых сплавов при обработке методом прессования рифлением / В сборнике: Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2017 Сер. "Физико-математическая" 2018. С. 74-81.
2. Sana Koubaa, Jamel Mars, Mondher Wali, Fakhreddine Dammak. Numerical study of anisotropic behavior of Aluminum alloy subjected to dynamic perforation. International Journal of Impact Engineering 101 (2017) 105 – 114.
3. Пунин В.Т. Прогнозирование накопления повреждаемости в металлах в явлении динамического разрушения [Текст] / В.Т. Пунин, А.Я. Учаев, Н.И. Завада, Е.В. Кошелева [и др.] // сб.: VII Забабахинские научные чтения. – Снежинск, 8–12 сентября 2003 г.
4. Y. B. Dodd, Bradley, Adiabatic Shear Localization, Second edi. Elsevier Ltd., 2012, p. 454.

**ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО РАСПЛАВА
В ШНЕКОВОМ КАНАЛЕ**

М.П. Бессонова

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. В.А. Якутенюк
 Национальный исследовательский Томский государственный университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
 E-mail: bessonova.mp@mail.ru

**NUMERICAL MODEL OF THE POLYMER MELT FLOW PROCESS
IN THE SCREW CHANNEL**

M.P. Bessonova

Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.A. Yakutenok
 Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
 E-mail: bessonova.mp@mail.ru

Abstract. In this paper a simple numerical method for solving the polymer melt flow problem in the channel of a single-screw extruder is proposed. The mathematical model of the flow process taking into account non-Newtonian behavior of the processed material and the heat generation due to the viscous dissipation of energy is offered. Taking into account the boundary conditions and the predetermined flow rate the equations of motion reduced to four nonlinear equations. To calculate the temperature of a polymer melt, energy equation is used. The Newton's method and the marching method are used for the numerical solution four nonlinear equations and energy equation.

Введение. Основными технологическими машинами, применяемыми для переработки полимеров, являются экструдеры. В связи с тем, что натурные эксперименты, позволяющие проводить отладку технологических режимов и совершенствовать оборудование, требуют больших затрат времени и средств, актуальным является применение методов математического моделирования. Непрерывно появляются различные вычислительные методики для расчета течений нелинейно-вязких полимерных материалов, однако зачастую они являются труднопроизводимыми. В настоящей работе предлагается подход, основанный на применении многократно проверенных физических предположений о характере сложного движения полимера и, в то же время, учитывающий максимальное количество факторов, определяющих процесс. Такой подход перспективен для создания численной модели процесса экструзии, адекватно описывающей поля давления, вязкости, температуры и отличается простой реализацией.

Математическая постановка задачи и метод решения. В зоне дозирования шнекового канала экструдера полимерный материал находится в жидком состоянии. Как известно, для полимерного расплава характерны малые числа Рейнольдса, что позволяет применить модель ползущего течения. Математическая формулировка задачи включает уравнения движения (1), уравнения неразрывности (2) и энергии (3), реологическое уравнение Керри-Яшидо с температурной зависимостью типа Аррениуса (4) и граничные условия (5):

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad i, j = 1 \div 3, \quad (1)$$

$$\partial v_i / \partial x_i = 0, \quad (2)$$

$$\rho C_p v_1 \partial T / \partial x_1 = \lambda \partial^2 T / \partial x_3^2 + \eta A^2, \quad (3)$$

$$\eta = \mu_0 \alpha (1 + m \alpha A)^{n-1}, \quad \alpha = \exp[b(1/T - 1/T_0)], \quad (4)$$

$$v_1(0) = v_2(0) = 0, \quad v_1(H) = V \cos \varphi, \quad v_2(H) = V \sin \varphi, \quad T(x_1, 0) = T_S(x_1), \quad T(x_1, H) = T_B(x_1), \quad T(0, x_3) = T_N. \quad (5)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, p – давление, x_j – координаты, v_i – компоненты вектора скорости, V – скорость движения корпуса, φ – угол нарезки винтовой линии, $T_S(x_1)$, $T_B(x_1)$ – распределение температуры на стенках шнека и корпуса соответственно, T_N – температура расплава полимера на входе, η – вязкость, A – второй инвариант тензора скоростей деформаций, n – показатель нелинейности, μ_0 , m – реологические константы, α – температурный коэффициент, H – глубина шнекового канала.

Для дальнейшего преобразования уравнений движения применяются следующие упрощающие предположения: процесс течения стационарный и полностью установившийся, винтовой канал разворачивается на плоскость (обращенное движение), влияние гребней шнека на течение в срединном сечении отсутствует ($S/H \geq 3$ [1], S – ширина канала), перетоки жидкости через гребни шнека малы и не учитываются [2]. Применив указанные допущения, дважды проинтегрировав уравнения движения с учетом граничных условий, в предположении заданного массового расхода и перейдя к безразмерным переменным, получаем 4 нелинейных уравнения:

$$\begin{aligned} p_1 \int_0^1 \frac{(x_3 - C_1)}{\eta} dx_3 - \cos \varphi &= 0, & p_2 \int_0^1 \frac{(x_3 - C_2)}{\eta} dx_3 - \sin \varphi &= 0, \\ p_1 \int_0^1 \frac{(x_3 - C_1)(1 - x_3)}{\eta} dx_3 - q_1 &= 0, & \int_0^1 \frac{(x_3 - C_2)(1 - x_3)}{\eta} dx_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь C_1, C_2 – константы интегрирования, $p_1 = \partial p / \partial x_1$, $p_2 = \partial p / \partial x_2$, q_1 – безразмерное значение объемного расхода через единицу ширины канала.

Уравнение энергии (3) при переходе к безразмерным переменным приобретет вид:

$$\text{Gr} v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \text{Br} \eta A^2, \quad (7)$$

где $\text{Gr} = \rho C_p V H^2 / \lambda L$ – число Гретца. Параметр $\text{Br} = \eta_0 V^2 / \lambda$ является аналогом числа Бринкмана, Температура не обезразмеривается, т.к. это не приводит к упрощению постановки задачи. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (6) совместно с уравнением (7) и граничными условиями для температуры для вычисления профилей скорости v_1 , v_2 и температуры T во всех поперечных сечениях канала, а также распределения давления p вдоль канала.

Для получения кривых распределения давления, составляющих вектора скорости и температуры, требуется совместное решение уравнения (7) с соответствующими граничными условиями и системы (6). Для решения системы нелинейных уравнений (6) используется метод Ньютона, для решения уравнения энергии, имеющего параболический тип – метод прогонки.

Результаты. Для проверки достоверности получаемых с помощью предложенной методики результатов, решена задача о течении полиэтилена низкой плотности (ПНП) Lupolen 1800N в зоне дозирования шнекового канала экструдера. Расчеты проводились для экструдера со следующими

параметрами: длина экструдера 0,45 м, ширина и глубина шнекового канала 0,0388 м и 0,003 м соответственно, угол подъема винтовой линии 17,66°. Реологические и теплофизические параметры ПНП Lupolen 1800Н были выбраны в соответствие с [2]. Технологические параметры процесса, а также значения температур стенок шнека и корпуса приведены в таблице 1.

Таблица 1

Начальные данные

N , об/мин	P , кг/ч	p_0 , МПа	T_N , °C	Длина канала, мм				Длина канала, мм			
				25	160	295	430	0	135	270	450
				Температура корпуса, °C				Температура шнека, °C			
200	43,8	8,1	153	151,3	139,1	132,5	150,6	171,5	160	157,5	174

На рис. 1 представлены полученные кривые распределения перепада давления и среднемассовой температуры вдоль безразмерной длины шнекового канала, а также расчетные и экспериментальные данные работы [2]. Результаты настоящей работы показали хорошее совпадение с литературными данными, что говорит о корректности полученных результатов и возможности использования предложенной методики для исследования процессов тепло- и массопереноса в каналах одношнековых экструдеров. Более того, стоит отметить, что полученные результаты приближены к результатам эксперимента.

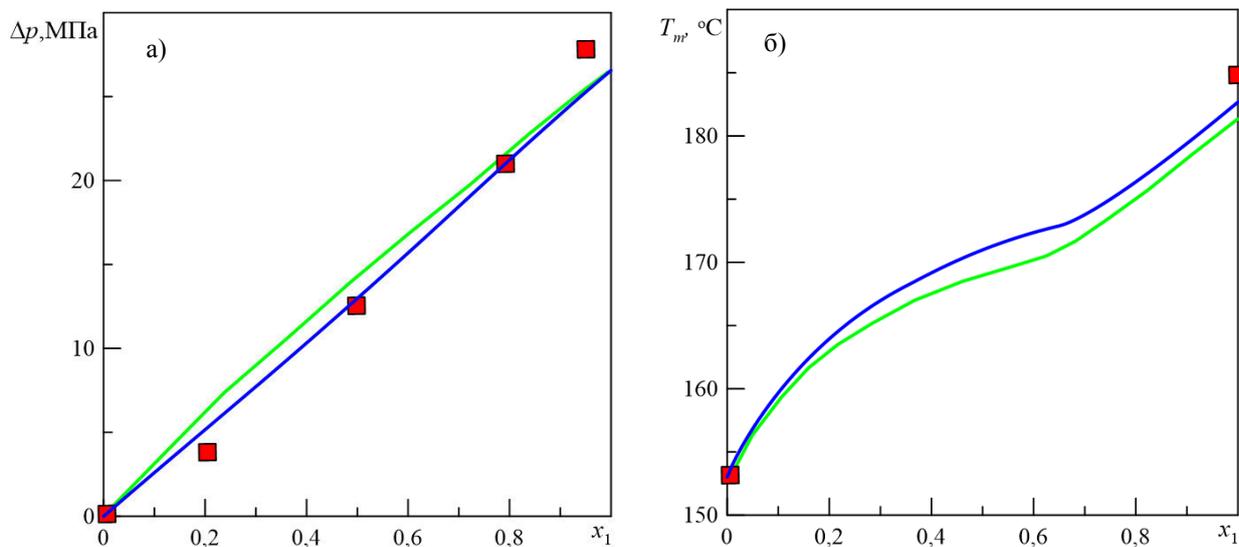


Рис. 1. Перепад давления (а) и изменение среднемассовой температуры (б): синяя линия – авторские результаты, зеленая – расчетные данные [2], красные символы – экспериментальные данные [2]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарева М.А., Филина М.П. Якутенок В.А. Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 2 (40). – С. 97-107.
2. Syrjälä S. On the analysis of fluid flow and heat transfer in the melt conveying section of a single-screw extruder // Numer. Heat Tr. A-Appl. – 1999. – Vol. 35, no. 1. – P. 25-47.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
ТКАНОГО МАТЕРИАЛА С ПОРАЖАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ**

А.Е. Гилева

Научный руководитель: профессор, д.т.н. В.О. Каледин

Новокузнецкий институт (филиал) «Кемеровский государственный университет»

Россия, 654041, г. Новокузнецк, ул. Циолковского, 23

anna310591@yandex.ru

**TEMPERATURE FIELDS MODELING OF IN THE INTERACTION OF WOVEN MATERIAL
WITH STRIKING ELEMENT**

A.E. Gileva

Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.O. Kaledin

The Novokuznetsk branch of the Kemerovo State University

Russian, Novokuznetsk, 23, Tsiolkovsky str., 654041

E-mail: anna310591@yandex.ru

***Abstract.** The striking element interaction processes with a multilayer woven barrier are considered. A simplified mathematical model is proposed to describe the movement of a woven sample. Irreversibly scattered energy is found by the changed kinematic parameters of the sample. Part of this energy is partially converted into heat, this causes a change in the adiabatic temperature of the material and leads to heat transfer on thermal conductivity and heat dissipation to the environment. The dynamic temperature distribution character with varying parameters of the striking element is shown.*

Введение. Многослойные тканые материалы находят применение в качестве бронезащиты. Остается актуальной задача повышения защитных свойств, которая требует исследования процессов поглощения энергии при ударе в тканую оболочку. Прямое измерение поглощения энергии во время удара невозможно в связи с малой продолжительностью таких процессов. Поэтому целью работы является исследование косвенного проявления механических процессов – динамических температурных полей в тканой оболочке при ударе.

Модель процессов взаимодействия бронезащиты с поражающим элементом. В качестве моделируемого объекта рассматривается слоистый тканый образец. Каждый слой образован двумя взаимно перпендикулярными семействами нитей – утком и основой. Образец находится на вязком основании. В момент удара центральная часть образца контактирует с ударником массой M и начальной скоростью V_0 . В процессе соударения происходят сложные взаимосвязанные и взаимообусловленные процессы. Схема этих процессов представлена на рисунке 1. На представленной схеме блоком с одинарной рамкой обозначены входные параметры процесса, а сам процесс представлен блоком с двойной рамкой. Выходные переменные одних процессов являются входными переменными других процессов.

$$\begin{cases} (M + \tau C + \tau^2 K) \{\dot{U}\}^{t+1} = M \{\dot{U}\}^t = M \{\dot{U}\}^t - \tau K \{U\}^t + \tau \{F\} \\ \{U\}^{t+1} = \{U\}^t + \tau \{\dot{U}\}^{t+1} \end{cases} \quad (4)$$

Вычислительный эксперимент. На основе построенной теоретической модели и с использованием разработанных программных средств [2] проведена серия вычислительных экспериментов с варьированием начальной скорости ударника. Анализ проведен на модели тканой преграды, содержащей 24 слоя ткани, физико-механические свойства основы и утка были приняты одинаковыми: предельное удлинение 8%, предельное напряжение растяжения слоя ткани 1,12 ГПа. На рисунке 2 показаны распределения адиабатической температуры по площади ткани в момент достижения ее максимального значения.

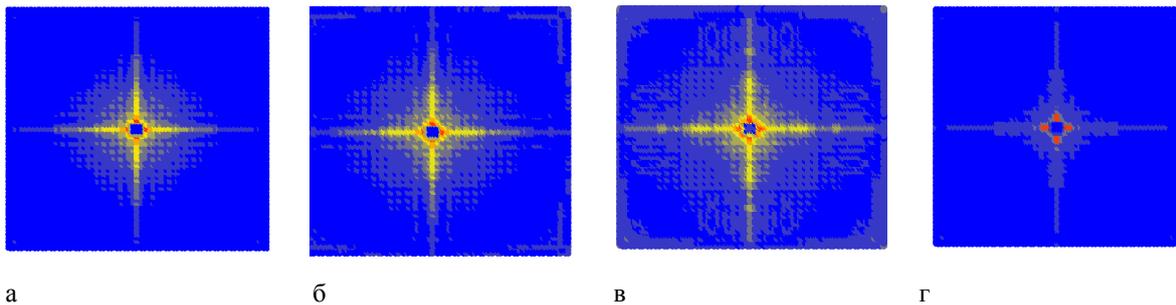


Рис. 2 Поля адиабатической температуры при начальной скорости: а – 100 м/с (максимум 3,5 °С), б – 200 м/с (максимум 3,5 °С), в – 400 м/с (максимум 5 °С), г – 500 м/с (максимум 17 °С)

При скоростях 100, 200 и 400 м/с максимальные действующие напряжения не превышают предельных, и можно сделать вывод, что крестообразные зоны с повышенной температурой образованы вследствие поглощения энергии за счет трения нитей. При скорости ударника 500 м/с максимальные действующие напряжения превышают предельные значения, тогда локальные зоны с наибольшим повышением температуры свидетельствуют о поглощении энергии за счет энергии разрушения нитей.

Результаты. Разработана математическая модель, описывающая совместное движение бронематериала и поражающего элемента, необратимое деформирование нитей, проскальзывание нитей, потери кинетической энергии на трение и необратимую деформацию, а также нагрев. Разработано программное обеспечение, реализующее алгоритм расчета динамических температурных полей. Исследовано влияние изменения настроечных параметров модели на динамическое распределение температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буданин, О. Н. Численная схема для приближенного расчета ударных процессов в броневой защите из ткани с поражающим элементом/О.Н. Буданин, В.О. Каледин, С.О. Козельская, Е.А. Вячкина, А.Е. Гилева // Контроль. Диагностика. – № 7. – 2017. – С. 34-39.
2. Программа расчета динамических температурных полей в многослойном композиционном материале при ударе: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2017615345, Рос. Федерация / заявитель и правообладатель Каледин В.О., Буданин О.Н., Гилева А.Е, Козельская С.О. – №2017612112; заявл. 15.03.2017; зарегистр. 12.05.2017; опубл. 12.05.2017, бюл. №5. – 1 с.

**МЕТОДИКА И ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ
В СОПЛАХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

К.Л. Алигасанова, Р.Ю. Бургомистренко, К.В. Костюшин

Научный руководитель: к. ф.-м. н. И.В. Еремин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

**METHODOLOGY AND SOFTWARE FOR CALCULATION OF FRICTION LOSSES
IN THE NOZZLES OF ROCKET MOTOR**

K.L. Aligasanova, R.Yu. Burgomistrenko, K.V. Kostyshin

Scientific Supervisor: PhD I. V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

***Abstract.** The method and software for calculation of friction losses in the nozzle of the rocket motor on the basis of solution of one-dimensional equations of gas dynamics is developed. Friction losses are determined from the solution of the boundary layer equations and determine the thickness of the rub, which allows you to visualize the nozzle contour and create graphs of the ideal gas flow parameters along the entire nozzle length. It is possible to define the value of these parameters in each section. The graphical interface of the software is developed using Windows Presentation Foundation technology. The program allows to make calculations for determination of losses coefficients due to friction of gas on the wall. For this purpose, the engineering method of Dobrodosky is used. The program is checked by comparison with known solutions.*

Введение. Математическое моделирование течений газодинамических трактах ракетных двигателей проводят с целью определения параметров потока, расчета потерь тяги, процессов теплообмена при проектировании сопел. С применением вычислительного эксперимента профилируются эффективные сопла современных ракетных двигателей. Цель настоящей работы заключается в разработке методики и программы расчета газодинамических характеристик течения и потерь тяги на трение в сопле.

Для определения основных параметров одномерного течения вязкого газа предпочтительным считается выполнение расчета в два этапа с выделением в движущемся потоке двух областей – потенциального ядра и пограничного слоя. Такой подход позволяет существенно упростить расчет, поскольку оказывается возможным в ядре потока пренебречь влиянием сил вязкости и считать течение идеальным, а в пограничном слое из-за малой его толщины – пренебречь вторыми производными от скорости и температуры по продольной координате в уравнениях движения и энергии [1].

Методика расчета. Методика расчета идеального течения в сопле основана на определении параметров потока с использованием газодинамических функций. Решение нелинейного уравнения для определения коэффициента приведенной скорости, осуществляется с помощью метода Ньютона. Потери на трения газа о стенки сопла рассчитаны с помощью полуэмпирической методики, изложенной в [2].

Уравнения турбулентного пограничного слоя записываются в интегральной форме [3]. Для решения системы уравнений пограничного слоя применяется метод Рунге-Кутты.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left[(2+H) \frac{d \ln u_{\infty}}{dx} + \frac{d \ln \rho_{\infty}}{dx} \right] &= \frac{C_f}{2}; \\ \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left[\frac{d \ln u_{\infty}}{dx} + \frac{d \ln \rho_{\infty}}{dx} + \frac{d \ln \Delta h}{dx} \right] &= St, \end{aligned} \right\}$$

где $\delta^*, \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy$, $\delta_T^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \left[1 - \frac{h_o - h_w}{h_{o\infty} - h_w} \right] dy$ – толщина вытеснения, потери импульса

и потери энергии; $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ – формпараметр; C_f – местный коэффициент трения; $St = \frac{q_w}{\rho_{\infty} u_{\infty} (h_{0w} - h_w)}$

– число Стантона; $h_o = h + \frac{u_{\infty}^2}{2}$ – полная энтальпия (энтальпия торможения); h_w – энтальпия газа при

температуре стенки; q_w – тепловой поток в стенку.

Графический интерфейс программного комплекса разработан с использованием технологии Windows Presentation Foundation (WPF) (рис.1). Программа расчета предназначена для ПЭВМ под управлением ОС Windows и позволяет визуализировать контур сопла и построить графики зависимости температуры, давления, скорости, плотности газового потока, числа Маха от длины сопла (рис. 2).

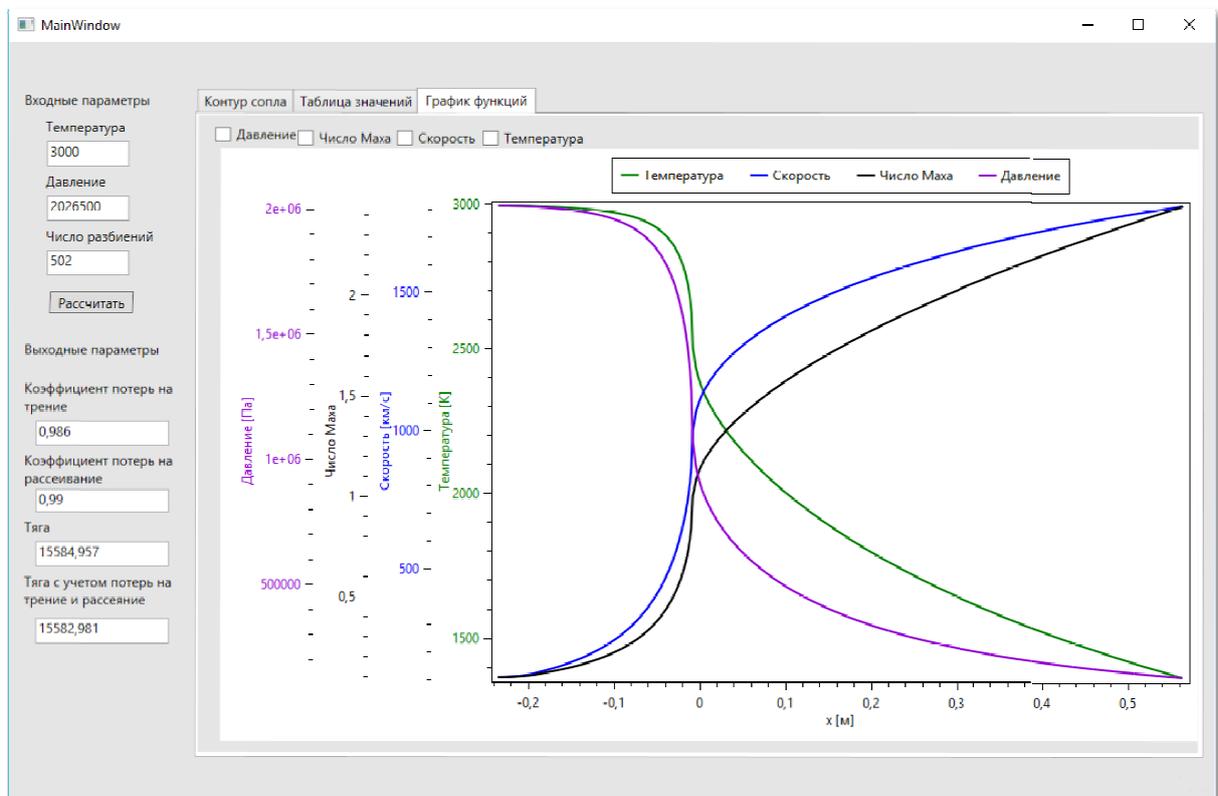


Рис. 1. Интерфейс приложения

Входные параметры	Контур сопла							
Температура	w	D	q	lamda	T	P	RO	M
3000	108.08705	0.47972	0.1693	0.10784	2994.18476	2012784.60718	2.33773	0.09854
Давление	108.18094	0.47952	0.16944	0.10794	2994.17466	2012760.82764	2.3377	0.09863
2076500	108.30102	0.47925	0.16963	0.10806	2994.16172	2012730.38451	2.33767	0.09874
Число разбиений	108.44754	0.47893	0.16985	0.1082	2994.14591	2012693.19312	2.33762	0.09887
502	108.6208	0.47855	0.17012	0.10838	2994.12719	2012649.14927	2.33757	0.09903
Рассчитать	108.82116	0.47812	0.17043	0.10858	2994.1055	2012598.12843	2.33751	0.09921
Выходные параметры	109.04905	0.47762	0.17079	0.1088	2994.08079	2012539.98485	2.33744	0.09942
Кэффициент потерь на трение	109.30496	0.47707	0.17118	0.10906	2994.05297	2012474.55043	2.33737	0.09966
0.986	109.58943	0.47645	0.17163	0.10934	2994.02198	2012401.63345	2.33728	0.09992
Кэффициент потерь на рассеивание	109.9031	0.47578	0.17211	0.10966	2993.98771	2012321.01701	2.33719	0.1002
0.99	110.24665	0.47505	0.17264	0.11	2993.95006	2012232.45737	2.33709	0.10052
Тяга	110.62086	0.47425	0.17322	0.11037	2993.90092	2012135.60188	2.33698	0.10086
15584.957	111.0266	0.47339	0.17385	0.11078	2993.86416	2012030.38669	2.33685	0.10123
Тяга с учетом потерь на трение и рассеивание	111.46482	0.47247	0.17453	0.11121	2993.81563	2011916.23411	2.33672	0.10163
15582.981	111.93657	0.47148	0.17526	0.11169	2993.76317	2011792.84961	2.33658	0.10206
	112.443	0.47043	0.17605	0.11219	2993.70661	2011659.8183	2.33642	0.10252
	112.98541	0.46931	0.17689	0.11273	2993.64574	2011516.68102	2.33626	0.10302
	113.56517	0.46813	0.17779	0.11331	2993.58036	2011362.92972	2.33608	0.10355
	114.18385	0.46687	0.17874	0.11393	2993.51023	2011198.00222	2.33589	0.10411
	114.84312	0.46554	0.17976	0.11459	2993.43507	2011021.27622	2.33568	0.10472
	115.54486	0.46414	0.18085	0.11529	2993.3546	2010832.06223	2.33546	0.10536
	116.2911	0.46267	0.18201	0.11603	2993.26848	2010629.59553	2.33523	0.10604
	117.08412	0.46112	0.18323	0.11682	2993.17636	2010413.02673	2.33497	0.10676
	117.9264	0.45949	0.18454	0.11766	2993.07783	2010181.4108	2.33471	0.10753
	118.82071	0.45777	0.18592	0.11855	2992.97244	2009933.69418	2.33442	0.10835
	119.77008	0.45598	0.18739	0.1195	2992.8597	2009668.69968	2.33411	0.10922
	120.77791	0.45409	0.18894	0.12051	2992.73902	2009385.10854	2.33378	0.11014
	121.84796	0.45212	0.1906	0.12157	2992.60979	2009081.43919	2.33343	0.11112
	122.98444	0.45005	0.19235	0.12271	2992.47129	2008756.02183	2.33305	0.11216

Рис. 2. Пример результатов расчета

Результаты. В результате работы реализована методика и программа расчета газодинамических параметров течения в сопле Лавала, основных энерго-тяговых характеристик ракетного двигателя и визуализации результатов расчета. Верификация программы проведена путем сравнения с известными решениями, в частности для сопла JPL (Jet Propulsion Laboratory). Проведены расчеты тяги двигателя, коэффициент потерь удельного импульса тяги на трение для типовых сопел (радиусно-конические, косинусо-конические, радиусно-параболические).

Заключение. Разработанная программа расчета может быть использована при проработке сопел ракетных двигателей, а также в образовательном процессе при изучении внутренней баллистики ракетных двигателей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № 9.9063.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алемасов В.Е. Теория ракетных двигателей / В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегаллин, А.П. Тишин. – М.: Машиностроение, 1989. – 462 с.
2. Добровольский М.В. Жидкостные ракетные двигатели /М.В. Добровольский – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2016. – 474 с.
3. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газов. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука. 1982. – 312 с.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА:
РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

В.В. Шеметова

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. С.С. Орлов

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

E-mail: valentina501@mail.ru

**ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER:
SOLVABILITY IN THE CLASS OF DISTRIBUTIONS AND APPLICATIONS**

V.V. Shemetova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD S.S. Orlov

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marx street, 1, 664003

E-mail: valentina501@mail.ru

***Abstract.** The unique solvability of the initial value problem for the second order abstract linear differential equation is studied. The Sobolev–Schwarz theory of distributions with values in Banach spaces is applied to the study of this problem. The fundamental solution of the considered differential operator is constructed in the form of a special operator valued function, which contains the commutators of the operator coefficients of the equation. The theorem of existence and uniqueness of the generalized solution of considered initial value problem is proved.*

Рассмотрим класс линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$Bu''(t) - A_1u'(t) - A_0u(t) = f(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь u и f – неизвестная и заданная функции со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B, A_1, A_0 – замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2 , причем $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$. Для уравнения (1) зададим начальные условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (2)$$

Под *классическим решением* начальной задачи (1), (2) будем понимать функцию $u(t) \in C(t \geq 0; E_1) \cap C^2(t > 0; E_1)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2). Продолжим классическое решение нулем на интервал $(-\infty; 0)$ следующим образом: $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$. Тогда в пространстве $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем рассматриваемая задача принимает вид сверточного уравнения

$$(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \quad (3)$$

с правой частью $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ вида

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_1 - A_1u_0)\delta(t) + Bu_0\delta'(t).$$

Здесь и далее $\theta(t)$ и $\delta(t)$ – функции Хэвисайда и Дирака. Единственным решением в $K'_+(E_1)$ уравнения (3) (обобщенным решением начальной задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t)$, где обобщенная оператор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t) \in K'_+(E_2) \quad (B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * \varepsilon(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall w(t) \in K'_+(E_1) \quad \varepsilon(t) * (B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальным* решением дифференциального оператора $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$. Смысл конструкции фундаментального решения состоит в следующем: если известен его вид, то единственным обобщенным решением задачи Коши (1), (2) является $\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t)$.

Теорема. Пусть линейный оператор B непрерывно обратим, тогда дифференциальный оператор $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ имеет фундаментальное решение вида

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s) ds \theta(t),$$

где $e^{A_1 B^{-1} t}$ – операторная экспонента, $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – операторно-функциональная последовательность, заданная рекуррентно

$$U_k(t) = \int_0^t V(s) U_{k-1}(s) ds, \quad U_0(t) = I_2,$$

$V(t) = e^{-A_1 B^{-1} t} A_0 B^{-1} e^{A_1 B^{-1} t}$, I_1 и I_2 – тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно.

Заметим, что $V(0) = A_0 B^{-1}$, а операторы $V(t)$ и $A_1 B^{-1}$ образуют пару Лакса, то есть $V'(t) = [V(t), A_1 B^{-1}]$. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [1] оператор-функция $V(t)$ представима операторно-функциональным рядом

$$V(t) = A_0 B^{-1} + [A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] \frac{t}{1!} + [[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}] \frac{t^2}{2!} + \\ + [[[[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}] \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

где $[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] = A_0 B^{-1} A_1 B^{-1} - A_1 B^{-1} A_0 B^{-1}$ – коммутатор операторов $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$. Так как $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$, то по теореме о замкнутом графике линейные операторы $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$ являются ограниченными, откуда следует равномерная сходимость на любом компакте $[0; T]$ в топологии $L(E_2)$ указанных выше операторно-функциональных рядов [2].

Следствие. Пусть в условиях теоремы суперпозиция операторов $A_0 B^{-1}$ и $A_1 B^{-1}$ коммутативна, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} (A_0 B^{-1})^{k-1} {}_1F_1(k; 2k; A_1 B^{-1} t) \theta(t),$$

где ${}_1F_1(a; b; t)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [3, стр. 366], представленная в интегральной форме

$${}_1F_1(a; b; t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{t\tau} \tau^{a-1} (1-\tau)^{b-a-1} d\tau,$$

$\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера фиксированного аргумента $a > 0$.

В условиях теоремы единственное обобщенное решение начальной задачи (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = u(t)\theta(t) = B^{-1} & \left[e^{A_1 B^{-1} t} B u_0 + \int_0^t e^{A_1 B^{-1} s} ds B u_1 - \int_0^t e^{A_1 B^{-1} s} ds A_1 u_0 + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-A_1 B^{-1} s} U_k(s) ds (B u_1 - A_1 u_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_k(s) ds B u_0 + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} \tau} U_{k-1}(\tau) f(s) d\tau ds \right] \theta(t). \end{aligned}$$

Полученное распределение является регулярным и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая в предположении сильно непрерывной правой части $f = f(t)$ является дважды сильно непрерывно дифференцируемой на луче $[0; +\infty)$, обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2), то есть является классическим решением задачи Коши (1), (2).

Дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах представляют интерес для приложений, в частности, они позволяют с общих позиций изучать начально-краевые задачи, возникающие в механике сплошных сред. Особо востребованы с этой точки зрения так называемые *полные* уравнения второго порядка, поскольку наличие в них слагаемого с первой производной по времени функции состояния процесса позволяет учитывать такие эффекты, как диссипация энергии, воздействие гироскопических сил и другие. С помощью полученных абстрактных результатов в данной работе изучена однозначная разрешимость двух начально-краевых задач для уравнения поперечных колебаний диссипативной пластины с учетом термальных эффектов и уравнения Буссинеска–Лява продольных колебаний упругого стержня.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научных проектов № 18-01-00643 А, № 18-51-54001 Вьет_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hall B.C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. – New-York: Springer, 2015. – 453 p.
2. Орлов С.С., Шеметова В.В. Новый вид фундаментального решения дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах // Лобачевские чтения – 2018: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. – Т. 56. – С. 220-224.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3-х томах. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ:
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Г.К. Соколова

Научный руководитель: доцент, к. ф-м н. С.С. Орлов

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

**PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL REAL VARIABLES:
ELEMENTS OF THEORY AND APPLICATIONS**

G.K. Sokolova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD S.S. Orlov

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marx str, 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

***Abstract.** This note deals with theorems proved by the author, which can be used to study the existence of periodic solutions of partial differential equations.*

Математическое моделирование различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве, а также самоподобных объектов и их свойств естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. Сами математические модели записываются в форме начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе доказаны теоремы, которые применяются для построения периодических решений уравнений в частных производных.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *периодической* с периодом \mathbf{T} , если существует вектор $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$, что для всех $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = f(\mathbf{r})$. Период \mathbf{T}_0 наименьшего модуля, сонаправленный с вектором \mathbf{T} , будем называть *основным* периодом функции в направлении \mathbf{t} , где $\mathbf{T} = |\mathbf{T}| \mathbf{t}$.

В работе [1] доказана теорема.

Теорема 1. Всякая периодическая с периодом \mathbf{T} функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная и отличная от постоянной вдоль хотя бы одной прямой $\ell_{\mathbf{T}}$ с направляющим вектором \mathbf{T} , имеет основной период в данном направлении \mathbf{t} .

В статье [2] показано, что множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$P_f = \Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\boldsymbol{\tau}_{m_1+1}, \boldsymbol{\tau}_{m_1+2}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{m_1+m_2}),$$

где \mathbf{T}_k – базисные векторы m_1 -мерной решётки, $\boldsymbol{\tau}_k$ – направления, вдоль которых функция постоянна, и $m_1 + m_2 \leq n$. Также в [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – периодическая функция с основным периодом \mathbf{T}_0 в данном направлении \mathbf{t} и $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – невырожденное линейное преобразование, тогда суперпозиция $f \circ A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является периодической функцией с основным периодом $A^{-1}\mathbf{T}_0$ в направлении $\boldsymbol{\tau}$, где $A^{-1}\mathbf{T}_0 = |A^{-1}\mathbf{T}_0| \cdot \boldsymbol{\tau}$.

Линейным преобразованием аргумента $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ всякую периодическую функцию n переменных можно сделать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным [3].

Теорема 3. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по переменной x_i и периодической по этой переменной с основным периодом T_i , тогда справедливо равенство

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \frac{x_i}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt + \varepsilon_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\varepsilon_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – T_i -периодическая по переменной x_i функция.

Доказательство сводится к проверке периодичности с периодом $T_i \mathbf{e}_i$ функции ε_i , где $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ обозначен стандартный базис Гамеля в \mathbb{R}^n . Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\mathbf{r} + T_i \mathbf{e}_i) &= \int_0^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt - \frac{x_i + T_i}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \\ &= \varepsilon_i(\mathbf{r}) + \int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt - \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \varepsilon_i(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь используется равенство

$$\int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt.$$

Его левая часть не зависит от x_i , что следует из условия периодичности функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$\partial_{x_i} \int_{x_i}^{x_i + T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + T_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) = 0.$$

Покажем, что $T_i \mathbf{e}_i$ является основным периодом функции ε_i в направлении орта \mathbf{e}_i . Предположим, что она имеет другой основной период $S_i < T_i$, т. е. $\varepsilon_i(\mathbf{r} + S_i) - \varepsilon_i(\mathbf{r}) = 0$, тогда справедливо соотношение

$$\int_0^{x_i + S_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt - \int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \frac{S_i}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt,$$

продифференцировав которое по x_i , получим противоречие с тем, что T_i является основным периодом функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, ε_i наследует основной период функции f .

Пусть T_i – основной период функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вдоль направления \mathbf{e}_i . Как показано в [1], любой другой её период, коллинеарный \mathbf{e}_i , имеет вид $S_i = kT_i$, где $k \in \mathbb{Z}$. Справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_i} \int_0^{S_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt &= \frac{1}{kT_i} \int_0^{kT_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \\ &= \frac{1}{kT_i} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)T_i}^{kT_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \frac{1}{kT_i} \sum_{k=1}^n \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \\ &= \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, представление (1) инвариантно относительно выбора периода S_i по переменной x_i подынтегральной T_i -периодической функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Кроме того, это представление однозначно, поскольку функция $\varepsilon_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяется единственным образом как решение начальной задачи

$$\partial_{x_i} \varepsilon_i(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt, \quad \varepsilon_i(\mathbf{r})|_{x_i=0} = 0.$$

Теорема 4. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой по переменной x_i и периодической по этой переменной с основным T_i , тогда частная производная $\partial_{x_i} f$ также будет T_i -периодической по переменной x_i .

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – T_i -периодическая функция по переменной x_i , и

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \int_0^{x_i} \partial_{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt + f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n).$$

Пусть $\partial_{x_i} f$ имеет основной период $S_i < T_i$, тогда, в силу теоремы 1, интеграл в последнем равенстве является S_i -периодической функцией по переменной x_i . Следовательно, функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ также будет S_i -периодической по этой переменной, что противоречит исходному предположению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколова Г. К., Орлов С. С. Об основном периоде периодической функции нескольких переменных // Материалы междунар. конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018. – С. 312–315.
2. Соколова Г. К. О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. – 2018. – №5 (9). – С. 60–65.
3. Orlov S. S., Sokolova G. K. Periodic Functions of Several Real Variables // Surveys Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 25, № 1. – P. 50–51.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА ЧАСТНОГО ВИДА, ДОПУСКАЮЩИХ ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ
ОПЕРАТОРОВ**

А.А. Гайнетдинова

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Р.К. Газизов

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,

Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12, 450008

E-mail: gainetdinova.alia@gmail.com

**INTEGRATION OF THIRD-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A
PARTICULAR FORM ADMITTING THREE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS OF GENERATORS**

A.A. Gainetdinova

Scientific Supervisor: Prof., Dr. R.K. Gazizov

Ufa State Aviation Technical University, Russia, Ufa, K. Marx str., 12, 450008

E-mail: gainetdinova.alia@gmail.com

***Abstract.** We consider third-order ordinary differential equations (ODE), where second derivatives are absent. We show that the algorithm of constructing first integrals for r -order ODE systems with r symmetries can be applied for integrating third-order scalar ODE with three symmetries. Algorithm requires representation of ODE by differential invariants of admitted Lie algebra and using operator of invariant differentiation of this algebra.*

Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений (см., например, [1]) содержит широкий спектр инструментов для исследования дифференциальных уравнений и их систем. Одной из классических задач является интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) n -го порядка с n симметриями. Для ОДУ третьего порядка с тремя симметриями эта задача была решена в работе [2]. Однако в [2] рассматривались только канонические формы допускаемых операторов и, соответственно, канонические формы ОДУ. Для применения результатов работы к произвольному ОДУ необходимо сначала привести уравнение к каноническому виду, что в некоторых случаях является трудоемкой задачей.

В [3] предложен алгоритм понижения порядка систем ОДУ произвольного вида, основанный на использовании представления системы через дифференциальные инварианты допускаемой алгебры Ли и применении оператора, связывающего эти инварианты, – оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) (см. [1]). Показано, что в случае скалярного ОДУ первого порядка алгоритм эквивалентен методу интегрирующего множителя, а в случае скалярного ОДУ второго порядка – методу дифференциальных инвариантов. Приведем этот алгоритм:

1. Вычислить симметрии системы ОДУ;
2. Получить инвариантное представление системы;
3. Построить ОИД;
4. Подействовать полученным ОИД на инвариант младшего порядка, получить первый интеграл системы;
5. Добавить полученное соотношение к исходной системе ОДУ и удалить его дифференциальные следствия;

6. К новой системе применить шаги 3–5.

В настоящей работе рассматривается применение этого алгоритма к нелинейным ОДУ третьего порядка частного вида

$$y''' = F(x, y, y') \quad (1)$$

допускающим трехмерные алгебры Ли операторов вида

$$X_\alpha = \xi_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Понижение порядка ОДУ вида (1). В работе [4] проведена групповая классификация уравнений вида (1). Из двадцати двух форм ОДУ, представленных в таблице 4 (см. [4]), десять уравнений (формы 13–22) допускают три оператора.

На примере уравнения

$$y''' = x^{-3} \left(\gamma + \left(xy' - \frac{\gamma}{2} \right)^3 \right), \quad (2)$$

где $\gamma = const$, рассмотрим возможность применения алгоритма понижения порядка. Уравнение (2) допускает операторы

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = 2 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma x^{-1} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Дифференциальными инвариантами второго и третьего порядков алгебры Ли, порожденной этими операторами, являются соответственно функции

$$J_2 = \frac{2xy'' + \gamma}{2(2xy' - \gamma)^2}, \quad J_3 = \frac{\gamma - x^3 y'''}{(2xy' - \gamma)^3}.$$

Тогда инвариантное представление уравнения (2) имеет вид

$$J_3 = -\frac{1}{8}.$$

Построим ОИД, связывающий дифференциальные инварианты алгебры Ли, порожденной допускаемыми операторами. Согласно [3], будем искать его в виде

$$(D_x \Phi)^{-1} D_x, \quad (3)$$

где D_x – оператор полной производной, а Φ – функция, которая находится из системы уравнений в частных производных первого порядка

$$X_\alpha^{(2)} \Phi = C_\alpha, \quad \text{где } \sum_{\gamma=1}^3 c_{\alpha\beta}^\gamma C_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь $c_{\alpha\beta}^\gamma$ – структурные константы алгебры Ли, $X_\alpha^{(2)}$ – оператор X_α , продолженный на вторую производную. Для существования ОИД вида (3) необходимым условием является условие $rg(c_{\alpha\beta}^\gamma) < 3$.

Для алгебры Ли, допускаемой уравнением (2), это условие выполняется и система (4) имеет вид

$$\begin{aligned} x\Phi_x - y'\Phi_{y'} - 2y''\Phi_{y''} &= C_1, \\ \Phi_{y'} &= C_2, \\ 2\Phi_x + \gamma x^{-1}\Phi_{y'} - \gamma x^{-2}\Phi_{y''} + 2\gamma x^{-3}\Phi_{y'''} &= C_3, \end{aligned}$$

причем $C_3 = 0$, а остальные константы могут быть произвольными. Положим $C_1 = -\gamma/2$, $C_2 = 1$. Тогда можно выбрать частное решение $\Phi = y - \frac{\gamma}{2}\ln(x)$. ОИД в этом случае будет иметь вид $\frac{2x}{2xy'-\gamma}D_x$.

Действуя этим оператором на инвариант J_2 , получим ОДУ первого порядка

$$\frac{dJ_2}{d\Phi} = -8(J_2)^2 + \frac{1}{4}.$$

Его решение

$$\frac{2xy''+\gamma}{2(2xy'-\gamma)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{e^{\sqrt{2}(C+y-\frac{\gamma}{2}\ln(x))} - e^{-\sqrt{2}(C+y-\frac{\gamma}{2}\ln(x))}}{e^{\sqrt{2}(C+y-\frac{\gamma}{2}\ln(x))} + e^{-\sqrt{2}(C+y-\frac{\gamma}{2}\ln(x))}}$$

является редукцией исходного уравнения (2) и допускает операторы $\gamma X_1 + 2X_2, X_3$. Так как для двумерной алгебры Ли, образованной этими операторами, выполняется условие $rg(c_{\alpha\beta}^\gamma) < 2$, то существует новый ОИД вида (3) и процедуру понижения порядка можно повторить. Продолжая описанную процедуру, можно получить общее решение уравнения (2).

Результаты. Из десяти нелинейных уравнений с тремя симметриями из таблицы 4 в [4] для семи можно построить общее решение по описанному алгоритму. Три уравнения с правыми частями в форме 18, 19 и 20 из таблицы 4 в [4] допускают неразложимые неразрешимые алгебры Ли операторов. В этом случае не существует ОИД вида (3), связывающего дифференциальные инварианты допускаемой алгебры Ли, и, следовательно, понижение порядка ОДУ вида (1) невозможно.

Заключение. Таким образом, в ходе проведенной работы показано, что алгоритм, предложенный в [3], может быть успешно применен к ОДУ третьего порядка вида (1), допускающих разрешимые алгебры Ли операторов. При этом необязательно устанавливать разрешимость допускаемой алгебры Ли изначально – она следует из существования ОИД вида (3). Алгоритм понижения порядка для случая скалярного ОДУ можно записать следующим образом:

1. Вычислить симметрии системы ОДУ;
2. Получить инвариантное представление системы;
3. Построить ОИД вида (3) или установить неразрешимость допускаемой алгебры Ли;
4. Подействовать полученным ОИД на инвариант младшего порядка, получить редуцированное уравнение;
5. К новой системе применить шаги 3–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 339 с.

2. Ibragimov N.H., Nucci M.C. Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: equations admitting three-dimensional Lie algebras // Lie Groups and their Applications. – 1994. – № 2. – Pp. 49–64.
3. Газизов Р.К., Гайнетдинова А.А. Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 12–21.
4. Gainetdinova A.A., Ibragimov N.H., Meleshko S.V. Group classification of ODE $y''' = F(x, y, y')$ // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2014. – № 19. – Pp. 345–349.

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО РЕШЕНИЙ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

А.В. Могильников

Научный руководитель: профессор, д.т.н. Ю.П. Акулиничев

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: mog.v.andrey@yandex.ru, aupa1941@mail.ru

**COMPARATIVE ANALYSIS OF CONTINUOUS AND DISCRETE SOLUTIONS
OF THE PARABOLIC EQUATION**

A.V. Mogilnikov

Scientific Supervisor: Prof., Dr. Yu.P. Akulinichev

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenina pr., 40, 634050

E-mail: mog.v.andrey@yandex.ru, aupa1941@mail.ru

Abstract. *The analysis of the influence of the transition from analytical to numerical methods for solving a parabolic equation on the accuracy of the results is conducted when calculating the parameters of the electromagnetic field.*

Введение. Одной из популярных математических моделей, используемых при моделировании процессов распространения радиоволн (РРВ), является параболическое уравнение (ПУ). Оно является малоугловым приближением уравнения Гельмгольца для напряженности одной из поляризационных составляющих электромагнитного поля (ЭМП) $\psi(x,z)$, распространяющегося преимущественно вдоль оси Ox под малыми углами к ней. Двумерное ПУ имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + k^2 (n^2(x,z) - 1)u(x,z) = 0, \quad (1)$$

где $u(x,z) = \exp(-ikx)\psi(x,z)$ – комплексная огибающая ЭМП; $n(x,z)$ – индекс преломления среды; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина распространяющейся волны.

Дифференциальному ПУ (1) соответствует интегральная форма [1]

$$u(x,z) = u_0(x,z) + \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, z_1) G(z-z_1, x-x_1) dz_1 dx_1, \quad (2)$$

где $u_0(x,z)$ – первичное поле при $n(x,z) = 1$; $G(z-z_1, x-x_1)$ – функция Грина также в однородной среде.

Функция Грина численно равна $u_0(x,z)$ при условии, что в точке (x_1, z_1) находится точечный источник $u_0(x_1, z) = \delta(z-z_1)$, и при $x > x_1$ имеет вид

$$G(z-z_1, x-x_1) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi(x-x_1)}} \exp\left[\frac{-ik(z-z_1)^2}{2(x-x_1)}\right]. \quad (3)$$

Если же применяется представление непрерывных полей в виде суммы плоских волн, то из (1–3) следует выражение функции Грина в частотной области (совокупности коэффициентов передачи плоских волн)

$$Q(\beta, x-x_1) = \exp\left[-ik\beta^2(x-x_1)/2\right], \quad (4)$$

где β – угол между вектором Пойнтинга плоской волны и осью Ox . Выражения (3,4) формально удовлетворяют (1,2) при любых значениях переменных z и β , но достаточно хорошо отражают физическую ситуацию лишь при $|\beta| \leq \beta_{\max} = (10 \dots 15)$ градусов [2].

При решении практических задач используют численные методы решения ПУ (1). При этом вместо всех непрерывных функций используются их дискретные (точнее, цифровые) аналоги. Второе отличие заключается в том, что расчет всегда проводится для ограниченной области пространства.

Цель данной работы – рассмотреть, как переход к дискретным функциям при численном решении ПУ и к ограниченной расчетной области влияет на свойства получаемых решений.

Дискретное решение ПУ. При численном решении ПУ на расчетную область «дальность-высота» $0 \leq x \leq D = \Delta x \cdot M$, $0 \leq z \leq H = \Delta z \cdot N$ накладывается прямоугольная сетка с шагами дискретизации по дальности Δx и высоте Δz . Расчет поля ведется в её узлах $u_{n,m} = u(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta z)$, $0 \leq m \leq M$, $0 \leq n \leq N$.

Задав значение β_{\max} , из теоремы отсчетов имеем $\Delta z \leq \Delta z_{\max} = \lambda / (2\beta_{\max})$. Учет (4) и теоремы отсчетов ведет к еще одному ограничению $\Delta x \leq \Delta x_{\max} = \lambda / \beta_{\max}^2$. Тогда вместо точечного источника при определении функции Грина (3) следует воспользоваться понятием элементарного источника $u_{m,n} = 1$ при $x = m \cdot \Delta x$, $z = n \cdot \Delta z$ и $u_{m,n} = 0$ в остальных узлах. При переходе к непрерывным функциям это соответствует распределению поля в виде функции Котельникова [2]

$$u(x, z) = \frac{\sin[k\beta_{\max}(z - n \cdot \Delta z)]}{k\beta_{\max}(z - n \cdot \Delta z)} = \frac{\sin[\pi(z/\Delta z - n)]}{\pi(z/\Delta z - n)}, \quad (5)$$

и диаграмма направленности такого источника является прямоугольной. Зависимость модуля напряженности поля такого источника от z при расчете в области достаточно больших размеров H и D показана на рис 1, а. При этом фазовая характеристика, как в (3) и (4), является квадратической.

Из той же теоремы отсчетов следует, что для интерполяции по переменной x по полученным отсчетам также нужно использовать функцию Котельникова (5), заменив Δz на Δx [2].

Использование дискретного варианта функции Грина в уравнении (2) требует неоправданно больших вычислительных затрат, поэтому было предложено проводить решение уравнения (1) путем формальной замены производных их конечно-разностными аналогами. Одним из первых таких алгоритмов явилась симметричная конечно-разностная схема Кранка-Николсон [1]. Вычислительные затраты для реализации алгоритма невелики, но пространственная и частотная функции Грина существенно отличаются от идеальных, особенно в области больших углов, поэтому при реализации метода значения шагов квантования Δz и Δx приходится задавать с большим запасом по сравнению с максимально возможными.

Более близкими к идеальным пространственными и частотными характеристиками обладает функция Грина, соответствующая методу дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с расщеплением, предложенному R.H. Hardin и F.D. Tappert в 1973 году и позднее успешно адаптированному к использованию на ЭВМ при моделировании тропосферного РРВ [3]. В методе ДПФ используется разложение поля $u(x, z)$ в угловой спектр плоских волн (гармоник ряда Фурье) с последующим применением функции Грина (4) для нахождения соответствующего спектра поля $u(x_1, z)$.

Результаты применения такого подхода при расчете поля в однородной безграничной среде считаются эталонными, а коэффициенты передачи (4) используют вот уже несколько десятилетий неизменными. И это несмотря на то, что при ограничении области расчета по высоте $z_{\max} = H$ вместо

безграничных плоских волн оперируют их отрезками размером H (гармониками ряда Фурье). Более того, искусственная периодичность проявляется и вдоль оси Ox : результаты расчета при увеличении дальности повторяются с периодом $x_T = 2H^2/\lambda$, равным периоду волны с углом $\Delta\beta = 2\beta_{max}/N$. Вследствие этого вместо (5) приходится использовать их более корректные значения [4]. Также в ограниченной по высоте расчетной области проявляется свойство периодичности преобразования Фурье – результаты расчетов соответствуют ситуации, когда входное воздействие представлено не только реальным источником излучения, но еще и бесконечным множеством его копий, разнесенных в пространстве по оси Oz с периодом H (рис. 1, б). Всё это приводит к появлению значительных ошибок, которые частично компенсируют с помощью поглощающих слоёв (оконых функций) или увеличением поперечного размера области расчета H , что, в свою очередь, требует повышения вычислительных затрат [2].

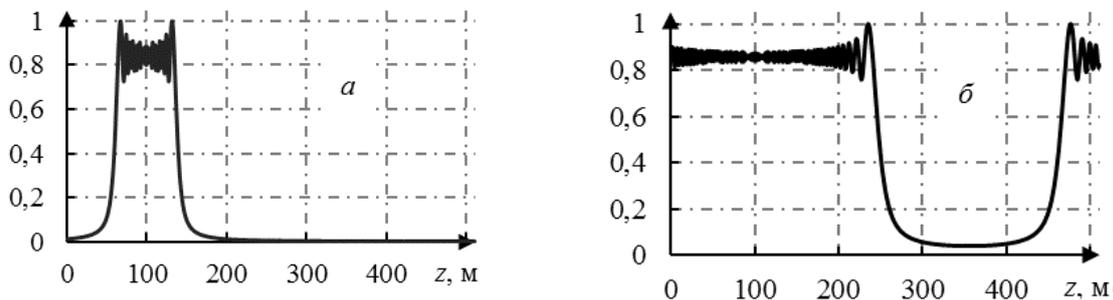


Рис.1. Нормированное распределение модуля напряженности поля, возбужденного элементарным источником, находящимся в узле $z = 100$. при расчете поля в свободном пространстве методом ДПФ при $N = 512$, $\Delta x = \Delta z = 1$ м, $\lambda = 0,1$ м на расстоянии: а) $x = 800$ м ; б) $x = 3$ км от источника излучения

Заключение. В настоящее время применяемые для моделирования процессов РРВ численные методы решения параболического уравнения не свободны от недостатков, несмотря на их многолетнюю историю. Однако их оптимизация с точки зрения точности расчёта поля вполне реальна. Например, при переходе от классической к модернизированной функции Грина среднеквадратическую ошибку расчёта поля по отношению к эталонным результатам возможно уменьшить на десятки процентов [4].

Работа выполнена в рамках проекта по государственному заданию Минобрнауки России №8.7348.2017/8.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levy M. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. – London: IEE, 2000. – 336 p.
2. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. – 2006. – № 7. – С. 762–770.
3. Kuttler J.R., Dockery G.D. Theoretical description of the parabolic approximation. Fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere // Radio Sci. – 1991. – Vol. 26, No. 2. – P. 381–393.
4. Акулиничев Ю.П., М.А. Колединцева, А.В. Могильников Коррекция применения метода БПФ численного решения параболического волнового уравнения // Томск. гос. ун-та систем упр. и радиозлектроники: тр. XXV Всероссийской открытой научной конференции «Распространение радиоволн». – Томск, 2016. Т. III.

**AN EFFICIENT MODIFIED MULTI-STEP METHOD FOR SOLVING
BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**

H. Abdullah¹

Scientific Supervisors: PhD U. Mohammed¹, PhD M. E. Semenov²

¹Federal University of Technology, Minna, Nigeria

²Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: umaru.mohd@futminna.edu.ng, sme@tpu.ru

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МНОГОШАГОВЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Х. Абдуллах¹

Научные руководители: PhD У. Мохаммед¹, к.ф.-м.н., доцент М.Е. Семенов

¹Федеральный технологический университет, Минна, Нигерия

²Томский политехнический университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

***Аннотация.** В статье предложен модифицированный многошаговый метод для прямого решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. Дискретная форма предлагаемого метода была получена с использованием коллокационного подхода. Для вычисления непрерывных коэффициентов метода использованы три сеточные и одна внесеточная точка. Численные эксперименты продемонстрировали эффективность предложенного метода по сравнению с результатами, известными из литературы.*

Introduction. The application of mathematical formulation in science and engineering is given by boundary value problem (BVP):

$$y''' = f(x, y, y', y''), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = \delta_0, \quad y(b) = y_M. \quad (1)$$

$$y''' = f(x, y, y', y''), \quad y(a) = y_0, \quad y'(a) = \delta_0, \quad y'(b) = y_M. \quad (2)$$

There are many methods to solve (1), (2). Most of these methods are solved BVP by reducing a higher order ordinary differential equations (ODEs) to an equivalent system of first order ODEs which take a lot of time and human effort. Alternative approach is to solve higher ODEs directly. In the paper [1] authors investigated two- and three-stage Runge-Kutta type methods for special third order ODEs. Higher order linear multi-step methods were proposed by Jator [2] to the numerical integration of third order BVP. The case of the four-points block hybrid collocation method with two- and three-step points to solve general third order ODEs directly was studied by Yap and Ismail [3].

In this research, we develop a continuous hybrid linear multi-step method (HLMM) for direct solution of BVPs without reducing the problem to a lower order system or to an initial value problem (IVP) equivalent. The proposed HLMM is zero stable, consistent and more accurate than the existing one. Experimental results confirm the superiority of the new schemes over the existing methods.

Construction Method. Our objective is to derive hybrid linear multi-step method (HLMM) of the form

$$\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j y_{n+j} = h^3 \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} + h^3 \beta_{\eta} f_{n+\eta} \quad (3)$$

where $\alpha_j, \beta_j, \beta_\eta$ are unknown constants and $\eta \in \mathbf{R}$. We note that $\alpha_k = 1, \beta_k \neq 0$, and α_0 and β_0 are not zero at the same time. In order to obtain form (3), we proceed seeking to approximate the exact solution $y(x)$ of the form

$$y(x) = \sum_{j=0}^{r+s-1} a_j x^j \quad (4)$$

where a_j are parameters to be determined, $r = k$ and $s > 0$ are the number of interpolation and collocation points respectively. Then we construct our continuous approximation by imposing the following conditions

$$y(x_{n+j}) = y_{n+j}, \quad y'''(x_{n+j}) = f_{n+j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (5)$$

Equation (5) result in $(r+s)$ -systems of equations which can be solved with the inverse matrix method to obtain the value of a_j . Our continuous approximation is constructed by substituting the values a_j into equation (4). The method of continuous approximation can be expressed as

$$y(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j(x) y_{n+j} + h^3 \sum_{j=0}^k \beta_j(x) y_{n+j} + h^3 \beta_\eta(x) f_{n+\eta} \quad (6)$$

where $\alpha_j(x), \beta_j(x), \beta_\eta(x)$ are continuous coefficients.

Three-Step Hybrid Method with One Off-step Collocation Point. We use Equation (6) to obtain a three-step HLMM with the following specification: $r = 3, s = 5, \eta = 8/3, k = 3, \alpha_j(x), \beta_j(x), \beta_\eta(x)$ can be expressed as functions of $t = (x - x_n)/h$. The HLMMs are usually represented in the form of a single block r -point multi-step method of the form [4]

$$A^{(0)} \mathbf{Y}_m = A^{(1)} \mathbf{Y}_{m-1} + h^3 \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{F}_m + h^3 \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{F}_{m-1} \quad (7)$$

where h is a fixed mesh size within a block hybrid method, $A^{(0)}$ is an identity matrix, $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_{m-1}, \mathbf{F}_m, \mathbf{F}_{m-1}$ are arrays (vectors) of numerical approximation.

The hybrid method can be significantly shown in the form of equation (7):

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 \\ \frac{16}{9} & -\frac{20}{9} & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+\frac{8}{3}} \\ y_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} \frac{47}{100} & \frac{23}{40} & -\frac{81}{800} & \frac{1}{20} \\ \frac{7}{203} & \frac{729}{203} & -\frac{324}{25} & -\frac{2187}{65} \\ \frac{27}{1399} & \frac{729}{23} & -\frac{324}{783} & -\frac{2187}{17} \\ \frac{4200}{109} & \frac{168}{61} & -\frac{5600}{81} & \frac{2800}{79} \\ -\frac{120}{120} & \frac{120}{120} & -\frac{160}{160} & \frac{360}{360} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ f_{n+\frac{8}{3}} \\ f_{n+3} \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{160}{31} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8748}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{224}{451} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1440}{1440} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

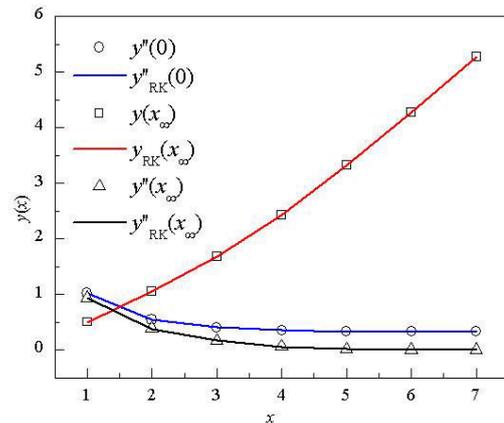


Fig.1. Comparison of numerical solutions of proposed method with Runge-Kutta method for the Problem 1

Numerical Experiments. The accuracy of the proposed method was implemented for direct solution of BVPs of third order ODEs of linear and non-linear equations. The implementation of the method was coded using Maple Software.

Table 1

Numerical Results for Problem 2

x	Exact Solution	Numerical Solution	Error	Error [6]
0.0	-0.01210709	-0.012107056410	3.36×10^{-8}	6.6530×10^{-5}
0.1	-0.01126851	-0.011268451800	5.82×10^{-8}	6.5000×10^{-5}
0.2	-0.00922221	-0.009222146339	6.37×10^{-8}	5.2254×10^{-5}
0.3	-0.00646687	-0.006466811798	5.82×10^{-8}	3.6300×10^{-5}
0.4	-0.00332019	-0.003320153971	3.60×10^{-8}	1.8750×10^{-5}
0.6	0.00332019	0.003320118521	7.15×10^{-8}	1.7340×10^{-5}
0.7	0.00646687	0.006466679335	1.91×10^{-7}	3.4050×10^{-5}
0.8	0.00922221	0.009221906116	3.04×10^{-7}	4.9801×10^{-5}
0.9	0.01126851	0.011268057530	4.52×10^{-7}	6.2020×10^{-5}
1.0	0.01210709	0.012106500950	5.89×10^{-7}	6.3480×10^{-5}

Problems 1. Non-linear Blasius Equation [5]: $2y''' + yy'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\infty) = 1$.

The exact solution does not exist. Comparison of numerical solutions using the proposed method and the fourth order Runge-Kutta (RK) method for the Problem 1 is shown in Fig. 1.

Problems 2. Sandwich Beam Problem [6]: $y'''' + k^2 y'' + r = 0$, $y(0.5) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

The proposed schemes for the values $k=1$ and $r=5$ are relatively more accurate than the schemes of Tirmizi et al. (2005) [6] for Problem 2. Absolute errors are presented in Table 1.

Conclusion. This research describes the development, analysis and implementation of block methods for solving third order ordinary differential equations directly. The development and/or construction of class of hybrid linear multi-step methods for direct solution of initial value problems and boundary value problems arising from third order ODEs have been presented. The derived schemes which are of block form were analyzed and applied to some selected and standard problems from literature.

REFERENCES

1. You, X. and Chen, Z. (2013) Direct integrators of Runge-Kutta type for special third-order ordinary differential equations. Applied Numerical Mathematics, 74, pp. 128-150.
2. Jator, S. N. (2008) On the numerical integration of third order BVP by linear multi-step methods A sixth order linear multistep methods. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 46 (3), pp. 375-388.
3. Yap, L. K. and Ismail, F. (2018) Four point block hybrid collocation method for direct solution of third order ordinary differential equations. AIP Conference Proceedings, 1974 (020055).
4. Fatunla, S. O. (1991) Block method for second order initial value problem (IVP). International Journal of Computer Mathematics, 41, pp. 55-63.
5. Shampine, L. F. and Thompson, S. (2007) Initial value problems. Scholarpedia, 2(3), p. 2861.
6. Tirmizi, I. A., Twizell, E. H. and Islam, S. (2005) A numerical method for third-order non-linear boundary value problems in engineering. International Journal Computer Mathematics, 82 (1), pp. 103-109.

**INFLUENCE OF THE LONG-RANGE OF COMPACT JETS
IN THE ASPIRATION PIPELINE DURING DUST DEPOSING**

N.N. Akimbekova, A.D. Nurgaliyeva, G.S. Sattarova

Scientific Supervisor: As.Prof., PhD G.T. Danenova

Karaganda State Technical University, Kazakhstan, Karaganda, B.Mira., 56, 100027

E-mail: g.danenova@kstu.kz

**ВЛИЯНИЕ ДАЛЬНОБОЙНОСТИ КОМПАКТНЫХ СТРУЙ
В АСПИРАЦИОННОМ ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ОТЛОЖЕНИИ ПЫЛИ**

Н.Н. Акимбекова, А.Д. Нургалиева, Г.С. Саттарова

Научный руководитель: Доцент, к.т.н. Г.Т. Даненова

Карагандинский государственный технический университет,

Казахстан, Караганда, б.Мира, 56, 100027

E-mail: g.danenova@kstu.kz

***Аннотация.** На промышленных предприятиях, цехах и технологических линиях, оснащенных системами вытяжной вентиляции, вопрос очистки стенок воздуховодов от пылевых отложений является актуальным. Повышение эффективности процесса очистки воздуховодов от пыли зависит от дальнобойности компактных струй. В основу математической модели положен классический вариант решения задачи о "затопленной струе", распространяющейся в неподвижной среде.*

Introduction. Industrial dusts are fine particles that are formed during various industrial processes.

When assessing the danger of dust, it is necessary to take into account such properties as chemical composition, dispersion, particle shape, solubility. Dust can be either poisonous or non-toxic, explosive or non-explosive. It can clog and irritate the mucous membranes of the eyes, skin, upper respiratory tract and causes various pulmonary diseases. Prevention of occupational diseases is carried out by reducing the intensity of dust generation in sources of formation, for example, by changing the technological process, mechanizing and automating processes accompanied by dust emissions, using various methods of dust suppression, systematically air pollution monitoring in industrial premises. When it is impossible to eliminate dust formation and poor efficiency of dust suppression, various methods of dust collection are used. For this purpose, aspiration installations are applied, with the help of which the polluted air is not only removed from the working area, but also captured by various kinds of filters, chambers, cyclones and scrubbers.

To ensure the normal parameters of the indoor air environment, ventilation, technology, and architectural and planning solutions for the building must be addressed together. The solution of theoretical problems can be performed on the basis of knowledge of the fundamental laws of aerodynamics, thermal physics, characteristics of machines and ventilation systems [1].

Research problem. Consider the pipeline of the aspiration system in which the air moves in the turbulent mode with a certain average velocity U_1 (Figure 1). To prevent the accumulation of dust on the pipeline walls, air is

additionally supplied through the nozzles to the system in compact jet with an initial velocity U_2 . In this case, the vectors \bar{U}_1 and \bar{U}_2 are directed in one way and parallel to the axis of the pipeline. The purpose of this task is to determine the jet's long range, that is, a function of the maximum speed of the air flow $U_{\max}(z)$ in the pipeline during the nozzle work as well as the distribution of the flow velocity in the section plane of the pipeline.

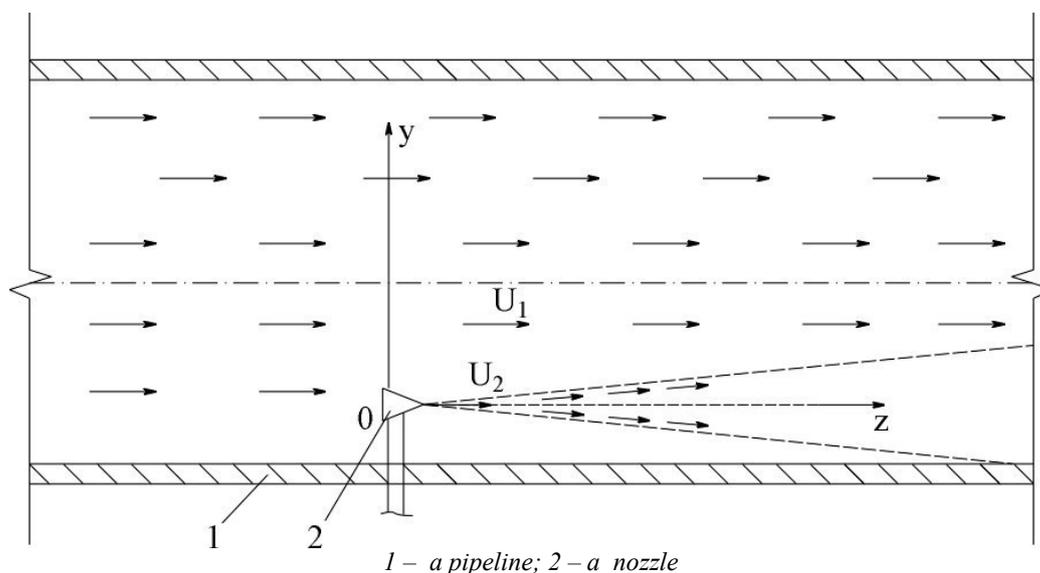


Fig.1. The scheme of an air nozzle in the aspiration pipeline

Solution methods. The work is based on the classical version of the solution of the "submerged jet" problem propagating in a stationary medium with the same physical constants.

The initial impulse is related to the air flow Q through the expression $J_o = \rho Q$, (ρ is the air density). The axis Oz is directed along the axis of symmetry of a flat jet. When the external velocity is equal to zero, the equation of motion of a viscous incompressible fluid (air here is considered as an incompressible fluid) is as follows:

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial z} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $U = \bar{V}_z$, $\nu = \bar{V}_y$, ν is the kinematic viscosity of air.

The system of equations (1) for the case of a flat laminar "submerged jet" was solved by H. Schlichting [2]. For a nozzle having a final radius ro , the initial impulse is equal to:

$$J_o = \rho \pi r_o^2 U_o^2, \quad (2)$$

where U_o is the relative initial velocity of the jet.

The maximum speed for an asymmetric non-swirling jet spouting from an infinitely small hole is calculated by the formula:

$$U_{\max} = \frac{3}{16\pi} \cdot \sqrt{\frac{J_o}{\rho}} \cdot \frac{1}{z}. \quad (3)$$

In the case of a non-swirling turbulent jet flowing from a hole of finite diameter $d(d = 2r_o)$ with a finite initial flow rate as well as a swirling turbulent jet, the following amendment is applied to formula (3):

$$U_{\max} = \frac{3}{16\pi} \cdot \sqrt{\frac{J_o}{\rho}} \cdot \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{16\sqrt{\pi\sigma}} \cdot \frac{d}{z} \right). \quad (4)$$

Results. Comparison of values U_{\max} calculated by formulas (3) and (4) showed that deviations of U_{\max} are observed only at small z -values. The numerical experiment conducted for the values of the constants $r_o = 0.01$ m and $U_o = 150$ m/s showed that when the $z \approx (1 \div 3)r_o$ relative deviations vary within $\Delta = 33.33 \div 11.11\%$ and when $z \approx 5r_o$, is $\Delta \approx 7\%$.

The velocity distribution $U(r)$ over the jet section is calculated by the formula:

$$U(r) = \frac{U_{\max}}{\left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^2}. \quad (5)$$

The developed mathematical model allowed us to estimate the range of compact jets in the development of a device for aspiration pipelines cleaning from dust deposits.

The developed mathematical model using the equations systems about the "submerged jet" of H. Schlichting let to estimate the range of compact jets for cleaning the internal walls of the suction pipelines surfaces around the dust deposits perimeter. The presented mathematical model was used in the development of the device which eliminates the formation of stagnant and closed zones throughout the dust-gas flow through the pipeline and provides low aerodynamic resistance of pipelines with dust-cleaning equipment.

REFERENCE

1. Samsonov, V. T. (2016). Ventilation of industrial sites: Aerodynamic calculations for the design of ventilation emissions. M.: Infra-M, 172 p. [in Russian]
2. Schlichting H. (1993) Laminare Strahlusbreitung – Leischr. f. angew. Math. und Mech.. Bd.13. No. 4. p.260.

CONSTRUCTING A RISKY OPTIMAL MEAN/VALUE-AT-RISK PORTFOLIO

O.A. Belsner, O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin Ave, 30, 634050

E-mail: olegkol@tpu.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПО СООТНОШЕНИЮ ДОХОДНОСТЬ/ПРЕДЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА РИСКА

О.А. Бельснер, О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: olegkol@tpu.ru

Аннотация. Представлена модель формирования портфеля с учетом предельной величины риска, что позволило уменьшить начальные инвестиционные вложения, ослабила влияние резких падений фондового рынка на стоимость портфеля, увеличила реализованную доходность инвестиций при сопоставимом по сравнению с классической методологией Марковица уровне риска. Использование метода Бенати – Рицци удобно для создания широкого спектра инвестиционных портфелей для массового неквалифицированного инвестора с различным профилем неприятия риска

Introduction. The classical Markowitz model used for construction and managing the investment portfolio has been widely used for more than 50 years now. Nevertheless, along with obvious pluses of this approach there are also some disadvantages. Firstly, calculation of a portfolio shares does not take into account possible changes in the asset parameters and depends only on its current values. Therefore, any boost or fall of the asset price in the future will lead to the leap of a portfolio shares when reconstructing it. Secondly, it is impossible to construct an investment portfolio during the process of structural changes at the stock market when long period of price fall turns into steady growth. In this case historical returns of the prices are negative, so a few number of increasing quotes we observe at this period does not allow us to construct portfolio with positive shares. To overcome the drawback of working with a portfolio return volatilities we propose to use $VaR_\alpha(X_t)$ [1,2]:

$$VaR_\alpha(X_t) = \inf\{x \in \mathfrak{R}, P(X_t < x) \geq \alpha\}, \quad (1)$$

where X_t is a random variable describing future investment yield, α is given as threshold value and $F(x) = P(X_t < x)$ is distribution function X_t .

If $F(x)$ is a continuous strictly monotonic rising function then $F(x)$ has an inverse function and (1) will turn to:

$$VaR_\alpha(X_t) = F^{-1}(\alpha).$$

Despite its wide use as a risk measure, VaR is still not that popular in construction of the “return/risk” investment portfolio. Using VaR in portfolio construction is quite complicated task due to: 1) its stochastic nature dependent on the analyzed data distribution function; 2) its incoherency in arbitrary modification when total portfolio price VaR is greater than the sum of each portfolio asset VaR . Moreover, the function optimized

during the portfolio shares calculation is not concave, so we do not reach a unique stable solution. This is the reason why some researchers choose other risk measures for portfolio construction, e.g., conditional value-at-risk $CVaR_\alpha$ or $CvaR$ in short. This one is coherent for any probability distribution law:

$$CVaR_\alpha(X_t) = E\{X_t, X_t < VaR_\alpha(X_t)\}.$$

Nevertheless, despite all the apparent disadvantages of the VaR methodology in the context of an optimal risk portfolio task, in the present paper we will use it. In the first place our decision can be explained by the fact that optimization tasks with quintile risk measures are quite complicated. This happens because even if we just simply replace portfolio volatility with VaR , the number of arithmetical operations in the Markowitz algorithm will increase exponentially. Furthermore, under the condition of asset returns normal distribution (elliptical in general case), VaR is coherent risk measure [1], and the optimization task with VaR becomes the classical Markowitz model [3].

Research methods. Let us choose K risky assets at the stock market. Suppose x_i is a random variable that describes portfolio return at the moment i , $1 \leq i \leq T$, where T is the moment of the portfolio construction, $F(x)$ is a distribution function of x_i . Let R_j be a random variable characterizing the relative asset return j , $1 \leq j \leq K$, λ_j is its share at the constructed portfolio, r_{ij} is observed return R_j at the moment i , $1 \leq i \leq T$ and $r_{min} = \min_{i,j} \{r_{ij}\}$ is a minimal return level for each assets of the portfolio. Let α be the quintile that fixes VaR according to (1). Finally, r_{VaR} is relative portfolio return set by its manager.

Let us construct optimal portfolio with restrictions in VaR and fixed α . The observed portfolio return in this case will be as follows:

$$x_i = \sum_{j=1}^K \lambda_j r_{ij}.$$

We will not make any suggestions about density function of relative asset return. To estimate VaR let's use the historical modeling method, so that we could avoid the problem of best distribution function of R_j .

Let us formulate the optimal portfolio with VaR task in the following way (using the Benati-Rizzi method) [4]:

$$\max_{\lambda, x, y} \sum_{i=1}^T p_i x_i; \tag{2}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^K \lambda_j r_{ij}, \quad 1 \leq i \leq T; \tag{3}$$

$$x_i \geq r_{min} + (r_{VaR} - r_{min}) y_i, \quad 1 \leq i \leq T; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^T p_i (1 - y_i) \leq \alpha; \tag{5}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq T,$$

$$\sum_{j=1}^K \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \tag{6}$$

where p_i is the probability of x_i in the set of empirical observations and $1 \leq i \leq T$.

Notice that y_i in (6) are binary with only zero or unit value. This is important for the correct estimation of a portfolio risk value in (5): each time when x_i is less than r_{VaR} , we suppose y_i to be zero. Therefore, in (4) we summarize only probabilities p_i , for which the observed return x_i is less than VaR . If the sum in (5) is greater than α , our portfolio turns into unexecutable one.

Solution of (2)-(6) is complicated due to exponential calculation difficulties of the applied integer linear programming because for the integer variables y_i , $1 \leq i \leq T$, there are 2^T possible combinations. That is why in this paper we it is reasonable to use package program IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.8.

Results. Let us construct the portfolio P1 that consists of the Russian blue chips included in MICEX-10 index. Let us use the Benati-Rizzi method (2)-(6). As the initial data we used quotation of the following companies: RAO Aehroflot, RAO Aviakompaniya ALROSA, RAO Bank VTB, RAO Gazprom, RAO GMK Norilsk Nickel, RAO Lukoil, RAO Magnit, RAO MosBirzha, RAO NK Rosneft, RAO Sberbank. The data ranges through January 3 2017 to December 29 2017 for 252 observations. Suppose the VaR value is 0.95 and then find the solution of (2)-(6) with the IBM CPLEX. So, we have shares as follows: RAO Aehroflot has share 0.15, RAO Gazprom has share 0.37, RAO GMK Norilsk Nickel has share 0.16, RAO Lukoil has share 0.11, RAO Magnit has share 0.05 and RAO Sberbank has share 0.16.

The observed portfolio P1 return at the moment of its construction (January, 29 2017) was 95%, that exceeds the MICEX-10 return at the same period (it leveled at -23.04%). Using the same historical data we calculated asset shares of another portfolio P2 constructed by the Markowitz model. According to the calculations, the portfolio P2 consisted of assets of RAO GMK Norilsk Nickel (share 0.26) and RAO Sberbank (share 0.74) only. The observed return of P2 at the moment of its construction was 30% per year.

Conclusion. The proposed model (2)-(6) allows constructing of an investment portfolio taking into account marginal risk level. Usage of this approach demands lower initial investments, weakens influence of critical market drop on portfolio price and increases realized investment return compared to classical Markowitz model. The Benati-Rizzi method is suitable for construction of wide range of investment portfolios managed by unskilled investors with different risk aversion profiles.

Acknowledgment. The work is carried out at Tomsk Polytechnic University within the framework of Tomsk Polytechnic University Competitiveness Enhancement Program grant.

REFERENCES

1. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1998) Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, pp. 203–228.
2. Kritski, O.L., Ulyanova, M.K. (2007) Assessing of multivariate financial risks of stock share portfolio. *Applied econometrics*, vol. 2, no. 4, pp. 3-18. (In Russian)
3. McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2015) Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Revised Edition: Princeton University Press, USA, 699 p.
4. Benati, S., Rizzi, R. (2007) A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 176, iss. 1, pp. 423–434.

АЛГЕБРА СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В (2+1) ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

А.А. Сараева

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А.И. Бреев

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 67, 634050

E-mail: Anastasia16-05@yandex.ru

SYMMETRY ALGEBRA OF THE DIRAC EQUATION IN (2 + 1) SPACE-TIME

A.A. Saraeva

Scientific Supervisor: Ph.D. A.I. Breev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 67, 634050

E-mail: : Anastasia16-05@yandex.ru

Abstract. *The Dirac equation for a charge in an external electromagnetic field is the basic equation for relativistic quantum mechanics and quantum electrodynamics. The Dirac equation in the magnetic solenoid field is the basis of the theory of Aharonov-Bohm effect both in (3+1) and (2+1) dimensions. The self-adjoint extension problem in quantum mechanics was investigated in detail by Gitman, Tyutin, and Voronov. The Dirac equation is of interest in planar gravity and the Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) black hole in relation with the investigation of the Dirac matter field behavior on the background of the BTZ gravity. Another motivation in studying the (2 + 1) Dirac equation in curved space-time is that, although the (2+1) dimensional gravity is a toy model for a regular Einstein theory in (3+1) dimensions, it preserves some significant properties of regular gravity being mathematically simpler. To construct exact solutions of the Dirac equation, the separation of variables method is commonly used. A new method, named the noncommutative integration method, has been proposed to construct bases of exact solutions of linear partial differential equations. The noncommutative integration (NI) method essentially uses a Lie algebra L of differential symmetry operators of the first order. Note that the method allows one to find exact solutions (NI-solutions) in the cases when the Dirac equation does not allow separation of variables.*

Введение. Уравнение Дирака для заряда во внешнем электромагнитном поле является основным уравнением релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики. В релятивистской квантовой механике это уравнение интерпретируется как одночастичное волновое уравнение, описывающее фермионы во внешнем поле. В квантовой электродинамике точные решения уравнения Дирака необходимы для получения изображения взаимодействия Ферри, чтобы точно построить взаимодействие с внешним полем и взаимодействие фотонов [1].

Точные решения уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени являются полезными инструментами для исследования физического поведения частиц. Поэтому эта тема стала интересной из-за применения уравнения в различных областях физики, в частности в физике конденсированных сред. Там (2+1) уравнение Дирака при наличии внешнего электромагнитного потенциала используется при теоретическом изучении электронных свойств графена [2-4] и графеновых квантовых точек [5]. Привлечено внимание то обстоятельство, что при исследовании свойств симметрии уравнения возникают

некоторые новые отличительные моменты от уравнения Клейна-Гордона-Фока, связанные с многокомпонентностью волновой функции. Способ описать симметрию на языке алгебр Ли позволяет добиться математической строгости изложения с использованием относительно несложных выкладок, а также пригоден для описания симметрии, не связанной с преобразованиями пространства-времени.

Трёхмерная теория уравнения Дирака обладает свойствами, подобными (3+1) теории, поскольку тензор Римана сводится к тензору Риччи в (2+1) теории и, кроме этого, матрицы Дирака сводятся к известным матрицам Паули. Вывод определяющих уравнений для уравнения Дирака в (2+1)-мерном пространстве-времени определяет оператор симметрии с матричными коэффициентами, а полный набор операторов симметрии обеспечивает разделение переменных в уравнении Дирака в (2+1) пространстве-времени, аналогично (3+1)-мерному случаю. Обобщая сказанное, мы видим, что разработка математических методов для обнаружения новых точных решений для уравнения (2+1) Дирака имеет важное значение в связи с расширением применения релятивистских квантовых уравнений в актуальных задачах квантовой теории. Данная работа основана на статье [6] и также является её логическим продолжением.

Описание метода. Уравнение Дирака (2+1) в искривленном пространстве времени определяется путём введения соответствующих матриц Дирака, спинорной связности и обобщённого оператора импульса. Матрицы Дирака определяются как

$$\gamma^\mu(x) = e_\alpha^\mu(x) \hat{\gamma}^\alpha,$$

где $\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \hat{\gamma}^1 = i\sigma_1, \hat{\gamma}^2 = \sigma_2$, и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ матрицы Паули.

Спинорная связность Γ_μ (предполагается бесследовой) обеспечивает ковариантное дифференцирование спиноров. Обобщенный оператор импульса определяется как $P_\nu = p_\nu - A_\nu$, $p_\nu = i(\nabla_\nu + \Gamma_\nu)$, где A_ν -компоненты векторного потенциала внешнего электромагнитного поля.

Уравнение Дирака для частицы массой m в (2+1) пространстве-времени с внешним электромагнитным потенциалом выглядит следующим образом: $H\psi = 0$, $H = \gamma^\mu P_\mu - m$.

Линейный дифференциальный оператор $X = X^\nu P_\nu + \chi$ первого порядка с матричными коэффициентами переводит каждое решение уравнения Дирака в решение этого уравнения; X^ν и χ это матричные функции от x . Определяющее уравнение для оператора симметрии X можно записать в виде $[X, H] = \Psi H$. Здесь через Ψ обозначили множитель оператора Лагранжа, имеющий вид $\Psi = \Psi^\nu P_\nu + \bar{\Psi}$, где Ψ^ν и $\bar{\Psi}$ это матричные функции от x .

Операторы X , которые удовлетворяют определяющему уравнению, образуют алгебру Ли L . Ясно, что любой оператор $Y = RH$ является решением с $\Psi = [R, H]$, где R это линейный дифференциальный оператор. Множество таких операторов Y образует идеал N в алгебре Ли L : $[Y, X] = ([R, X] - R\Psi)H$.

Операторы Y из идеала N не несут никакой информации об уравнении Дирака и его решениях. Такие симметрии мы называем тривиальными. Нас интересуют элементы фактор-алгебры $M=L/N$, которые мы будем называть нетривиальными симметриями.

Таким образом, подставляя выражения оператора симметрии и множителя Лагранжа в определяющее уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях обобщенного

оператора импульса P_ν , получаем определяющие уравнения в терминах матричных функций. Далее раскладываем матричные функции по базису через гладкие скалярные функции от x и как следствие определяем наш оператор симметрии в этой терминологии. В массивном случае операторы симметрии для уравнения (2+1) Дирака представлены в терминах векторов Киллинга, а спиновые операторы с матричными коэффициентами при производных могут быть удалены из операторов симметрии без потери общности.

Результаты. Были получены определяющие уравнения для уравнения Дирака в (2+1)-мерном многообразии в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами, а также в классе линейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами. Получена система уравнений, соответствующая коэффициентам разложения определяющих уравнений по степеням обобщённого оператора импульса.

Заключение. Полученные определяющие уравнения определяют оператор симметрии, а полный набор операторов симметрии обеспечивает разделение переменных в уравнении Дирака в (2+1)-мерном пространстве, аналогично (3+1)-мерному случаю. Определяющие уравнения всегда линейны, а множество их решений образует алгебру симметрий рассматриваемого уравнения.

Для построения точных решений уравнения Дирака обычно используется метод разделения переменных. Внешние электромагнитные поля, допускающие разделение переменных в уравнении Дирака и Клейна – Гордона перечислены в [7, 8]. В ссылке [9] представлен новый метод, названный методом некоммутативного интегрирования, который существенно использует алгебру Ли L дифференциальных операторов симметрии первого порядка. Отметим, что этот метод позволяет найти точные решения в тех случаях, когда уравнение Дирака не допускает разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M. Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum.– Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, London, 1991. – P. 1-288.
2. Castro Neto H., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S. and Geim A. K. The electronic properties of graphene// Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81.–P. 109-162.
3. Vozmediano M. A. H., Katsnelson M. I., Guinea F. Gauge fields in graphene// Physics Reports. – 2010. – V. 496.–P. 109-122.
4. Katsnelson M.I. Graphene: Carbon in two dimensions//Cambridge University Press. – 2012. –V.10.–P. 20-27.
5. Guclu A.D., Potasz P., Korkusinski M., Hawrylak P. Graphene Quantum Dots.– Springer Heidelberg, 2014. – P. 172.
6. Breev A.I., Shapovalov A.V. Symmetry operators and separation of variables in the (2 + 1)-Dirac equation with external electromagnetic field//Mathematical Physics.– 2017.– V.15.– P. 2-8 .
7. Bagrov V.G., Gitman D.M. Exact solutions of relativistic wave equations.– Dordrecht: Kluwer, 1990. – P. 7-10.
8. Bagrov V.G., Gitman D.M. The Dirac equation and its Solutions.– Boston: De Gruyter, 2014. – P. 1-6.
9. Shapovalov A.V., Shirokov I.V. Noncommutative integration of linear differential equations. Theor. Math.Phys. – 1995.– V.104.– P. 921-934.

**ИЗЛУЧЕНИЕ ТЕМНЫХ ФОТОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ПОЛЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**И.В.Ворончихин, Б.И.Василишин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: IVV1211@yandex.ru**RADIATION OF DARK PHOTONS IN ELECTROMAGNETIC
FIELDS OF SPECIAL KIND**I.V.Voronchikhin, B.I.Vasilishin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: IVV1211@yandex.ru

***Abstract.** This paper investigates the characteristics of spontaneous emission of massive photons by a boson moving in a constant and uniform magnetic field. Calculations are based on exact solutions of the Klein-Gordon equation. In the approximation of a small photon mass, corrections to the matrix elements of the transition current related to the mass of the emitted photon.*

Введение. Интенсивные исследования тёмной материи, проводятся как на крупнейших ускорителях (ЛHC, CEBAF) так и в экспериментах, не использующих ускорители (CAST, ADMX). Одна из трудностей в исследовании тёмной материи заключается в том, что она может наблюдаться только при гравитационном взаимодействии. Однако, имеется уникальная возможность существования новой силы взаимодействия между «тёмным» сектором и видимым веществом, передаваемая новым векторным бозоном (тёмным фотоном) [1]. Тёмный фотон может образовываться в реакции вида: $e^- Z \rightarrow Z A'$, когда пучок электронов (e^-) попадает на активную мишень (Z). Далее такой бозон может распасться на два лептона из тёмного сектора $A' \rightarrow \chi^- \chi$. Проведённые в 2016 году исследования по прямому поиску векторного бозона в суб-гэвном регионе масс в эксперименте NA64, SPS CERN, показали для набранной статистики в $4,3 \cdot 10^{10}$ электронов, попавших на мишень, отсутствие сигналов, характерных для такого процесса. Таким образом, были получены новые, более строгие, ограничения на константу смешивания A' с фотонами: $10^{-5} < \varepsilon < 10^{-2}$ для массы $m_{A'} \leq 1$ ГэВ [2].

Мощность излучения. Исследование характеристик спонтанного излучения массивных фотонов проведем в пренебрежении спиновыми свойствами излучающей частицы. В этом приближении заряженную частицу можно описывать уравнением Клейна-Гордона. На первом этапе исследования рассмотрим движение электрона в постоянном и однородном магнитном поле (в эксперименте NA64, SPS CERN есть соответствующий участок траектории). Уравнение Клейна-Гордона в декартовой системе координат для частицы в однородном стационарном магнитном поле с векторным потенциалом $A_x = A_z = 0$, $A_y = xH$, имеет вид:

$$\left\{ E^2 - m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \bar{\nabla}^2 + 2ic\hbar e_0 H x \frac{\partial}{\partial y} - e_0^2 H^2 x^2 \right\} \psi = 0, \quad (1)$$

где E – полная энергия частицы; m_0 – масса частицы; c, \hbar, e_0 – скорость света, приведенная постоянная Планка, элементарный заряд соответственно; x, y, z – координаты в декартовой системе; $\bar{\nabla}$ – вектор набла; H – напряженность магнитного поля. Решение уравнения (1) ищется в виде:

$$\psi = e^{i/\hbar(p_3 z + p_2 y)} F(x).$$

В результате получена нормированная волновая функция уравнения Клейна-Гордона и спектр энергий [3]:

$$\psi(\bar{r}, t) = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} e^{i/(p_3 z + p_2 y)} e^{-iEt/\hbar} u_n \left(\sqrt{\frac{e_0 H}{c\hbar}} x + \sqrt{\frac{c}{\hbar e_0 H}} p_2 \right) \quad E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_3^2 + 2c\hbar e_0 H (n + 1/2)},$$

где $u_n(x)$ – функция Эрмита; n – номер состояния частицы; p_1, p_2, p_3 – проекции импульса частицы на декартовы координаты. Аналогично безмассовому случаю вероятность перехода $b \rightarrow a$ и мощность излучения в единицу времени соответственно равны [3]:

$$w_{ba} = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \delta(\sqrt{\kappa^2 + c^2 \mu^2} - \kappa_{ba}) \Phi \quad W_{ba} = \frac{e_0^2}{2\pi\hbar} \int d^3\kappa \delta(\sqrt{\kappa^2 + c^2 \mu^2} - \kappa_{ba}) \Phi,$$

где $\bar{e}_\phi, \bar{e}_\theta$ – вектора, которые характеризуют линейную поляризацию; $\delta(x-x_0)$ – дельта функция Дирака; $\bar{\kappa}$ – волновой вектор фотона; μ – масса темного фотона. Величины Φ и \bar{a} имеют вид:

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_3 = (\bar{a}^* \cdot \bar{e}_\phi^*) (\bar{a} \cdot \bar{e}_\phi) + (\bar{a}^* \cdot \bar{e}_\theta^*) (\bar{a} \cdot \bar{e}_\theta) \quad \bar{a} = \frac{1}{2m_0 c^2} \int e^{-i(\bar{\kappa} \cdot \bar{r})} [\psi_a^* \hat{P}^+ \psi_b + \psi_a^* \hat{P} \psi_b] d^3x,$$

где \hat{P} – оператор обобщенного импульса, который имеет вид:

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \bar{\nabla} - \frac{e_0}{c} \bar{A}.$$

В результате для проекций вектора \bar{a} на декартовы координаты, получим:

$$\alpha_1 = i \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} e^{-\frac{D}{2} + if} S^{n-m-1} \sqrt{\frac{\hbar e_0 H}{2c}} \cdot \left\{ \left(2m^2 L_{m-1}^{n-m+1}(D) + n^{-\frac{1}{2}} L_m^{n-m+1}(D) \right) S^2 - \left(n^{\frac{3}{2}} L_m^{n-m-1}(D) + \frac{m^2}{2} L_{m+1}^{n-m-1}(D) \right) \right\}$$

$$\alpha_2 = e^{if} \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} e^{-\frac{D}{2}} S^{n-m} \left\{ \sqrt{\frac{e_0 H}{c\hbar}} (4p_2 - \hbar\kappa_2) L_m^{n-m}(D) - \frac{e_0 H}{c} \left(2S L_m^{n-m+1}(D) + \frac{n}{S} L_m^{n-m-1}(D) \right) \right\}$$

$$\alpha_3 = e^{if} \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} e^{-\frac{D}{2}} S^{n-m} \sqrt{\frac{e_0 H}{c\hbar}} (2p_3 - \hbar\kappa_3) L_m^{n-m}(D).$$

Здесь p_1, p_2, p_3 и p_1', p_2', p_3' – проекции импульса частицы в начальном и конечном состояниях на декартовы координаты соответственно; E, E' – полные энергии частицы в начальном и конечном состоянии соответственно; n и m – номера начального и конечного состояний частицы соответственно, и использованы обозначения:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{c\hbar/e_0 H} \cdot (\kappa_2 - i\kappa_1) \quad f = c\hbar/2e_0 H \cdot (2\kappa_2 - \kappa_2) \kappa_1 \quad D = 2S^* S = c\hbar/2e_0 H \cdot (\kappa_2^2 + \kappa_1^2).$$

Предположим, что масса фотона мала и много меньше единицы. Тогда в пределе, при стремлении массы темного фотона к нулю, можем записать поправки к мощности излучения:

$$\delta\left(\sqrt{\kappa^2 + c^2\mu^2} - \kappa_{ba}\right) \approx \delta\left(\kappa - \kappa_{ba} + \frac{\mu^2 c^2}{2\kappa^2}\right) \approx \delta(\kappa - \kappa_{ba}) + \frac{\mu^2 c^2}{2\kappa^2} \delta'(\kappa - \kappa_{ba}), \quad \mu \rightarrow 0.$$

$$\delta W_{ba} = -\frac{e_0^2 \mu^2 c^2}{4\pi} \int \frac{d^3 \kappa}{\kappa^4} \delta(\kappa - \kappa_{ba}) \frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^2 \Phi \right] \Big|_{\mu=0},$$

где $\kappa_{ba} = E - E'$ – разность полных энергий частицы в начальном и конечном состоянии.

Результат. В итоге для поправок к матричным элементам тока перехода связанных с массой излучаемого фотона получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\kappa} = & \alpha_1 \left\{ \frac{c^2 \hbar (p_3 - \hbar \kappa \cos(\theta)) \cos(\theta)}{2E^2} - \frac{c\hbar}{2e_0 H} \kappa \sin^2(\theta) + \frac{(n+m-1)}{\kappa} \right\} + \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} e^{-\frac{D}{2}} \cdot \\ & \cdot i\hbar \sqrt{\frac{e_0 H}{c\hbar}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\kappa} \left\{ -2n\sqrt{m} L_{m-2}^{n-m+1}(D) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left((n+1)L_{m-1}^{n-m+1}(D) + L_m^{n-m+1}(D) \right) \right\} (S)^{n-m+1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \left\{ n\sqrt{n}(n-1)L_{m-1}^{n-m-1}(D) + \sqrt{m} \left(nL_m^{n-m-1}(D) - L_{m+1}^{n-m-1}(D) \right) \right\} (S)^{n-m-1} + \right) \\ \frac{d\alpha_2}{d\kappa} = & \alpha_2 \left\{ \frac{c^2 \hbar (p_3 - \hbar \kappa \cos(\theta)) \cos(\theta)}{2E^2} - \frac{c\hbar}{2e_0 H} \kappa \sin^2(\theta) + \frac{(n+m-1)}{\kappa} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{EE'}} \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} e^{-\frac{D}{2}} \sqrt{\frac{e_0 H}{c\hbar}} \frac{1}{\kappa} \left\{ \left(\hbar k_2 L_m^{n-m}(D) - 2n\hbar(4k_2 - \kappa \sin(\theta)) L_{m-1}^{n-m}(D) \right) S^{n-m} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{4\hbar e_0 H}{c}} \left(2S^{n-m+1} \left(L_m^{n-m+1}(D) - (n+1)L_{m-1}^{n-m+1}(D) \right) - n(n-1)S^{n-m-1} L_{m-1}^{n-m-1}(D) \right) \right\} \\ \frac{d\alpha_3}{d\kappa} = & \alpha_3 \left\{ \frac{(k_3 - \kappa \cos(\theta)) \cos(\theta)}{2K^2} - \frac{\kappa \sin^2(\theta)}{4\gamma} + \frac{n+m-1}{\kappa} \right\} - \frac{\hbar\sqrt{2\gamma}}{2\sqrt{EE'}} e^{-\frac{D}{2}} \cdot \\ & \sqrt{\frac{2^{n-m} m!}{n!}} \cdot \left\{ \hbar \cos(\theta) L_m^{n-m}(D) + \frac{2(2k_3 - \kappa_3)}{\kappa} n L_{m-1}^{n-m}(D) - \frac{2k_3 - \kappa_3}{\kappa} L_m^{n-m}(D) \right\} S^{n-m} \end{aligned}$$

Заключение. Исследование характеристики спонтанного излучения массивных фотонов электронами, при их торможении адронным калориметром связаны с более значительными трудностями. Тем не менее расчеты проведены на основе точных решений уравнения Клейна-Гордона могут оказаться полезными в общем случае, в качестве опорных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. N. Gninenko, Search for MeV dark photons in a light-shining-through-walls experiment at CERN — Phys. Rev. D 89, 075008 – Published 8 April 2014.
2. D. Banerjee et al. (The NA64 Collaboration), Search for vector mediator of dark matter production in invisible decay mode — Phys. Rev. D 97, 072002 – Published 4 April 2018.
3. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

**ВЛИЯНИЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ВИХРЕВУЮ РЕШЕТКУ
В МОДЕЛИ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО**

А.Е. Кулагин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: ae88@tpu.ru

**EFFECT OF THE INTERACTION NONLOCALITY ON THE VORTEX LATTICE
IN THE GROSS-PITAEVSKII MODEL**

A.E. Kulagin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: ae88@tpu.ru

***Abstract.** In this paper the triangular vortex lattice in the nonlocal Gross-Pitaevskii model with the phenomenological dissipation is studied. The numerical solutions in the rotating frame of reference are obtained for the delta-like interaction potential with different coefficients of nonlocality. The strongly nonlocal interaction results in the packing of vortices for the rotating frequency lower than in the local model. Also, the larger the coefficient of nonlocality, the larger size of the density holes of vortices while keeping their number constant.*

Введение. Множество теоретических и экспериментальных работ по бозе-эйнштейновскому конденсату (БЭК) в слабовзаимодействующих газах посвящены изучению вихревой решетки во вращающемся конденсате. Актуальность таких работ связана с тем, что подобный механизм образования вихрей присутствует и в сверхпроводниках второго рода (вихри Абрикосова). С физической точки зрения отличие заключается в том, что в сверхпроводниках мы наблюдаем вихревой ток куперовских пар, а в газах – вращение самого газа в состоянии сверхтекучести. Поэтому БЭК в газах представляет собой модельную систему для изучения вихревых свойств в сверхпроводниках (этот тезис был выдвинут в экспериментальной работе [1]). Математическое описание конденсированного состояния слабовзаимодействующего газа основано на модели Гросса-Питаевского. Формирование и свойства треугольной вихревой решетки в газах изучалось как на основе локальной модели (см., например, [2]), так и с учетом нелокального взаимодействия (см., например, [3]). Однако среди многочисленных работ по моделированию БЭК в газах остался неосвещенным вопрос о том, как именно нелокальность взаимодействия влияет на структуру вихрей. Этот вопрос представляет интерес не только с физической точки зрения, но и с математической. Данная работа посвящена поиску ответа на него.

Математическая модель вихревой решетки в бозе-конденсированном газе. Мы будем работать с нелокальным безразмерным уравнением Гросса-Питаевского вида

$$\left\{ -i\partial_t - \Delta + V(\mathbf{r}) - \mu - \omega \hat{L}_z + \kappa \int_{\square^2} W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) |\Psi(\boldsymbol{\rho}, t)|^2 d\boldsymbol{\rho} \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

где Δ – символ Лапласа, κ – параметр нелинейности, $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус вектор, \hat{L}_z – оператор момента импульса вдоль оси z , ω – скорость вращения системы координат, μ – химический потенциал.

Квадрат модуля волновой функции $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ имеет смысл плотности газа. В качестве потенциала ловушки мы будем использовать $V(\mathbf{r}) = r^2/4 + r^4/16$ [4]. Слагаемое четвертой степени в потенциале ловушки было добавлено с целью наблюдения эффекта упаковки вихрей при достаточно больших скоростях вращения. В качестве потенциала взаимодействия мы возьмем дельта-образную функцию

$W(\mathbf{R}) = \frac{1}{\gamma^2 \pi} \exp\left[-\frac{R^2}{\gamma^2}\right]$, которая при стремлении к нулю коэффициента нелокальности $\gamma \rightarrow 0$ переходит

в дельта-функцию Дирака, а уравнение (1) вырождается в локальное:

$$\left\{-i\partial_t - \Delta + V(\mathbf{r}) - \mu - \omega \hat{L}_z + \kappa |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

Несмотря на то, что вихревая решетка является точным решением уравнений (1), (2), перейти от невихревого начального состояния к вихревому, решая эти уравнения, мы не сможем. Для этого, во-первых, нужно нарушить цилиндрическую симметрию. Это можно сделать, задав несимметричное начальное условие, но так как нам хочется в начальный момент времени задать функцию $\Psi(\mathbf{r}, 0)$,

являющуюся решением стационарного уравнения, мы поступим иначе. Зададим небольшую анизотропию в гармонической ловушке, взяв вместо $V_{\text{harm}}(\mathbf{r}) = r^2/4$ функцию $V_{\text{harm}}(\mathbf{r}) = (\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2)/4$,

где числа $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – числа, на несколько сотых отличающиеся от единицы. Вторая заглавная связана с тем,

что переход от невихревого состояния к вихревому требует рассеяние энергии. В экспериментах по БЭК оно появляется естественным образом за счет столкновений конденсированных атомов с неконденсированными. Математически это рассеяние можно задать, введя феноменологическое затухание с малым параметром η , т.е. заменив в уравнениях (1), (2) слагаемое $-i\partial_t$ на $-(i - \eta)\partial_t$.

Значение $\eta = 0,03$ возьмем исходя из оценок [5], которые делались на основе сравнения с экспериментальными данными. Стоит отметить, что процесс образования вихревой решетки является термодинамически неравновесным, поэтому химический потенциал $\mu = \mu(t)$ меняется, пока система не достигнет установившегося режима. Закон изменения $\mu(t)$ определяется из условия сохранения нормы

$$\int_{\square^2} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}.$$

Уравнения (1), (2) решались численно с помощью метода операторного расщепления Странга-Марчука и разностной схемы Кранка-Никольсона. Коэффициент нелинейности принимался $\kappa = 250$, а волновая функция нормировалась на единицу. На рис. 1, 2 представлены решения уравнений (1), (2) в установившемся режиме для разных скоростей вращения ω .

Обсуждение результатов. Рис. 1 демонстрирует, что увеличение коэффициента нелокальности приводит к увеличению размеров ямы плотности конденсата. При этом количество вихрей не меняется при увеличении нелокальности. На основании результатов, представленных на рис. 2, видно, что увеличение степени нелокальности взаимодействия приводит к упаковке нескольких вихрей. Такой эффект наблюдается и для локальной модели при увеличении скорости вращения БЭК (и, как следствия,

увеличения количества вихрей), но наступает он при более высоких скоростях, чем для модели с сильной нелокальностью. Стоит отметить, что количество вихрей на рис. 2а–2в тоже остается равным. Упакованные вихри можно различить по наличию дефектов фазы волновой функции.

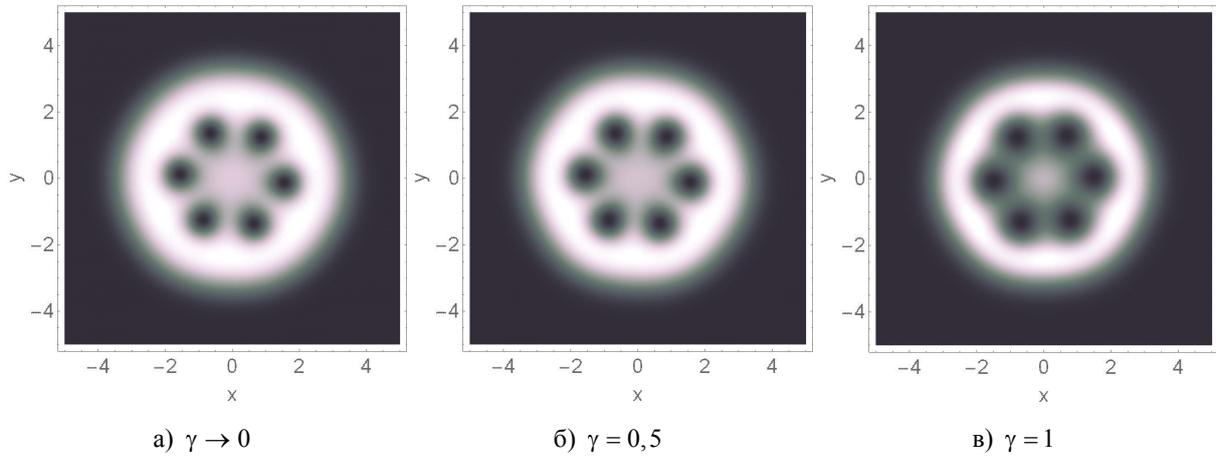


Рис. 1. Зависимость плотности $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ от x, y для $\omega = 2$

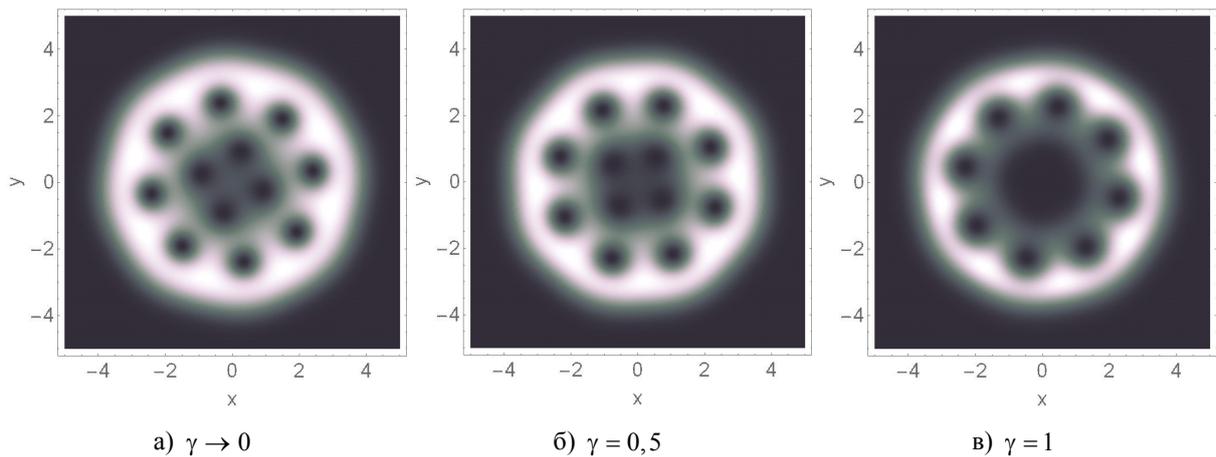


Рис. 2. Зависимость плотности $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ от x, y для $\omega = 2,4$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abo-Shaeer J.R., Raman C., Vogels J.M., Ketterle W. Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates. Science. – 2001. – V.292., no. 5516. – pp. 476–479.
2. Tsubota M., Kasamatsu K., Ueda M. Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate // Physical Review A. – 2002. – V. 65., no. 2. – pp. 023603/1–023603/4.
3. Lashkin V.M., Yakimenko A., Zaliznyak Y. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose-Einstein condensates with nonlocal dipole-dipole interaction. Physica Scripta. – 2009. – V. 79, no. 3. – pp. 035305/1–035305/5.
4. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate. Physical Review A. – 2002. – V. 66, no. 5. – pp. 053606/1–053606/4.
5. Choi S., Morgan S.A., Burnett K. Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensate. Physical Review A. – 2002. – V. 57., no. 5. – pp. 4057–4060.

**РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ РЕШЕТОЧНЫМ
МЕТОДОМ БОЛЬЦМАНА И ОЦЕНКА ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТИ ПО СРАВНЕНИЮ
С МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

Н.С. Гибанов

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru

**SOLUTION OF CLASSICAL PROBLEMS OF NATURAL CONVECTION BY LATTICE
BOLTZMANN METHOD AND ESTIMATION OF ITS EFFICIENCY IN COMPARISON WITH
THE FINITE DIFFERENCE METHOD**

N.S. Gibanov

Scientific Supervisor: Associate Professor, Dr. M.A. Sheremet
National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Avenue, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru

***Abstract.** Mathematical modeling of natural convection in a closed square cavity with a heated left wall and a cooled right wall has been carried out by two different numerical methods (Lattice Boltzmann Method – LBM and Finite Difference Method – FDM). Whereas the remaining walls have been considered as heat-insulated. This investigation has been performed to estimate the effectiveness of the Lattice Boltzmann Method for natural convection problems and to verify of data obtained by a more studied method. The feature of solution for each of considered methods has been shown. The Boltzmann equation has been used in LBM, while transformed dimensionless Oberbeck-Boussinesq equations have been used in the FDM.*

Введение. В последнее время, наряду с методами конечных разностей, контрольного объема и конечных элементов для решения задач гидродинамики, набрал популярность и решеточный метод Больцмана. Данный метод имеет ряд преимуществ и является более перспективным по сравнению с вышеперечисленными благодаря более простой реализации в некоторых типах задач гидродинамики (пористые среды, многокомпонентные течения, гидродинамика в материалах с изменяемым фазовым состоянием) [1]. Кроме того, для затратных по времени расчета задач необходимо использовать методику распараллеливания на различные процессы (как на центральном процессоре, так и на процессорах графической карты). В решеточном методе Больцмана такие процессы будут являться более естественными, так как вычисления для основных двух шагов метода – столкновения и переноса частиц локальны [2].

В представленной работе мы рассматривали основную идею и структуру решеточного метода Больцмана на примере классической задачи естественной конвекции в замкнутом контуре с дифференциально обогреваемыми стенками. Также был использован метод конечных разностей.

Физическая и математическая постановка. Область решения задачи схематически представлена на рисунке 1. Рассматривается замкнутый квадратный контур с обогреваемой левой

стенкой и охлаждаемой правой. Температуры на этих стенках считаются постоянными во все время расчета. Верхняя и нижняя стенки считаются адиабатическими. Внутри полости находится несжимаемая ньютоновская жидкость, теплофизические свойства которой считаются постоянными, удовлетворяющая приближению Буссинеска.

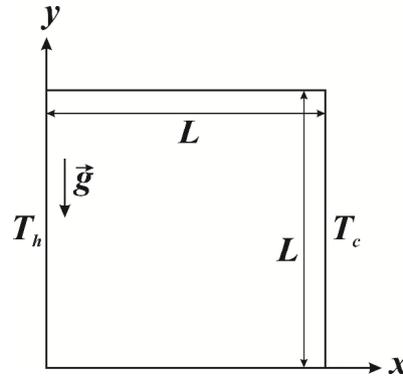


Рис. 1. Область исследования

Для метода конечных разностей уравнения описывающие процессы переноса тепла, массы и импульса в безразмерных преобразованных переменных в рассматриваемой полости, выглядят следующим образом [3]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right). \quad (3)$$

Краевая задача (1)-(3) была решена методом конечных разностей на структурированной сетке.

В решеточном методе Больцмана основные уравнения имеют вид:

$$f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_k(x, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{\text{eq}}(x, t), \quad (4)$$

$$g_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = g_k(x, t)(1 - \omega_t) + \omega_t g_k^{\text{eq}}(x, t) \quad (5)$$

где f_k, g_k – функции распределения для конкретного направления k для уравнения движения и энергии соответственно, $f_k^{\text{eq}}, g_k^{\text{eq}}$ – функции локального равновесного распределения для конкретного

направления k , $\omega = \frac{1}{3\nu + 0.5}$ – при расчете функций распределения для движения (ν – кинематическая

вязкость), $\omega_t = \frac{1}{3a + 0.5}$ – при расчете функций распределения для температуры (a – коэффициент

температуропроводности).

Схема решения уравнения (4) делится на 2 основных шага [2].

1. Столкновение частиц: $f_k(x, t + \Delta t) = f_k(x, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{\text{eq}}(x, t)$.

2. Перенос частиц: $f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_k(x, t + \Delta t)$.

Аналогично для уравнения (5):

1. Столкновение частиц: $g_k(x, t + \Delta t) = g_k(x, t)(1 - \omega_t) + \omega_t g_k^{eq}(x, t)$.
2. Перенос частиц: $g_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = g_k(x, t + \Delta t)$.

При решении задач естественной конвекции решеточным методом Больцмана особое внимание нужно уделить слагаемому, которое будет определять силу тяжести. Оно может быть добавлено в правую часть уравнения (4) в виде ρF , где F будет определяться следующим образом:

$$F = 3w_k g_x \beta \theta e_x + 3w_k g_y \beta \theta e_y$$

где первое слагаемое соответствует проекции на ось x , второе на ось y .

В качестве расчетной схемы была выбрана D2Q9, где D2 – означает что рассматривается плоская задача, Q9 – устанавливает какое количество связующих задействовано при расчете функций распределения.

Также был решен ряд тестовых задач для одномерного и двумерного уравнения теплопроводности на основе двух рассматриваемых методов. В ходе их решения была проварьирована размерность расчетной сетки и шаг по времени.

Результаты и заключение. В результате проведенной работы были выявлены принципиальные различия в методе конечных разностей по сравнению с решеточным методом Больцмана при решении задач естественной конвекции в замкнутых полостях. Проведено сравнение полученных результатов на основе этих методов и получено качественное согласование результатов. В результате оценки метода в целом можно сделать вывод о перспективности его использования в дальнейшем в связи с ростом интереса к задачам плавления и течения многофазных жидкостей, а также простоты его структуры, основывающейся на более простых расчетах в отличие от метода конечных разностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии Президента РФ СП-1053.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куперштох А.Л. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость-пар // Современная наука. – 2010. – №2 (4) С. 56-63.
2. Mohamad A. A. Lattice Boltzmann Method: Springer-Verlag London, 2011.
3. Martyushev S. G., Sheremet M. A. Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in an air filled cavity with internal heat source // International Journal of Thermal Sciences. – 2014. Vol. 76. Pp. 51–67.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ
ПОРИСТОЙ ПОЛОСТИ. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ПОСТАНОВКЕ
ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА СРЕД

С.А. Михайленко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

TRANSIENT REGIMES OF NATURAL CONVECTION IN A ROTATING POROUS CAVITY.
COMPARISON OF DIFFERENT APPROACHES TO THE FORMULATION OF THE BOUNDARY
CONDITION AT THE INTERFACE LINE

S.A. Mikhailenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

Abstract. A study of convective heat transfer inside a rotating porous square cavity has been carried out. Governing equations written using the dimensionless stream flow, vorticity, and temperature were solved by the finite difference method. The left wall of the cavity heats up, the right one cools, the other walls are thermally insulated. Two approaches are considered and analyzed for setting boundary conditions at the boundary of clean and porous media. The effects of Taylor numbers on heat transfer have been studied.

Введение. Изучение естественной конвекции во вращающихся системах при наличии пористых вставок имеет большое значение для решения различных технических проблем. Например, вставки из пористого материала помогают охлаждению компонентов, участвующих в работе электронной аппаратуры. В настоящей работе проводится численный анализ режимов конвективного теплопереноса в квадратной вращающейся полости с пористой вставкой. Полость, изображенная на рис. 1, наполнена жидкостью и вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω_0 . В полости находится пористый слой высоты h . Левая стенка нагревается и поддерживается при постоянной температуре T_h , в то время как правая охлаждается при температуре T_c . Горизонтальные стенки являются адиабатическими.

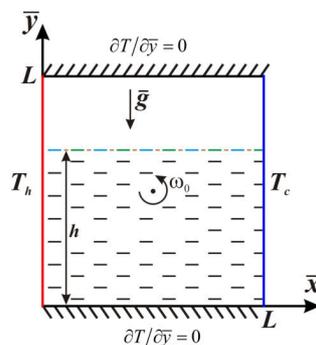


Рис. 1. Область решения задачи

Уравнения и методы. Процесс переноса массы, количества движения и энергии в полости описывается следующей системой уравнений, записанных в безразмерном виде в переменных «функция тока–завихренность»:

• для чистой среды

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\tau) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\tau) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

• для пористой вставки

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\omega}{Da} \right) + \frac{\varepsilon^2 \cdot Ra}{Pr \cdot Ta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\tau) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\tau) \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta_f}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_f}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} \right) + \frac{\xi}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} (\theta_s - \theta_f) \quad (6)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{(1 - \varepsilon) \Lambda \gamma}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} \right) + \frac{\xi \gamma}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} (\theta_f - \theta_s) \quad (7)$$

Здесь Ra – число Рэлея, Pr – число Прандтля, Ta – число Тейлора, Da – число Дарси, ε – пористость, ξ – число Нилда, $\Lambda = \lambda_s / \lambda_f$ – относительный коэффициент теплопроводности, $\gamma = (\rho c)_f / (\rho c)_s$ – относительный коэффициент теплоемкости.

Начальные и граничные условия:

$$\tau = 0: \quad \Psi = \omega = \theta = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\tau > 0: \quad \Psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \theta_f = \theta_s = 1 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\Psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \theta_f = \theta_s = 0 \quad \text{при } x = 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\Psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \theta_f}{\partial y} = \frac{\partial \theta_s}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, 1 \text{ и } 0 < x < 1$$

на границе жидкой и пористой сред в первом случае использовались соотношения вида:

$$\tau > 0: \quad \begin{cases} \Psi_{porous} = \Psi_f, \\ \frac{\partial \Psi_{porous}}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial y}, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_f|_{clear\ fluid} = \theta_f|_{porous} = \theta_s|_{porous} \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial y}|_{clear\ fluid} = \varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial y}|_{porous} + (1 - \varepsilon) \Lambda \frac{\partial \theta_s}{\partial y}|_{porous} \end{cases}$$

на границе жидкой и пористой сред во втором случае использовались соотношения вида:

$$\tau > 0: \begin{cases} \Psi_{porous} = \Psi_f, \\ \frac{\partial \Psi_{porous}}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial y}, \\ \omega_{porous} = \omega_f, \\ \frac{\partial \omega_{porous}}{\partial y} = \frac{\partial \omega_f}{\partial y}, \end{cases} \begin{cases} \theta_f|_{clear\ fluid} = \theta_f|_{porous} = \theta_s|_{porous} \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial y}|_{clear\ fluid} = \varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial y}|_{porous} = (1-\varepsilon)\Lambda \frac{\partial \theta_s}{\partial y}|_{porous} \end{cases}$$

Решение полученной системы уравнений с соответствующими граничными условиями проводится с помощью метода конечных разностей. Уравнения дисперсии завихренности (2), (5) и уравнения энергии (3), (6), (7) решаются на основе локально-одномерной схемы Самарского [1, 2]. Разностные уравнения Пуассона для функции тока решаются отдельно методом последовательной верхней релаксации.

Результаты и выводы. В ходе работы получены результаты для широкого диапазона определяющих параметров: $0 < Ta < 10^6$, $10 < \xi < 10^3$, $0 < h < 1$.

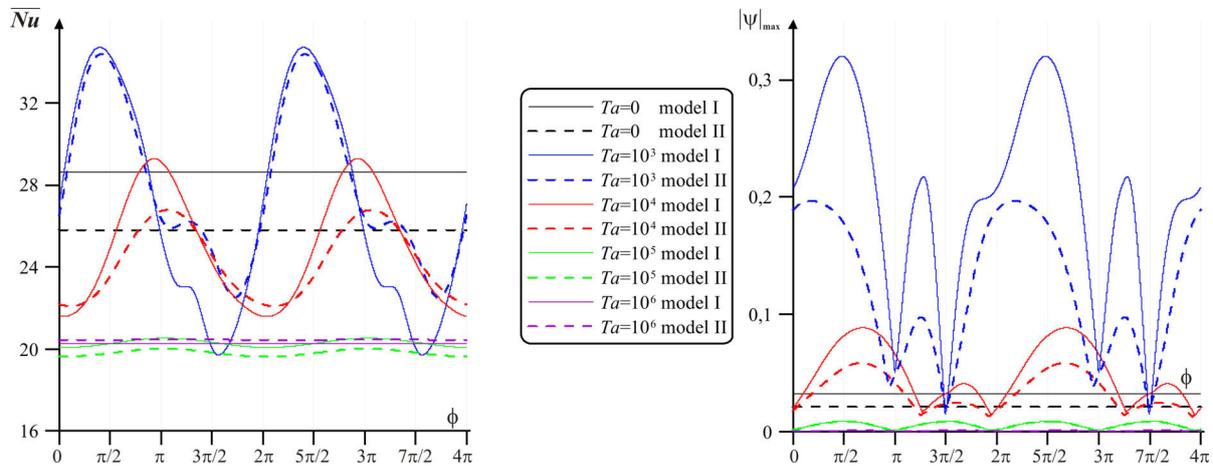


Рис. 2. Влияние числа Тейлора при $\delta=0.5$ и $\xi=100$

На рисунке 2 можно наблюдать влияние числа Тейлора на среднее число Нуссельта на левой стенке и интенсивность течения жидкости при использовании двух различных постановок граничного условия на линии раздела сред. Стоит отметить, что приведенные результаты получены после установления периодических изменений в полости. При умеренной скорости вращения полости можно добиться повышения интенсивности течения и теплоотдачи по сравнению со случаем без вращения. Так же получены и описаны распределения температуры и линий тока.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (соглашение № 17-79-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhailenko S.A., Sheremet M.A., Mahian O. Effects of uniform rotation and porous layer on free convection in an enclosure having local heat source // International Journal of Thermal Sciences. – 2019. – Vol. 138. – P. 276-284.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

**ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ
НА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННУЮ КОНВЕКЦИЮ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ
В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ**

Д.С. Лоенко (Бондаренко)

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м. н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: whiteink@bk.ru

**EFFECT OF HEAT-GENERATION SOURCE LOCATION ON THE THERMO-
GRAVITATIONAL CONVECTION OF A POWER LAW FLUID IN AN ENCLOSURE**

D.S. Bondarenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: whiteink@bk.ru

***Abstract.** In this paper, we studied the influence of the heat source position in a closed cavity on the process of thermogravitational convection of a non-Newtonian fluid. The equations describing the process are represented in non-primitive dimensionless variables by the stream function - vorticity - temperature. The finite difference method was used as the main solution method. The analysis was conducted in a wide range of characterizing parameters. During the study, the distribution of stream lines and isotherms was obtained depending on the position of the source. Dependences of the average Nusselt number and the average temperature at the source surface on the governing parameters also were obtained.*

Введение. Естественно-конвективный теплообмен – это наиболее популярный способ электронного охлаждения. Такой механизм является более простым, менее затратным и менее шумным [1]. Однако процесс термогравитационной конвекции с традиционными агентами теплообмена, такими как вода и воздух, изучен достаточно широко. Поэтому, данная работа посвящена изучению термогравитационной конвекции в неньютоновской жидкости. Существует множество работ, направленных на выявление гидродинамических характеристик потока степенной жидкости в различных полостях, с разными формами тепловыделяющих элементов и т.д. Целью нашего исследования является математическое моделирование термогравитационной конвекции неньютоновской степенной жидкости в замкнутой полости в зависимости от расположения тепловыделяющего элемента.

Физическая и математическая постановка задачи. Схема области решения представлена на рис. 1. Замкнутая квадратная полость заполнена неньютоновской средой, особенностью которой является нелинейная зависимость вязких напряжений от скорости сдвига. Характер течения неньютоновской жидкости описывает степенной закон Оствальда-де-Вилла [2]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{eff} D_{ij} = 2K (2D_{kl} D_{kl})^{\frac{n-1}{2}} D_{ij}$$

Здесь D_{ij} - компоненты тензора скоростей деформации, μ_{eff} - эффективный коэффициент вязкости, K - коэффициент динамической вязкости, n - показатель поведения жидкости.

Горизонтальные стенки теплоизолированы. Вертикальные стенки поддерживаются при низкой температуре T_c . В центре нижней стенки расположен элемент постоянного объемного тепловыделения Q . В ходе исследования источник энергии смещается на безразмерное расстояние d от левой вертикальной границы области.

Поставленная задача описывается системой нестационарных дифференциальных уравнений в преобразованных переменных функция тока – завихренность – температура, которая выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \left(\frac{Ra}{Pr} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[\nabla^2 (\tilde{M}\Omega) + S_\Omega \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{Ar}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + 1 \right)$$

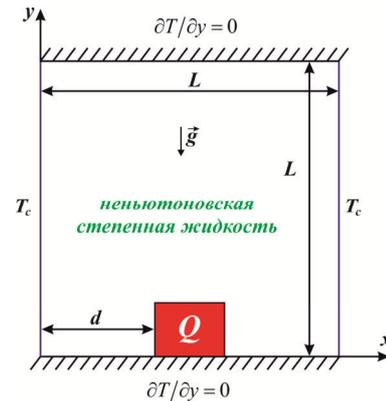


Рис. 1. Область решения

Здесь все параметры безразмерны: X, Y - декартовы координаты, Ψ - функция тока, Ω - завихренность, τ - время, Θ - температура, S_Ω - источниковый член, \tilde{M} - вязкость. Также присутствуют безразмерные комплексы: число Рэлея - $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu a}$, число Прандтля - $Pr = \frac{\nu}{a}$ и относительный коэффициент теплопроводности Ar . Начальные условия для системы выглядят следующим образом: в полости $\Psi = \Theta = \Omega = 0$, на поверхности источника $\Theta = 1$. Граничные условия принимают следующий вид:

$$X = 0 \text{ и } X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq d/L \text{ и } d/L + 0.2 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

На поверхности источника, где k – относительный коэффициент теплопроводности:

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{n}^2}, \begin{cases} \Theta_{ист} = \Theta_{ж} \\ k \frac{\partial \Theta_{ист}}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \Theta_{ж}}{\partial \bar{n}} \end{cases}$$

Результаты и выводы. Математическое моделирование процесса естественной конвекции неньютоновской жидкости в замкнутой квадратной полости в зависимости от положения тепловыделяющего элемента было проведено в широком диапазоне определяющих параметров на равномерной сетке 100×100 узлов. Число Рэлея Ra варьировалось в диапазоне $10^4 - 10^6$, индекс степенного закона n принимал значения от 0.8 до 1.4, относительный коэффициент теплопроводности $k=1, 10, 100, 1000$, источник смещался относительно левой стенки на величину $\delta = d/L$, которая принимала значения 0.1 – 0.7. Сеточные параметры были выбраны на основе анализа их влияния на

процесс. В качестве основного метода решения был использован метод конечных разностей. Алгоритм решения был детально протестирован на классе модельных задач.

В результате моделирования были получены изолинии функции тока и температуры в зависимости от определяющих параметров и для различных положений источника. На рис. 2. представлены линии тока и изотермы для трех положений нагревателя при $n=0.8$, $k=10^2$, $Pr=10^2$, $Ra=10^5$. Следует отметить, что при симметричных положениях тепловыделяющего элемента линии тока и изотермы также симметричны. Для трех положений видно, что в полости образуются две рециркуляционные зоны, которые показывают восходящий поток над источником тепла и нисходящие потоки вблизи охлаждающих стенок. Также можно наблюдать образование двумерного теплового факела над нагревателем, который отражает распределение изотерм к центральной части полости.

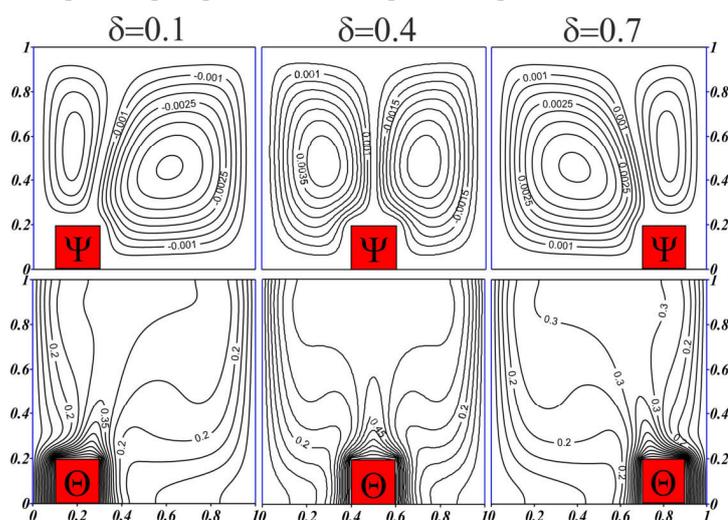


Рис. 2. Линии тока Ψ и изотермы Θ при $n=0.8$, $k=10^2$, $Pr=10^2$, $Ra=10^5$
и при различных положениях источника тепла

В ходе работы также были получены зависимости среднего числа Нуссельта на поверхности источника и средней температуры внутри источника от определяющих параметров. Установлено, что с ростом числа Рэлея среднее число Нуссельта увеличивается, чему соответствует уменьшение температуры. С ростом показателя поведения жидкости температура внутри источника возрастает, а среднее число Нуссельта уменьшается. При увеличении относительного коэффициента теплопроводности и среднее число Нуссельта, и средняя температура возрастают.

Работа была выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (проект №13.9724.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ostrach S. Natural convection in enclosures // *Advanced in Heat Transfer*. - 1972. – Vol. 8. – Pp. 161-227.
2. Khezzar, L. Natural convection of power law fluids in inclined cavities / L. Khezzar, D. Siginer, I. Vinogarov // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2012. – Vol. 53. – Pp. 8-17.
3. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ С
ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ МЕТОДАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ**

М.С. Астанина

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

**STUDY OF THERMOGRAVITATIONAL CONVECTION IN AN ENCLOSURE WITH POROUS
INSERTION BY METHODS OF COMPUTATIONAL HEAT TRANSFER**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

***Abstract.** Numerical analysis of thermogravitational convection in an enclosure with a porous insertion filled with a fluid of variable viscosity has been carried out in the presence of a heat-conducting and heat-generating element on the bottom wall. The horizontal walls are adiabatic while the vertical walls of the cavity are kept at constant cooling temperature. The discrete energy source is bounded by porous insertion. Governing equations formulated in the dimensionless stream function, vorticity and temperature were solved by the finite difference method. The obtained results illustrating the effects of key parameters on streamlines, isotherms as well as average Nusselt number, fluid flow rate inside the cavity and average temperature inside the heater have been presented.*

Введение. Развитие приборостроения, электронной и химической промышленности подталкивает к разработке эффективных систем охлаждения источников энергии различных типов. Теоретические исследования в этой области позволяют предугадывать работу электронных устройств и увеличивать срок их службы. Особое значение в этой области имеют задачи, в постановках которых используются жидкости с переменными теплофизическими свойствами.

В настоящей работе моделируется процесс конвективного теплопереноса в замкнутой частично пористой полости при наличии теплогенерирующего теплопроводного элемента. Полость заполнена ньютоновской теплопроводной жидкостью, вязкость которой зависит от температуры по экспоненциальному закону [1].

Постановка задачи, методы решения. Физическая постановка задачи представлена на рисунке 1. Считается, что рабочая среда удовлетворяет приближению Буссинеска, а режим течения и теплопереноса является ламинарным. Горизонтальные стенки области теплоизолированы, а боковые поверхности поддерживаются при постоянной температуре. На нижней адиабатической стенке расположен теплопроводный источник с постоянным объемным тепловыделением Q . По периметру источника введена пористая вставка высоты h и длины l . Считается, что температура жидкости равна температуре твердого скелета пористого материала, и для моделирования используется модель, описывающая

процесс теплопереноса в локально-равновесных условиях. Считается, что пористый слой проницаем для жидкости и изотропен. Для описания теплопереноса внутри пористой среды используется модель Дарси–Бринкмана. Дифференциальные уравнения в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура» записываются следующим образом:

- для чистой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= -\Omega, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 (M\Omega)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 (M\Omega)}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \\ &+ 2\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial X^2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 M}{\partial X \partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right], \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right); \end{aligned}$$

- для пористой среды используется модель Дарси-Бринкмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= -\Omega, \\ \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \varepsilon \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 (M\Omega)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 (M\Omega)}{\partial Y^2} - \varepsilon \frac{M\Omega}{\text{Da}} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \\ &+ 2\varepsilon \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\varepsilon U}{2 \cdot \text{Da}} \frac{\partial M}{\partial Y} - \frac{\varepsilon V}{2 \cdot \text{Da}} \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{\partial^2 M}{\partial X^2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial^2 M}{\partial Y^2} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 M}{\partial X \partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right], \\ \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{\alpha_{pm} / \alpha_f}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right); \end{aligned}$$

- для источника энергии:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\alpha_{hs} / \alpha_f}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + Os \right).$$

Здесь x, y – безразмерные декартовы координаты; τ – безразмерное время; u, v – безразмерные составляющие скорости в проекции на оси; θ – безразмерная температура; ψ – безразмерная функция тока; ω – безразмерная завихренности скорости; $\text{Pr} = \frac{M_0}{\rho a}$ – число

Прандтля; $\text{Ra} = \frac{g\beta\Delta TL^3}{M_0 a}$ – число Рэлея; $\text{Da} = \frac{K}{L^2}$ – число Дарси;

$Os = \frac{QL^2}{\lambda_{hs} \Delta T}$ – число Остроградского; ε – пористость

среды; $M = \exp(-C\Theta)$ – безразмерная вязкость. Безразмерные переменные были введены следующим образом:

$$\begin{aligned} X = \bar{Y} / L, X = \bar{Y} / L, \tau = t \sqrt{g\beta\Delta T} / L, \Theta = (T - T_c) / \Delta T, M = \bar{M} / M_0, \\ U = \bar{U} / \sqrt{g\beta\Delta TL}, V = \bar{V} / \sqrt{g\beta\Delta TL}, \Psi = \bar{\Psi} / \sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \Omega = \bar{\Omega} \sqrt{L} / g\beta\Delta T. \end{aligned}$$

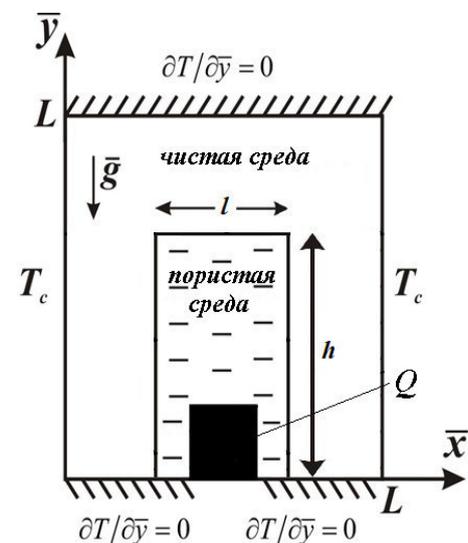


Рис. 1. Физическая модель

В начальный момент времени считалось, что рабочая среда в полости неподвижна, поэтому $\Psi = \Omega = 0$. Начальная температура, вследствие выбранного обезразмеривания, принимала вид $\Theta = 0$. Граничные условия для поставленной задачи записывались следующим образом:

$$\tau = 0: \Psi = \Omega = \Theta = 0 \text{ для } 0 \leq X \leq 1 \text{ и } 0 \leq Y \leq 1$$

$$\tau > 0: \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0 \text{ для } X = 0 \text{ и } 0 \leq Y \leq 1$$

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0 \text{ для } X = 1 \text{ и } 0 \leq Y \leq 1$$

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \text{ для } Y = 0, 1 \text{ и } 0 \leq X \leq 1$$

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}, \begin{cases} \Theta_{hs} = \Theta_{pm} \\ \lambda_{hs} \frac{\partial \Theta_{hs}}{\partial n} = \frac{\partial \Theta_{pm}}{\partial n} \end{cases} \text{ на нагревателе}$$

$$\begin{cases} \Psi_{pm} = \Psi_f \\ \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial Y} \end{cases} \begin{cases} \Omega_{pm} = \Omega_f \\ \frac{\partial \Omega_{pm}}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_f}{\partial Y} \end{cases} \begin{cases} \Theta_{pm} = \Theta_f \\ \lambda_{pm} \frac{\partial \Theta_{pm}}{\partial Y} = \frac{\partial \Theta_f}{\partial Y} \end{cases} \text{ на горизонтальной границе раздела сред}$$

$$\begin{cases} \Psi_{pm} = \Psi_f \\ \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial X} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial X} \end{cases} \begin{cases} \Omega_{pm} = \Omega_f \\ \frac{\partial \Omega_{pm}}{\partial X} = \frac{\partial \Omega_f}{\partial X} \end{cases} \begin{cases} \Theta_{pm} = \Theta_f \\ \lambda_{pm} \frac{\partial \Theta_{pm}}{\partial X} = \frac{\partial \Theta_f}{\partial X} \end{cases} \text{ на вертикальных границах раздела сред}$$

Полученные уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями решались методом конечных разностей на равномерной сетке. Разработанный метод решения был проверен на нескольких модельных задачах.

Заключение. Особое внимание при численном анализе было уделено влиянию свойств пористой вставки на теплоперенос в полости. Выводы основывались на полученных распределениях изолиний функции тока и температуры, а также на распределениях среднего числа Нуссельта, средней температуры внутри источника и интенсивности течения внутри полости. Распределения среднего числа Нуссельта на поверхности источника были получены на основе следующей формулы: $\overline{Nu} = \frac{1}{l} \int_0^1 Nu \, d\zeta$.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании пассивных систем охлаждения тепловыделяющих теплопроводных источников энергии.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание № 13.9724.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астанина М. С., Шеремет М. А. Моделирование термогравитационной конвекции с переменной вязкостью в замкнутой полости с локальным источником энергии// Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2015. – Выпуск 3(31) – С. 52-59.

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТА РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК
В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ РДТТ И ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛОВИ
БЛОКЕ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ**

А.В. Червакова, М.С. Середа, К.В. Костюшин

Научный руководитель: к. ф.-м. наук И.В. Еремин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

**DEVELOPMENT OF SOFTWARE TO CALCULATE PERFORMANCE IN THE COMBUSTION
CHAMBER SOLID FUEL ROCKET ENGINE AND THE MAIN PARAMETERS OF GAS FLOW
IN THE NOZZLE UNIT BASED ON THE BACKPRESSURE**

A.V. Chervakova, M.S. Sereda, K.V. Kostyushin

Scientific Supervisor: PhD I.V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

***Abstract.** A software package designed to calculate the pressure in the combustion chamber of solid-fuel rocket engines and the flow parameters of the combustion products in the nozzle block of the rocket engine, taking into account the backpressure on the nozzle section, has been developed. The algorithm of the program is based on the use of the Bori equation to calculate the pressure in the combustion chamber using the power law of combustion, and gas-dynamic functions to calculate the flow in the Laval nozzle. Calculation of the nozzle parameters taking into account the backpressure is carried out by the Kudryavtsev method.*

Введение. Ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) активно применяются в современной космонавтике. РДТТ состоит из корпуса, топливного заряда, реактивного сопла, воспламенителя и других элементов. Газ, образовавшийся от сгорания топлива, попадает в реактивное сопло, где разгоняется до сверхзвуковых скоростей. При всей простоте функциональной схемы РДТТ расчет рабочих характеристик в камере сгорания представляет собой сложную задачу и связан с большим количеством вычислений. При проектировании сопла ракетного двигателя также необходимо проведение расчетов основных параметров течения газа.

Методика расчета. Программный комплекс состоит из двух инженерных приложений. Разделение программного комплекса на два инженерных приложения позволяет решать не только сопряженную задачу расчета камеры сгорания и сопла Лавалья, но и отдельные задачи, что бывает полезно в инженерной практике. Первое приложение реализует расчет рабочих характеристик в камере сгорания РДТТ. Второе приложение принимает в качестве входных данных результаты расчетов первого приложения и реализует расчёт основных параметров течения продуктов сгорания в сопле. Алгоритм расчета давления в камере сгорания основан на вычислении давления в камере сгорания с использованием формулы Бори:

$$p_i(t_i) = \left(\frac{S_i \rho_T u_1}{A \sigma_{кр}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}},$$

где t – время, S_i – площадь горения заряда, ρ_T – плотность топлива, u_1 – единичная скорость горения, $\sigma_{кр}$ – площадь критического сечения сопла, ν – степенной коэффициент, A – введенный коэффициент:

$$A = \frac{\Gamma}{\sqrt{RT}},$$

где R – газовая постоянная, T – температура продуктов сгорания, Γ – введенный коэффициент:

$$\Gamma = \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

где k – показатель адиабаты. Скорость горения определяется по степенному закону: $\frac{de}{dt} = u_1 p^\nu$.

Алгоритм расчета течения газа в сопловом блоке основан на определении коэффициента скорости из газодинамической функции:

$$q(\lambda) = \frac{S}{S_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right), \quad (1)$$

где λ – коэффициент скорости, S – площадь анализируемого сечения, $S_{кр}$ – площадь критического сечения.

Уравнение (1) является нелинейным и решается с методом Ньютона: $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \left(\frac{q(\lambda) \partial q(\lambda)}{|J| \partial \lambda} \right)^{(n)}$, где

n – номер итерации, $|J| = \frac{\partial q(\lambda)}{\partial \lambda}$ – определитель матрицы Якоби. Далее по полученным значениям

приведенной скорости вычисляются остальные газодинамические параметры потока: давление, температура, плотность газового потока, числа Маха и скорость потока по формулам:

$$p = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot p_{атм}, \quad T = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot T_{атм},$$

$$\rho = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad M = \lambda \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}, \quad w = \lambda \cdot a_{кр},$$

где $p_{атм}$, $T_{атм}$ – давление и температура окружающей среды, $a_{кр}$ – скорость в критическом сечении сопла:

$$a_{кр} = \sqrt{2RT_{атм} \frac{k}{k+1}}.$$

При использовании ракетных двигательных установок возможны такие режимы работы, при которых атмосферное давление значительно превышает давление в выходном сечении сопла, рассчитанное для безотрывного течения. Например, при старте ракет из шахт или при наземных испытаниях двигателей, предназначенных для использования в верхних слоях атмосферы. Наличие в реальном течении пограничного слоя в расширяющейся части сопла служит причиной воздействия окружающей среды на течение сверхзвукового потока. Это воздействие происходит через область пограничного слоя с

дозвуковой скоростью течения, в результате чего на режимах перерасширения возможен отрыв потока от стенок сопла. В этом случае при расчете характеристик течения требуется применение методик, учитывающих существенные особенности течения. В данном приложении противодавление на срезе сопла учитывается с помощью методики Кудрявцева:

$$\frac{p_0}{p_{атм}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{ск}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{0,39 + 0,73 M_{ск}}$$

где p_0 - давление заторможенного потока, $p_{атм}$ - атмосферное давление, $M_{ск}$ - значение числа Маха, при котором происходит скачок.

Результаты. Программы написаны на языке C# с использованием программной платформы NET.Framework и имеют модульную структуру.

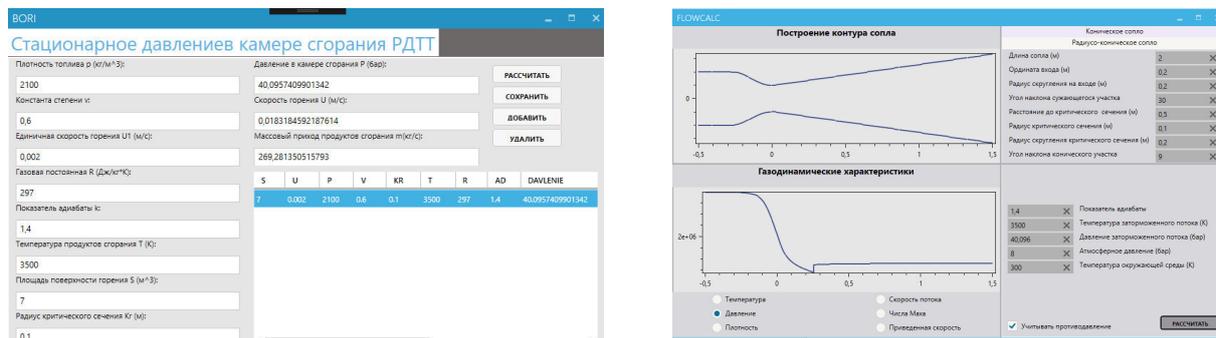


Рис. 1. Интерфейс приложений «Bori» (слева) и «FlowCalc» (справа)

Приложение «Bori» позволяет проводить расчеты рабочих характеристик в камере сгорания. В блоке расчета стационарного давления входными данными являются геометрические и химические характеристики заряда, радиус критического сечения сопла. В блоке расчета нестационарного давления к входными данными добавляется шаг по времени и время расчета. Приложение «FlowCalc» также состоит из двух функциональных частей: модуля построения геометрии сопла и модуля проведения расчетов. Модуль построения геометрии сопла позволяет строить контуры конического и радиусо-конического сопел. В качестве входных данных модуль принимает геометрические параметры выбранного сопла. Модуль проведения расчетов в качестве входных данных использует параметры торможения, температуру и давление окружающей среды и параметры в камере сгорания на каждом шаге по времени, являющиеся выходными данными приложения «Bori». Графический интерфейс приложений приведен на рис. 1.

Заключение. Проведены тестовые расчеты РДТТ с коническим соплом и торцевым расположением заряда в камере сгорания; с радиусо-коническим соплом и цилиндрическим расположением заряда. Верификация результатов расчета проведена путем сравнения с [1, с.285-292] для течений в соплах и [2, с.179-184] для расчета камеры сгорания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания, проект № 9.9063.2017/8.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иров Ю.Д., Кейль Э.В., Маслов Б.Н. Газодинамические функции - М: Машиностроение, 1965. - 398 с.
2. Яскин А.В. Теория устройства ракетных двигателей: учебное пособие. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2013. – 262 с.

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ПРОДУКТОВ
СГОРАНИЯ В ПРОТОЧНОМ ТРАКТЕ РДТТ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ
НАПОЛНИТЕЛЯ**

К.В. Костюшин, М.С. Середа, А.В. Червакова

Научный руководитель: Канд. физ.-мат. наук И.В. Ерёмин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: mihailsereda@mail.ru

**DEVELOPMENT OF PROGRAM FOR CALCULATION OF GAS FLOWS IN A SOLID-FUEL
ROCKET ENGINE WITH A MOVING GEOMETRY**

K.V. Kostyushin, M.S. Sereda, A.V. Chervakova

Scientific Supervisor: Candidate of Physical-Mathematical Sciences I.V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: mihailsereda@mail.ru

***Abstract.** In the present study calculations algorithm of gas flow in solid-fuel rocket engine are shown. The algorithm is based on the solution of two-dimensional gas dynamics equations. Calculations are done for solid-fuel rocket engine model which consists of combustion chamber and nozzle. The results in agreement with known solutions.*

Введение. Разработан программный комплекс, предназначенный для проведения многопараметрических вычислительных экспериментов в газодинамических трактах ракетных двигателей. Программный комплекс позволяет проводить расчеты параметров течений продуктов сгорания в газодинамических трактах ракетных двигателей, с учетом изменения геометрии высокоэнергетического наполнителя в камере сгорания.

Методика расчета. Методика расчета базируется на решении уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого газа [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G \rho dG \right) + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G \rho \mathbf{v} dG \right) + \iint_S (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{I}}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_G e dG \right) + \iint_S (e + p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3)$$

G – конечная область в трехмерном пространстве, $dG = dx dy dz$ – элемент объема, S – поверхность ограничивающая область G , $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ – ориентированный элемент поверхности S , где \mathbf{n} – внешняя нормаль к S , а dS – элемент площади, ρ – плотность, t – время, p – давление, $\mathbf{v} = [u, v, w]^T$ – скорость движения газа, $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag}[1, 1, 1]$ – единичный тензор размерности 3×3 , e – удельная внутренняя

энергия, $e = \rho\varepsilon + \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2$ – полная энергия единицы объема. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначает скалярное произведение двух векторов.

Система (1) – (3) замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = (k-1)\rho\varepsilon.$$

Система (1) – (3) решается методом Годунова [2]. Для общего случая движущейся пространственной дискретной сетки, можно записать следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho G)_i^{k+1} - (\rho G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} R_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j &= 0, \\ \frac{(\rho \mathbf{v} G)_i^{k+1} - (\rho \mathbf{v} G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} (R \mathbf{V})_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} &= 0, \\ \frac{(e G)_i^{k+1} - (e G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} E_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} &= 0, \\ \frac{G_i^{k+1} - G_i^k}{\Delta t} - \sum_{j=1}^{m(i)} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j S_j$, а Δt – шаг по времени. Нижний целый индекс i обозначает величины функций, отнесенные к центру масс i -го многогранника, а нижний целый индекс j обозначает величины отнесенные к центру j -ой грани дискретной ячейки. \mathbf{D}_j – скорость движения центра j -ой грани дискретной ячейки. Верхний целый индекс k обозначает номер шага по времени. Полуцелые верхние индексы $k+1/2$ обозначают значения соответствующих величин в момент времени $t+0.5\Delta t$. Уравнение (4) является уравнением изменения объема дискретной ячейки G_i . Большие величины R , \mathbf{V} , P , E обозначают соответственно плотность, скорость, давление и полную энергию на гранях дискретной сеточной ячейки. Эти величины вычисляются путем решения задачи Римана для уравнений газовой динамики.

Геометрические параметры ячеек на поверхности горения и локальный массовый поток с грани расчетной ячейки на текущем шаге по времени вычисляется с использованием степенного закона скорости горения:

$$\begin{aligned} u &= u_0 p_i^h, \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \mathbf{n} u \Delta t, \\ m &= r_T u, \end{aligned}$$

где u – скорость горения, u_0 , h – константы в законе скорости горения, p_i – давление в ячейке, \mathbf{x} – вершины подвижной грани ячейки, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к грани ячейки, m – локальный массовый поток, r_T – плотность топлива.

Для повышения порядка точности по пространству на структурированных сетках используется техника монотонной интерполяции сеточных решений MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) удовлетворяющая условию TVD (Total Variation Diminishing). Реализованы схемы

MUSCL Upwind и MUSCL Fromm второго порядка точности, основанные на линейной реконструкции искомым функций в пределах ячейки, а также схема MUSCL третьего порядка точности основанная на параболической реконструкции решения. Для удовлетворения условию TVD используются функции-ограничители наклона: MINMOD, Van Albada, Van Leer, Superbee [3]. Для повышения порядка точности на неструктурированных сетках, и сетках с произвольной топологией реализован метод кусочно-линейной реконструкции решения, с ограничителями Barth and Jespersen и Venkatakrishnan [4]. Для определения параметров на гранях расчетных ячеек реализован алгоритм точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, а также алгоритмы приближенного решения: метод Roe с энтропийной коррекцией и метод HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact solver) [3]. Для повышения порядка точности по времени используется схема Рунге-Кутты k-ого порядка. Разработан и реализован алгоритм построения структурированных, блочно-структурированных и неструктурированных расчетных сеток. Структурированные сетки строятся путем равномерного распределения узлов на границах расчетной области и сглаживаются с использованием алгоритма, основанного на решении уравнения Лапласа. Неструктурированные сетки строятся с использованием алгоритмов SweepLine либо Dwyer. Реализованы алгоритмы контроля качества сеток с ограничениями на минимальные и максимальные углы и площади ячеек. Реализованы алгоритмы автоматической стыковки сеток между расчетными подобластями [5].

Заключение. Алгоритм апробирован на структурированных, блочно-структурированных и неструктурированных расчетных сетках при определении параметров невязкого сжимаемого газа в газодинамическом тракте ракетного двигателя, включающего в себя камеру сгорания и сопло с использованием схем первого и второго порядка точности. Полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания, проект № 9.9063.2017/8.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.– М.: Наука, 1976. – 400с.
2. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 607.
3. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Third Edition – SpringerVerlag, Berlin Heidelberg, 2009, 724 p. DOI: 10.1007/b79761
4. Barth T and Jespersen D 1989 The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. 27th Aerospace Sciences Meeting. DOI: 10.2514/6.1989-366.
5. Костюшин К. В., Кувшинов Н. Е. Реализация алгоритма численного решения уравнений газовой динамики для произвольного числа граней расчетной ячейки // Сборник трудов IX всероссийской научной конференции: Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2016) – Томск: Томский государственный университет, 2016. – 502 с.
6. Ерохин Б.Т. Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ: Учебник для высших технических учебных заведений. М.: Машиностроение, 1991. – 560 с.

**RELIABILITY MODEL OF A HOMOGENEOUS WARM-STANDBY DATA TRANSMISSION
SYSTEM WITH GENERAL REPAIR TIME DISTRIBUTION**

H.G.K. Houankpo

Scientific Supervisor: Ph.D. D.V. Kozyrev

Peoples' Friendship University of Russia, Russia, Moscow, Miklukho-Maklaya str. 6, 117198,

E-mail: gibsonhouankpo@yahoo.fr, kozyrev_dv@rudn.university**МОДЕЛЬ НАДЁЖНОСТИ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ
ОБЛЕГЧЁННОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ
ВРЕМЕНИ РЕМОНТА ЭЛЕМЕНТОВ**

Г.Ж.К. Уанкпо

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Д.В. Козырев

Российский Университет Дружбы Народов,

Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, 117198

E-mail: gibsonhouankpo@yahoo.fr, kozyrev_dv@rudn.university

Аннотация. Мы рассматриваем математическую модель восстанавливаемой системы передачи данных как модель замкнутой однородной системы $\langle M_2/GI/1 \rangle$ из двух элементов в облегчённом резерве с M -экспоненциальной функцией распределения (ФР) времени безотказной работы (в.б.р.), и с GI -произвольной ФР времени ремонта её элементов с одним восстанавливающим элементом. Получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарного вероятности отказа системы. Приводится сравнение надёжности системы холодного резервирования с горячим резервированием через модель облегчённого резервирования.

Introduction. Recently the functioning of various aspects of modern society has become critically reliant on communication networks [1]. With the migration of critical facilities to the communication networks, it has become vitally important to ensure the reliability and availability of networks and data transmission systems. A series of previous studies [2-7] were focused on reliability-centric analysis of various complex telecommunications systems. Particularly, the study of the reliability of cold-standby data transmission systems was conducted. In the current work, the results of previous studies are summarized for the case of the so-called warm redundancy of the system $\langle M_2/GI/1 \rangle$ and the calculation and comparison of the stationary reliability characteristics for different types of reserves is performed. The aim of the work is to perform an analytical simulation of a redundant system $\langle M_2/GI/1 \rangle$ of warm-standby redundancy with a general distribution function $B(x)$ and the corresponding distribution density $b(x)$ of the repair time of its elements, and the exponential distribution of the failure-free time of the elements with a parameter $\lambda_i = \alpha + (1 - i)\gamma; i = 0$ и 1 .

The model and analytical results. Consider a random process $v(t)$ - the number of failed elements at time t , with the set of states of the system $E = \{0, 1, 2\}$. To solve the stated problem, we consider an approach which is based on the Markovization principle [10]. To describe the behavior of the system using the Markov process, we introduce an additional variable $x(t) \in R_+^2$ - the elapsed repair time of the time spent of the failed element at time t . We obtain a two-dimensional [12] process $(v(t), x(t))$, with an extended phase space $\varepsilon = \{(0),$

$(1, x), (2, x)$. We denote $p_0(t)$ – the probability that at time t the system is in the state $i = 0$, $p_i(t; x)$ – density distribution (in continuous component) the probability that at time t the system is in state i ($i = 1, 2$), and the time taken to repair the failed element is in the range $(x, x + dx)$:

$$p_0(t) = P\{v(t) = 0\},$$

$$p_1(t, x)dx = P\{v(t) = 1, x < x(t) < x + dx\}, p_2(t, x)dx = P\{v(t) = 2, x < x(t) < x + dx\}.$$

With the help of the formula of total probability we move to the Kolmogorov forward system of differential equations, which makes it possible to find the stationary probabilities of states of the considered system:

$$\begin{cases} p_0(t + \Delta) = (1 - \lambda_0 \Delta) \cdot p_0(t) + \int_0^t \delta(x) \Delta \cdot p_1(t, x) dx, \\ p_1(t + \Delta, x + \Delta) = p_1(t, x) \cdot (1 - \lambda_1 \Delta)(1 - \delta(x) \Delta), \\ p_2(t + \Delta, x + \Delta) = p_2(t, x) \cdot (1 - \delta(x) \Delta) + p_1(t, x) \lambda_1 \Delta. \end{cases}$$

The boundary condition: $p_1(t + \Delta, \theta \Delta) = p_0(t) \lambda_0 \Delta + \int_0^t \delta(x) \Delta \cdot p_2(t, x) dx$.

where $\delta(x) = b(x) / 1 - B(x)$ – the conditional density of the distribution of the residual repair duration of the element being repaired at time t [9, 10] and passing to the limit under $\Delta \rightarrow 0$, and under the assumption that the described process has a stationary probability distribution under $t \rightarrow \infty$ the transformed equations take the following form:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \int_0^\infty \delta(x) \cdot p_1(x) dx, \\ \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} = -p_1(x) \cdot (\lambda_1 + \delta(x)), \\ \frac{\partial p_2(x)}{\partial x} = -\delta(x) p_2(x) + p_1(x) \lambda_1. \end{cases}$$

The corresponding boundary condition: $p_1(0) = p_0 \lambda_0 + \int_0^\infty \delta(x) \cdot p_2(x) dx$. From this, we turn to the solution of the resulting system of differential equations using the method of variation of the constant [8], and we obtain the following stationary state probabilities of the warm-standby system:

$$p_0 = C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}; p_1 = C_1 \left(\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} \right); p_2 = C_1 \left(\frac{\rho^{-1} - (1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1} \right); \rho^{-1} = \frac{EB}{EA} = b \cdot \lambda_1.$$

Where b – mean time of repair of a failed element and $\tilde{b}(\lambda_1)$ – Laplace transform of density (x) of the repair time distribution. Using the normalization condition $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, we find the constant C_1 : $C_1 =$

$$\left[\frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0} + \frac{\rho^{-1}}{\lambda_1} \right]^{-1}.$$

From this, we obtain the stationary probabilities of the states of the cold and hot reservation system the corresponding for $\gamma = \mathbf{0}$ and for $\gamma = \mathbf{\alpha}$. Obviously, there is a dependency of stationary states probabilities of the system on the type of distribution of repair time of its elements. Table 1 shows the values of the probability of failure system p_2 for different distribution functions of repair time (for example, Exponential, Weibull and Pareto) for different values of the model parameter ρ , calculated by the method of analytical modeling.

Table 1

Analytical results for the values of the steady-state failure probability p_2 of the system $\langle M_2/GI/1 \rangle$ calculated for different values of the model parameter $\rho = 1, 10, 100$

GI		EXP($\beta = 1/EB$)		WB($k = 1/2, \beta = k/EB$)		PAR($k = 3, EB(k - 1)/k$)	
		$\gamma = 0$	$\gamma = \alpha$	$\gamma = 0$	$\gamma = \alpha$	$\gamma = 0$	$\gamma = \alpha$
1	P_2	0.3333	0.4000	0.3960	0.4938	0.2843	0.3315
10	P_2	0.0090	0.0164	0.0204	0.0371	0.0060	0.0109
100	P_2	$9.89 \cdot 10^{-5}$	0.0002	0.0003	0.0006	$5.6 \cdot 10^{-5}$	0.0001

One can see that for all distributions, the steady-state failure probability p_2 under hot redundancy is greater than that under the cold one, that is, the most reliable model is the cold-standby one.

Figures 1 show the corresponding plots of the steady-state probability of failure of the cold and hot-standby systems versus the relative recovery rate for various “repair” time distributions (for example: Exponential, Weibull and Pareto). Evidently, this dependency becomes vanishingly small under a “fast” recovery [11-16] of the system's elements.

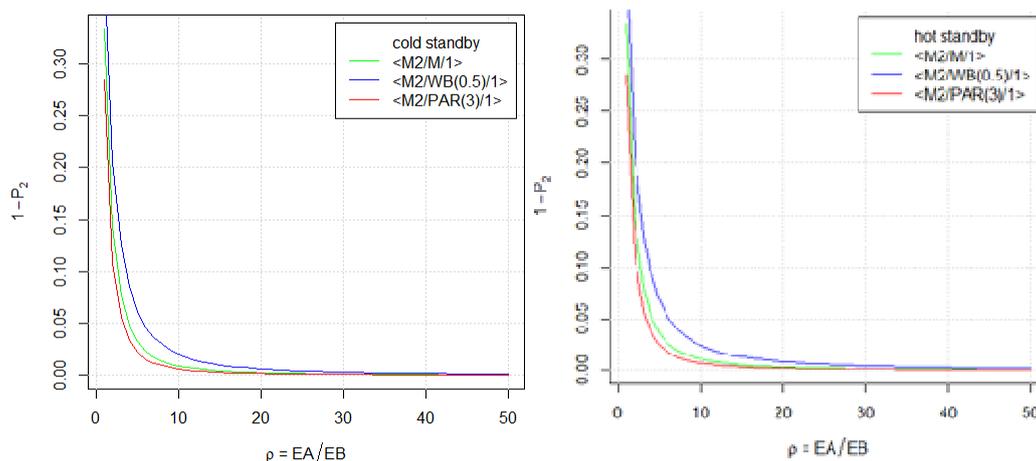


Fig.1. steady-state failure probability of a cold and hot standby system

Conclusion. Explicit analytical expressions were obtained for calculation of the steady-state probability distribution of the states of the warm-standby system and for calculation of the stationary probability of failure of the considered system. And calculated the stationary probability of failure of the considered system with the use of the cold-standby and hot-standby system. The obtained formulas show the presence of an explicit dependency of these characteristics to the types of the cumulative distribution function of the repair time of its elements. However, the numerical studies and the analysis of the constructed graphs showed that this dependence becomes vanishingly small under the “fast” recovery, that is, with the increase in the relative recovery rate ρ and, also showed that the most reliable model for all the distributions is the model with a cold type of redundancy.

REFERENCES

1. Waqar, A., Osman, H., Usman, P., Junaid, Q. (2017) Reliability modeling and analysis of communication networks. Journal Netw. Comput. Appl. 78 C (January 2017), 191215.

2. Rykov, V.V., Kozyrev, D.V., Zaripova, E. (2017) Modeling and Simulation of Reliability Function of a Homogeneous Hot Double Redundant Repairable System. In: Paprika, Z.Z., Horák, P., Váradi, K., Zwierczyk, P.T., Vidovics-Dancs, Á., Rádics, J.P. (eds.) Proceedings of the European Council for Modeling and Simulation, ECMS 2017 (2017). pp. 701-705.
3. Houankpo, H.G.K., Kozyrev D. V. (2017) Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements, in: K.E. Samouilov, L.A. Sevastianov, D.S. Kulyabov (eds.): Selected Papers of the VII Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, Moscow, Russia, 24-Apr-2017, CEUR Workshop Proceedings 1995, pp.107-113.
4. Rykov, V.V., Tran Ahn Ngia (2014) On sensitivity of systems reliability characteristics to the shape of their elements life and repair time distributions, Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series “Mathematics. Information sciences. Physics”, no. 3, pp. 6577 (in Russian).
5. Efrosinin, D., Rykov, V.V. (2014) Sensitivity Analysis of Reliability Characteristics to the Shape of the Life and Repair Time Distributions, Communication in Computer and Information Science 487, pp.101-112.
6. Efrosinin, D., Rykov, V.V., Vishnevskiy, V. (2014) Sensitivity of Reliability Models to the Shape of Life and Repair Time Distributions, 9-th International Conference on Availability, Reliability and Security (ARES 2014) IEEE, 2014, pp. 430- 437.
7. Rykov, V.V., Kozyrev, D.V. (2017) Analysis of renewable reliability systems by Markovization method, Analytical and Computational Methods in Probability Theory (ACMPT 2017), Lecture Notes in Computer Science 10684, pp. 210-220.
8. Petrovsky, I.G. (1952) Lectures on the theory of ordinary differential equations, Lectures on the theory of ordinary differential equations, Moscow, GITTL, 232 p. (in Russian).
9. Rykov, V. (2013) Multidimensional Alternative Processes as Reliability Models. Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks, BWWQT 2013 Proceedings. Eds: A. Dudin, V. Klimenok, G. Tsarenkov, S. Dudin, Communications in Computer and Information Science 356, pp. 147-157.
10. Korolyuk, V., Korolyuk, D. (2017) Heuristic principles of phase merging in reliability analysis, Reliability: Theory and Applications 12 (1) (March 2017) pp. 66-71.
11. Gnedenko, B.V. (1964) On cold double redundant system, Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika, no. 4, pp. 3-12 (in Russian).
12. Gnedenko, B.V. (1964) On cold double redundant system with restoration, Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika, no. 5, pp. 111-118 (in Russian).
13. Solovev A.D. (1970) On reservation with quick restoration, Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika, no. 1, pp. 56-71 (in Russian).
14. Gnedenko, D.B., Solovev, A.D. (1975) Reliability evaluation of complex renewable systems, Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika, no. 3, pp. 121-128 (in Russian).
15. Sevastyanov, B.A. (1957) An Ergodic Theorem for Markov Processes and Its Application to Telephone Systems with Refusals, Theory of Probability and its Applications 2 (1), pp. 104-112.
16. Kalashnikov, V.V. (1997) Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 256 p.

**РАЗВЕДОЧНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ
ОБ ОТКАЗАХ ПРОМЫСЛОВЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПАО «НК «РОСНЕФТЬ»**

Д.П. Кармачев

Научный руководитель: доцент, к.т.н. С.В. Аксенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: karmachevd@mail.ru**EXPLORATORY FAILURE STATISTICS DATA ANALYSIS OF ROSNEFT PJSC PIPELINES**

D.P. Karmachev

Scientific Supervisor: assist. Prof., Candidate of Technical Sciences S.V. Aksenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: karmachevd@mail.ru

***Abstract.** The paper presents an exploratory analysis of statistical data on failures. In the process of analysis, the author considers the initial sample and describes the steps to reduce this sample. The result of the work is the final prepared data table for use in problems of predicting pipeline failures for internal corrosion reasons.*

Введение. В процессах первичной подготовки нефти и газа дочерние общества ПАО «НК «Роснефть» применяют различные по конструктивным характеристикам промышленные трубопроводы (ПТ), которые эксплуатируются под воздействием различных внутренних и внешних факторов. При этом для отказов ПТ характерны высокие материально-экономические потери, а также негативное влияние на экологическую обстановку. В связи с этим, дочерними обществами регулярно выполняются работы по созданию новых и модернизации действующих систем поддержки принятия решения (СППР) при эксплуатации промышленных трубопроводов. Для подсистемы прогнозирования (в составе СППР) исходными данными являются не только динамические модели, но и статистические данные об отказах промышленных трубопроводов [1]. Перед применением накопленной исторической информации в прогнозных моделях важным шагом является проведение фильтрации исходной выборки и разведочного анализа данных. Целью данной работы является проведение разведочного анализа статистических данных об отказах промышленных трубопроводов определенной группы месторождений ПАО «НК «Роснефть».

Анализ исходной выборки. Исходная выборка данных была получена путём выгрузки необходимых данных из информационной системы OisPipe, охватывающей определенную группу нефтяных месторождений. В исходную выборку были занесены признаки, приведенные в таблице 1. Общая размерность исходной выборки составляет 15143 строки.

Первым этапом анализа является сравнительная оценка количества отказов произошедших по различным причинам. К основным причинам отказов ПТ относятся: внутренняя коррозия, дефект сварки, заводской брак, механические повреждения, внешняя коррозия, повышение давления, нарушение правил эксплуатации, конструктивный недостаток, строительный брак и другие. В исходной выборке среди других признаков в подавляющем случае обладает информация касательно характеристик участка ПТ (длина, диаметр, толщина стенки), а также информация касательно параметров перекачки и

характеристик перекачиваемых сред. Также важно отметить, что около 70% всей выборки (10634 строки) – это отказы, произошедшие по причине внутренней коррозии. Обобщая всю данную информацию, в рамках данного предварительного анализа было принято решение сократить исходную выборку и продолжить работу только с информацией об отказах, произошедших по причине внутренней коррозии.

Таблица 1

Перечень признаков исходной выборки данных об отказах

Наименование	Тип признака
Наименование месторождения	Категориальный
Наименование цеха и площадки	Категориальный
Назначение участка	Категориальный
Длина, м	Непрерывный
Диаметр, мм	Непрерывный
Толщина стенки, мм	Непрерывный
Материал трубы	Категориальный
Тип внутренней изоляции	Категориальный
Тип внешней изоляции	Категориальный
Завод изготовитель	Категориальный
Рабочее давление, МПа	Непрерывный
Давление в момент отказа, МПа	Непрерывный
Расход жидкости, м ³ /сутки	Непрерывный
Расход нефти, т/сутки	Непрерывный
Газовый фактор, м ³	Непрерывный
Обводненность (процентное содержание воды в среде), %	Непрерывный
Скорость потока, м/с	Непрерывный
Температура потока, С°	Непрерывный
Причина отказа	Категориальный
Дата ввода в эксплуатацию	-
Дата обнаружения отказа	-

На следующем этапе предварительной обработки были исключены строки данных, описывающие отказы нетипичных участков ПТ по габаритным характеристикам (толщина стенки, диаметр) и по материалам, из которых данные участки изготовлены. Исключены участки, имеющие следующие значения диаметра – 57 мм, 60 мм, 70 мм, 80 мм, 102 мм, 105 мм, 1020 мм, 1400 мм; и следующие значения толщины стенки – 3 мм, 3.5 мм. Также из анализа исключены участки, изготовленные из стали 3 серии, а также из специфических полимеров.

На третьем этапе анализа были рассмотрены основные непрерывные признаки – параметры перекачки и свойства перекачиваемых сред. Для всех пропущенных значений по обводненности, но относительно водоводов высокого и низкого давления, были восстановлены значения в 100%, условно означающие абсолютное содержание воды [2]. Для водоводов были восстановлены пропущенные значения газового фактора равного в среднем 1 м³. Данное значение обусловлено тем, что содержание газа в воде стремится к нулю, что обусловлено спецификой процессов сепарации [2].

Из начальной выборки были исключены строки с пропущенными значениями относительно скорости потока, в связи с тем, что совокупность других параметров перекачки, а также информация о параметрах участка ПТ связаны со скоростью потока среды, а также косвенно с типами структур газожидкостных потоков [3].

Известно, что повышение температуры ускоряет анодные и катодные процессы за счет увеличения скорости движения ионов, что напрямую влияет на образование коррозий, но в дальнейших

исследованиях данным признаком пришлось пренебречь, в связи с тем, что по данному признаку пропущено более 80% значений [3].

Анализ статистической информации проводится с целью выявления зависимостей в прогнозировании отказов по причинам коррозий, которые являются результатом продолжительных процессов транспортировки определенных сред в рамках усредненных параметров перекачки, поэтому признак «давление в момент отказа» не рассматривается в рамках дальнейших исследований.

Результаты анализа. Итоговая выборка статистических данных об отказах по результатам проведенного разведочного анализа представлена в таблице 2.

Таблица 2

Итоговая выборка данных об отказах по результатам анализа

Наименование	Диапазон / Количество	Тип признака
Наименование месторождения	13	Категориальный
Наименование цеха и площадки	187	Категориальный
Длина, м	0.6 – 13600	Непрерывный
Диаметр, мм	73 - 1420	Непрерывный
Толщина стенки, мм	4 – 16	Непрерывный
Материал трубы	15	Категориальный
Тип внутренней изоляции	14	Категориальный
Рабочее давление, МПа	0.01 – 19	Непрерывный
Расход жидкости, м ³ /сутки	0.01 – 60000	Непрерывный
Расход нефти, т/сутки	0.03 – 19853	Непрерывный
Газовый фактор, мЗ	0.01 - 110	Непрерывный
Обводненность, %	0 – 100	Непрерывный
Время наработки на отказ, дней	3563 - 28774	Непрерывный

Общая размерность подготовленной выборки составляет 5587 строк. В рамках разведочного анализа не выявлены явные зависимости между временем наработки на отказ и непрерывными признаками. В исходной выборке отсутствовала информация о физико-химических свойствах перекачиваемых сред, которые оказывают существенное влияние на образование коррозий. Косвенно данные зависимости будут прослеживаться за счет наличие информации о месторождениях и площадках, физико-химические свойства сред на которых приблизительно равны в рамках одного объекта [2].

Закключение. По результатам проведенного разведочного анализа получена выборках об отказах промысловых трубопроводов определенной группы месторождений. Полученная информация будет использована в математических моделях в рамках прогнозирования отказов ПТ, произошедших по причинам внутренних коррозий, с применением методов машинного обучения. Исключенные строки данных будут накапливаться для дальнейшего использования в аналогичных задачах по прогнозированию отказов ПТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Аржиловский, А.В. Алферов, Р.И. Валиахметов. Концепция системы мониторинг надежности и эксплуатации промысловых трубопроводов // Нефтяное хозяйство – сентябрь 2018, С. 128-132.
2. А.И. Владимирова, В.Я. Кершенбаума. Промышленная безопасность и надежность магистральных трубопроводов: учебник для вузов – М.: Изд-во Национального институт нефти и газа, 2009. – 696 с.
3. А.В. Рудаченко, С.С. Байкин. Эксплуатационная надежность трубопроводных систем: учебное пособие – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008 – 119 с.

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК
АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПОРЯДКА p**

А.О. Шерстобитова

Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Т.В. Емельянова
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

**ON THE DISTRIBUTION OF THE SEQUENTIAL ESTIMATES OF
THE AUTOREGRESSIVE MODEL OF THE ORDER p**

A.O. Sherstobitova

Scientific Supervisor: Assos. Prof., PhD T.V. Emelyanova
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin st., 36, 634050

Abstract. *This article revisits a sequential approach to the estimation of the parameter in a p -order autoregressive model (AR(p)) with continuous time. There is provided a numerical study to get a results of sequential estimations of the parameter in p -order autoregressive model with continuous time and is computed a stopping rule. Also there is provided a comprehensive study on the distribution type of calculated sequential estimates.*

Введение. В задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозирования и управления в динамических системах широко используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Зачастую параметры таких уравнений неизвестны, поэтому перед использованием модели требуется идентифицировать параметры непосредственным оцениванием [1].

В большинстве практических задач имеется ограниченное доступное количество шагов наблюдения, часто измеряемое единицами, а потери существенно растут с увеличением числа шагов наблюдения [2]. Кроме того, измеряемый параметр часто не постоянен и является случайным процессом. При использовании последовательного оценивания достигается заметный выигрыш в числе наблюдений, необходимом для различения интересующих нас гипотез с заданными характеристиками точности. Поэтому к последовательной схеме наблюдений целесообразно обращаться в ситуациях, когда каждое наблюдение является дорогостоящим или труднодоступным и по условиям эксперимента исследователь имеет практическую возможность реализовать эту схему [3].

Целью работы является исследование асимптотического распределения оценок неизвестных параметров, полученных с помощью одноэтапной последовательной процедуры, предложенной в работе [1].

Материалы и методы исследования. Пусть наблюдаемый p -мерный процесс $X_t = (X_1(t), \dots, X_p(t))'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t, \quad (1)$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, W_t – стандартный

p -мерный процесс броуновского движения.

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \dots \\ x_t^p \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_p & \theta_{p-1} & \dots & \dots & \theta_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix}; \sigma > 0. \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t . К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p -го порядка ($AR(p)$), описываемого уравнением

$$dx_t^{p-1} = (\theta_1 x_t^{p-1} + \dots + \theta_p x_t) dt + \sigma dw_t \quad (3)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}$ [1].

Заметим, что $\|M_T^{-2}\|^{1/2}$ монотонно убывает, поэтому определим длительность наблюдений процесса

$$\tau = \tau(H) = \inf \left\{ t > 0 : \|M_T^{-2}\|^{1/2} \leq \frac{1}{H} \right\}, \quad (4)$$

и последовательную оценку МНК неизвестных параметров

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p \quad (5)$$

Последовательный план (4, 5) позволяет контролировать среднеквадратическую точность получаемых оценок за счет выбора порога процедуры H . Длительность процедуры при этом пропорциональна порогу процедуры [1].

Асимптотическое распределение последовательных оценок устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть задан процесс вида (1), где A и B – квадратные матрицы размера $p \times p$, W_t – стандартный p -мерный процесс броуновского движения. Пусть неизвестные параметры θ_i , $i = \overline{1, p}$

таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 x^{p-1} - \dots - \theta_p$ лежат в единичном

круге [1]. Последовательный план $(\tau_H, \theta^*(H))$ задается формулами (4, 5), где $H > 0$ – пороговое

значение. Тогда вектор $\frac{1}{\sqrt{H}}(\theta^*(H) - \theta)$ имеет асимптотически нормальное распределение с

параметрами $(0, F^{-1})$.

Результаты. Применим полученные результаты к процессу $AR(2)$ с неизвестными параметрами

$$\theta = (\theta_1, \theta_2).$$

$$d\dot{x}_t = (\theta_1 \dot{x}_t + \theta_2 x_t)dt + \sigma dw_t. \quad (6)$$

Процесс (6) в матричной форме имеет вид

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t$$

Проведено имитационное моделирование, в ходе которого вычислены моменты остановки τ_H , а также последовательные оценки. Рассмотрим результаты моделирования для процесса авторегрессии с непрерывным временем. Для полученных оценок строится полигон частот.

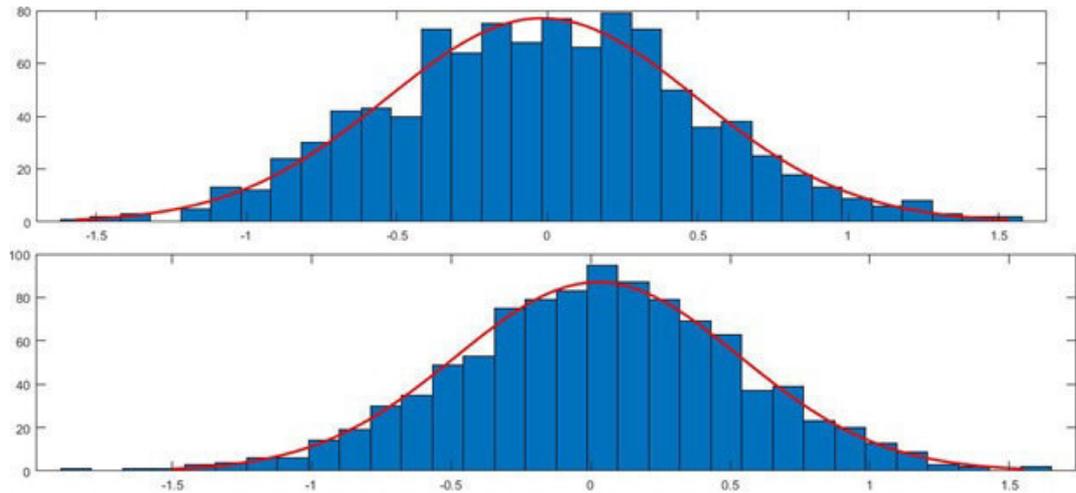


Рис. 1 Полигон частот для оценок параметра: $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.3$

Кроме того, с помощью критерия Жака-Бера была проведена проверка гипотезы о нормальном распределении последовательной оценки вектор-параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ с уровнем доверия $\gamma = 95\%$. Критерий подтвердил нормальность результатов оценивания.

Заключение. Таким образом, последовательные оценки (5) имеют асимптотически нормальное распределение. Этот факт может быть использован для построения доверительных интервалов для параметров модели авторегрессии, а также для исследования оптимальности одноэтапной последовательной процедуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии. – Вестник Томского гос. у-та: Математика и механика. №5(25). Томск, 2013, с. 12-25.
2. Линьков Ю. Н. Об оценках параметров процессов диффузионного типа. – В кн.: Теория случайных процессов. Вып. 9. Киев: Наук.думка, 1981, с.71-78.
3. Кутоянц Ю. А. Оценивание параметров случайных процессов. Ереван. Изд-во АН АрмССР, 1980.

**ФОРМИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ КРИПТОВАЛЮТ
МЕТОДОМ МАРКОВИЦА**

Е.К. Фокина

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: ek.fokina@bk.ru

**THE FORMATION OF AN INVESTMENT PORTFOLIO OF CRYPTOCURRENCY
BY THE MARKOWITZ METHOD**

E.K. Fokina

Scientific Supervisor: Associate Professor, Ph.D. O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: ek.fokina@bk.ru

***Abstract.** In the present study, an approach has been adopted to the construction of a cryptocurrency portfolio based on the Markowitz Theory.*

Введение. Основная идея формирования портфеля состоит в том, что доходность инструмента и величина риска связаны между собой. Иными словами, риск является функцией от разброса значений доходности за ряд временных интервалов. Грамотно составленный портфель должен быть сбалансирован с точки зрения доходности и риска таким образом, чтобы в идеале стремиться к непрерывному росту.

Процесс формирования можно разделить на два этапа. Первый этап заключается в анализе исторических данных и формировании ожиданий относительно будущей доходности доступных для инвестирования инструментов. Второй этап окончательный выбор портфеля. При этом наиболее оптимальные комбинации инструментов образуют множество, называемые эффективными портфелями.

Экспериментальная часть. В модели Марковица допустимыми являются только стандартные портфели (без продаж), то есть портфели, состоящие только из купленных валют: $a_i > 0$.

Для построения портфеля следует ограничить сумму всех долей криптовалют единицей:

$$\sum_i^N a_i = 1.$$

Ожидаемая доходность портфеля в (1) представляет собой сумму доходностей отдельных финансовых инструментов с весовыми коэффициентами [1]:

$$X_p = \sum_i^N a_i x_i. \quad (1)$$

где x_i – доходность i -го финансового инструмента, a_i – доля i -го финансового инструмента в портфеле.

Пусть x_i – случайная величина с дисперсией $D(x_i) = \sigma_p^2$, математическим ожиданием $E(x_i) = a_i$, $\text{cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij}$ ковариация случайных величин x_i и x_j . Отсюда общая дисперсия портфеля:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2)$$

Далее максимизируем среднее ожидаемое значение случайной величины стоимости портфеля X_p :

$$E(X_p) = \sum_i^N a_i E(x_i) = \sum_i^N \alpha_i a_i \rightarrow \max.$$

Помимо доходности инвестору необходимо так же учесть и риск, связанный с той или иной валютой. Ограничиваем уровень дисперсии σ_p^2 в (2) значением некоторой заданной дисперсией σ^2 [1]:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_{ij} \leq \sigma^2.$$

где x_i и x_j – доли общего вложения, приходящуюся на каждую криптовалюту, N – число криптовалют.

Таким образом, математическая модель Марковица (3) примет следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} E(X_p) &\rightarrow \max, \\ \sigma_p^2 &\leq \sigma^2, \\ \sum_{i=1}^N a_i &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве исходных данных были использованы дневные значения цен десяти наиболее капитализированных криптовалют в период с 01.01.2017–30.06.2017 гг. По полученным данным проведены следующие операции.

1. Вычислены среднедневные доходности по каждой криптовалюте за весь период.
2. Построена годовая матрица ковариации и вычислено среднеквадратическое отклонение.
3. С помощью надстройки «Поиск решения» в Microsoft Excel найдена максимальная доходность.

Таким образом, на основании полученного эффективного множества портфелей активов по модели Марковица можно сделать вывод об обнаружении влияния волатильности на доли криптовалют входящих в портфель.

Результаты. На первом этапе среднедневная доходность по каждой криптовалюте составила:

Таблица 1

Среднедневные доходности по каждой криптовалюте

<i>BTC/USD</i>	<i>ETH/USD</i>	<i>XRP/USD</i>	<i>XLM/USD</i>	<i>LTC/USD</i>	<i>XMR/USD</i>	<i>DASH/USD</i>	<i>ETC/USD</i>	<i>NEO/USD</i>	<i>XEM/USD</i>
214,59	816,75	1120,88	778,63	589,99	333,44	678,33	640,79	1203,35	950,56

На следующем этапе была составлена ковариационная матрица, которая определяет зависимость между парами всех криптовалют. И по расчетам матрицы было найдено среднеквадратическое отклонение (см. табл. 2) доходности каждой валюты, т.е. средний разброс цены от математического ожидания, что является показателем риска данных криптовалют.

Таблица 2

Среднеквадратическое отклонение доходности

<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>
75,27	143,29	332,21	278,25	189,75	145,93	153,26	171,19	306,69	195,95

Следующий шаг – нахождение эффективного множества портфелей данных криптовалют. Для была использована надстройка «Поиск решения» в MS Excel, где необходимо максимизировать величину дохода. Диапазон, в котором лежат значения риска портфелей, выбран от $\sigma=0,3$ до $\sigma=3$ с шагом 0,3. Таким образом, определим максимальную доходность портфеля и его структуру, то есть доли инвестиционных активов (криптовалют), зафиксировав значение риска в этом диапазоне с некоторым шагом. В результате при различном значении риска, полученные результаты будут меняться на новые. Можно увидеть, что максимальная доходность и доли каждой криптовалюты в портфелях будут:

Таблица 3

Наличие эффективного множества портфелей данных криптовалют

Риск	Доли										Доходность % - годовых
$\sigma=0,3$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	376,6500
	0,74	0,13	0,03	0,01	0,03	0,00	0,03	0,00	0,01	0,03	
$\sigma=0,6$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	375,7392
	0,74	0,13	0,03	0,02	0,03	0,00	0,03	0,00	0,02	0,03	
$\sigma=0,9$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	768,1458
	0,16	0,30	0,11	0,00	0,05	0,00	0,15	0,00	0,06	0,16	
$\sigma=1,2$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	984,9504
	0,00	0,34	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,29	
$\sigma=1,5$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1061,2670
	0,00	0,10	0,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,33	
$\sigma=1,8$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1115,0750
	0,00	0,00	0,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,45	0,25	
$\sigma=2,1$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1152,0040
	0,00	0,00	0,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,57	0,09	
$\sigma=2,4$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1180,1610
	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,72	0,00	
$\sigma=2,7$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1192,4380
	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,87	0,00	
$\sigma=3,0$	<i>BTC/ USD</i>	<i>ETH/ USD</i>	<i>XRP/ USD</i>	<i>XLM/ USD</i>	<i>LTC/ USD</i>	<i>XMR/ USD</i>	<i>DASH/ USD</i>	<i>ETC/ USD</i>	<i>NEO/ USD</i>	<i>XEM/ USD</i>	1201,5150
	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,98	0,00	

Заключение. По результатам расчетов (см. табл. 3) можно сделать вывод об обнаружении влияния волатильности на доли криптовалют входящих в портфель. Так можно заметить, что при

волатильности в 120% BTC/USD, XLM/USD, LTC/USD, XMR/USD, DASH/USD, ETC/USDнаименее рисковые валюты.

Криптовалюта NEO/USD наиболее рисковая и за счет того, что у нее положительные корреляции с остальными валютами, она увеличивает доходность. Получается, что с ростом риска ее доля растет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maleeva, E.A., Moshenets, M.K., Kritski, O.L. (2017). Automatic data processing system of renewable electric power prices in end – use residential sector of USA [Electronic resource]. APRN Journal of Engineering and Applied Sciences. Vol. 12, No. 2, pp. 599-601.
2. Малеева, Е.А., Бельснер, О.А, Крицкий, О.Л. Формирование портфеля ценных бумаг с использованием предельной величины риска // Финансы и кредит. – 2018. – Т. 24., № 12. – С. 2708–2720.

**К СОЗДАНИЮ ПРИКЛАДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ
КОГНИТИВНОЙ СФЕРЫ ПАЦИЕНТОВ С НЕВРОЛОГИЧЕСКОЙ ПАТОЛОГИЕЙ**

В.Б. Обуховская^{1,2}

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.Е. Янковская^{1,3}, профессор, д.п.н. Э.И. Мещерякова¹

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Сибирский государственный медицинский университет,

Россия, г. Томск, Московский тракт, 2, 634050

³Томский государственный архитектурно-строительный университет

Россия, г. Томск, пл. Соляная, 2, 634003

E-mail: diada1991@gmail.com, ayyankov@gmail.com, mei22@mail.ru

**TO THE CREATION OF APPLIED INTELLIGENT SYSTEM OF DIAGNOSTICS OF COGNITIVE
SPHERE OF PATIENTS WITH NEUROLOGICAL DISORDERS**

V.B. Obukhovskaya^{1,2}

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.E. Yankovskaya^{1,3}, Prof., Dr. E.I. Mescheryakova¹

¹National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Siberian Medical University, Russia, Tomsk, Moskovskiy tr., 2, 634050

³State University of Architecture and Building, Russia, Tomsk, Solyanaya Sq., 2, 634003

E-mail: diada1991@gmail.com, mei22@mail.ru, ayyankov@gmail.com

Abstract. *The publication is devoted to the creation of an applied intelligent diagnostic system of the cognitive sphere for patients with neurological pathology (IS DIAKOS.) The applied IS DIAKOS is constructed on the basis of the intelligent instrumental tool IMSLOG and is based on test methods of the pattern recognition, fault-tolerant mixed diagnostic tests. The application of the applied IS DIAKOS will allow: to reveal various kinds of regularities in the cognitive sphere of patients; make diagnostic decisions and justify them using graphical, including cognitive, tools. The above mentioned is of great importance for the prediction of rehabilitation activities.*

Введение. Не вызывает сомнения необходимость создания интеллектуальных систем (ИС) в области медицины, психологии, биологии, экобиомедицины и др. Актуальность создания и применения прикладной ИС диагностики когнитивной сферы (ДИАКОС) связана с тем, что около 10% населения планеты старше 60 лет подвержены физическим и когнитивным нарушениям, большинство из которых страдает неврологическими болезнями и заболеваниями, осложнёнными неврологической патологией [1, 2].

Когнитивные нарушения в контексте неврологической патологии на настоящий момент являются одними из социально-значимых проблем, поскольку представляют опасность как для социальной, так и для экономической стабильности современного общества. Особенно актуальна разработка прикладной ИС диагностики в связи с тем, что большинство людей не осознаёт подверженность этим нарушениям. Настоятельная необходимость своевременного и быстрого принятия диагностических решений, а также обоснования этих решений с использованием графических, включая когнитивные, средств, определяет целесообразность применения ИС для выявления людей группы риска, подверженных возникновению когнитивных нарушений и дефицитов.

Матричное представление данных и знаний в прикладной ИС ДИАКОС. Прикладная ИС ДИАКОС основана на матричной модели представления данных и знаний, включающей целочисленную матрицу описаний Q и матрицу различений R [3], в целях построения которых проведена нами структуризация данных и знаний. Строки матрицы Q сопоставлены обучающим объектам (пациентам с неврологической патологией – болезнь Паркинсона, рассеянный склероз, остеохондроз позвоночника, последствия инсульта, головокружения и нарушения устойчивости). Столбцы матрицы Q сопоставлены характеристическим признакам (ХП) когнитивной сферы.

Элемент q_{ij} матрицы Q задает значение j -го признака для i -го объекта. Если значение признака несущественно для объекта, то данный факт отмечается прочерком ("–") в соответствующем элементе матрицы Q . Для каждого признака z_j , $j=\{1,2,\dots, m\}$ задается либо интервалы изменения его значений, либо целочисленное значение. Строки матрицы R сопоставлены строкам матрицы Q , столбцы – классификационным признакам (КП), разбивающим обучающие объекты на классы эквивалентности [4]. Множество всех неповторяющихся строк матрицы различений сопоставлено множеству выделенных образов, представленных одностолбцовой матрицей R' , элементами которой являются номера образов. Отметим, что данная модель позволяет представлять не только данные, но и знания экспертов, поскольку одной строкой матрицы Q можно задавать в интервальной форме (с использованием значения прочерк "–") подмножество объектов, для которых характерно одно и то же итоговое решение, задаваемое соответствующей строкой матрицы R .

Согласно вышеприведенной матричной модели осуществлена структуризация данных и знаний в области клинической психологии. Строки матрицы Q представляют собой различные комбинации значений целочисленных ХП. Предлагается преобразование символьных характеристических признаков в целочисленные. В число ХП входят ХП: $z1-z5$ – ориентировка во времени (5 целочисленных признаков); $z6-z10$ – ориентировка в месте/пространстве (5 целочисленных признаков); $z11- z13$ – гнозис (3 целочисленных признака); $z14- z18$ – внимание и счет (5 целочисленных признаков); $z19-z21$ – память (3 целочисленных признака); $z22-z24$ – речь (3 символьных признака); $z25-27$ – последовательность выполнения действий (3 целочисленных признака); $z28-z29$ – чтение (2 символьных признака); $z30$ – оптико-пространственные представления (1 целочисленный признак).

Приведём классификационные признаки для матрицы R диагностического типа. Число КП равно 4: 1-ый КП –сохранность/нарушение когнитивной сферы (2 значения); 2-ой КП – градация когнитивных нарушений (4 значения: 1 – преддементные когнитивные нарушения; 2 – деменция легкой степени выраженности; 3 – деменция умеренной степени выраженности; 4 – тяжелая деменция); 3-ий КП – сфера, в которой наблюдается нарушения (9 значений: 1 – ориентировка во времени; 2 – ориентировка в месте/пространстве; 3 – гнозис; 4 – внимание и счет; 5 – память; 6 – речь; 7 – последовательность выполнения действий; 8 – чтение; 9 – оптико-пространственные представления); 4-ый КП – степень нарушения в дефицитарной сфере (от 2-х до 5-и степеней в зависимости от дефицитарной сферы: 1 – легкая; 2 – средняя; 3 – умеренная; 4 – тяжёлая; 5 – глубокая).

Количество строк матрицы Q равно 200 – размеру обучающей выборки. Количество столбцов матрицы Q равно 30. Количество строк матрицы R равно 200, а количество столбцов равно 4.

Поскольку рамки доклада ограничены, не представляется возможным представить даже фрагмент матриц Q и R . В связи с этим приведём пример матричного представления данных и знаний (рисунок 1).

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 4 & 5 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & - & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Рис. 1. Матричное представление данных и знаний

Распознаваемый (исследуемый) субъект представляется совокупностью значений характеристических признаков. База данных и знаний будет создана на основе результатов исследования 200 пациентов с неврологической патологией, находящийся на лечении в клиниках неврологического профиля.

Краткое описание математических основ прикладной ИС ДИАКОС. Прикладная ИС ДИАКОС основана на выявлении различного рода закономерностей, логико-комбинаторных тестовых методах распознавания образов, принятия и обоснования решений с применением когнитивных средств. В прикладной ИС ДИАКОС используется диагностическая схема клинко-психологического опросника, состоящего из 30 вопросов и включающий оценку когнитивных нарушений в соответствии со стадиями деменции: 1 – отсутствие (от 28 до 30 признаков); 2 – преддементные когнитивные нарушения (от 24 до 27 признаков); 3 – деменция легкой степени выраженности (от 20 до 23 признаков); 4 – деменция умеренной степени выраженности (от 11 до 19 признаков); 5 – тяжёлая деменция (от 0 до 10 признаков). Анализ признаков позволит проводить диагностику по выявлению когнитивных нарушений на каждой стадии.

В основе опросника лежит диагностические критерии международного классификатора болезней МКБ-10 [5] и концепция Folstein M.F., Folstein S.E., McHugh P.R. [6], учитывающая степень усиления (выраженности) симптомов (признаков), которая существенно влияет на результат принятия достоверных решений. Такая детализация позволяет сделать диагностику более точной и дать качественную интерпретацию состояния обследуемого. Для постановки диагноза учитывается только отсутствие или наличие симптома.

Прикладная ИС ДИАКОС реализует следующие функции: ввод анкетных данных об обследуемом; извлечение признаков с целью выявления особенностей когнитивной сферы на каждой из пяти стадий деменции, а также принятие итоговых диагностических решений и их обоснование с применением средств когнитивной графики, формирование заключения по диагностическим решениям. Анализируя полученные результаты, система диагностирует наличие одной из пяти стадий дементивного процесса и выявляет когнитивный дефицит в одной из высших психических функций. Предложено использовать соответствующее особенностям когнитивной сферы то или иное количество ХП, отсутствие или низкие показатели которых свидетельствуют о том, что у обследуемого присутствуют особенности нарушения когнитивной сферы.

Прикладная система ИС ДИАКОС конструируется на базе интеллектуального инструментального средства ИМСЛОГ [4].

Взаимодействие с пользователем организовано в виде интеллектуального интерфейса с применением средств когнитивной графики на этапе ввода анкетных данных об обследуемом и при извлечении значений признаков по диагностике когнитивной сферы с целью выявления когнитивного

дефицита, а также на этапах обоснования диагностических решений, вывода с применением когнитивных средств и формирования заключения по диагностическим решениям.

Заключение. Впервые предложена матричная модель представления данных и знаний в области клинической психологии и проведена оригинальная структуризация данных и знаний. Прикладная ИС ДИАКОС позволяет диагностировать наличие или отсутствие признаков деменции на основе упрощенных критериев диагностики. Для принятия и обоснования решений предложено использование конструируемой на базе интеллектуального инструментального средства ИМСЛОГ прикладной ИС ДИАКОС, целесообразность применения которой в практическом здравоохранении обусловлена необходимостью качественно, быстро и своевременно принимать диагностические решения, обосновывать эти решения с использованием графических, включая когнитивные, средств.

Преимуществами предлагаемой прикладной ИС является её достоверность и качество результатов, простота использования, экономичность затрат временных и человеческих ресурсов. Прикладная ИС ДИАКОС позволит своевременно определять и снабжать специалиста информацией о состоянии и особенностях когнитивной сферы пациентов с неврологической патологией. Включение прикладной ИС ДИАКОС в геоинформационные системы (ГИС) позволит существенно расширить их возможности. Дальнейшие исследования связаны с включением математического аппарата нечеткой и пороговой логики в целях расширения возможностей прикладной ИС ДИАКОС.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 18-313-00195мол_а, № 18-013-00937а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neurological disorders: public health challenges. WHO Library Cataloguing-in-Publication Data: World Health Organization; 2006. 232 p.
2. Pollack M. E. Intelligent Technology for an Aging Population: The Use of AI to Assist Elders with Cognitive Impairment. AI magazine, 2005. – Vol. 26. – No 2. –Pp. 9-24.
3. Янковская А.Е. Логические тесты и средства когнитивной графики. Издательский Дом: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2011. – 92 с.
4. Yankovskaya A.E., Gedike A.I., Ametov R.V., Bleikher A.M. IMSLOG-2002 Software Tool for Supporting Information Technologies of Test Pattern Recognition. Pattern Recognition and Image Analysis. – 2003. – Vol. 13. – No. 2. – pp. 243-246.
5. МКБ-10 (Международная статистическая классификация болезней). Московский центр ВОЗ. – М: Медицина, 2003. – 924 с.
6. Folstein M.F., Folstein S.E., McHugh P.R. "Mini-mental state". A practical method for grading the cognitive state of patients for the clinician. Journal of psychiatric research, 1975. – Vol. 12 (3). – Pp. 189—98.

ВСТРАИВАЕМЫЙ ЧАТ-БОТ В ГОТОВЫЕ КОРПОРАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Г.С. Чурсин, Н. И. Исмоилов, А. В. Доржиев

Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н. М.Е. Семенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: genachursin@yandex.ru

EMBEDDED CHATBOT IN READY CORPORATE SYSTEMS

G. S. Chursin, N. I. Ismoilov, A. V. Dorzhiev

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD M. E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: genachursin@yandex.ru

Abstract. In this paper, we consider a corporate chat-bot that can reply to various user commands and uses natural language processing. Moreover, the most common employee's working processes were automated. Our solution can work under any corporate local or global networks. The chat-bot prototype is presented as result.

Введение. В настоящее время идет активное развитие и внедрение интеллектуальных помощников – чат-ботов, которые способны выполнять различные рутинные офисные задачи (поиск информации, первичная обработка данных, консультационная поддержка и оповещение пользователей) получая от пользователей запросы на естественном языке [1]. Распространение и использование чат-ботов привело к парадигме пользовательского взаимодействия messaging-as-an-interface [2]. Наиболее используемой платформой для построения чат-ботов является приложение Telegram, кроме этого отметим также платформы – IBM Watson (IBM), LUIS (Microsoft), Api.ai (Google), Wit.ai (Facebook). Однако, интеграция чат-бота, разработанного с использованием указанных платформ, во внутрикорпоративных системах сталкивается с определенными сложностями, так как в приложении используются скрытые протоколы сбора информации. В связи с чем возникает актуальная задача – разработка компьютерной программы для роботизации бизнес-процессов с использованием только открытого бесплатного программного обеспечения с исходным кодом. Целью данной работы является разработка прототипа чат-бота для интеграции в информационную систему предприятия. Для достижения поставленной цели необходимо последовательно решить следующие задачи:

- а) провести анализ существующих технологий и составить алгоритм работы чат-бота;
- б) разработать библиотеку для обработки естественного языка;
- в) разработать консольный прототип чат-бота;
- г) провести тестирование компонент чат-бота.

Анализ задачи и используемые инструменты. Сотрудники предприятия ежедневно сталкиваются с решением формализованного перечня круга задач. Регулярные потери времени на выполнение рутинных задач, обучение персонала, необходимость поддерживать библиотеки данных, использование перегруженных информацией интерфейсов снижает экономическую эффективность бизнес-процессов. Разработка и внедрение чат-бота позволит автоматизировать решение указанных

задач. Анализ литературы и предметной области позволил сформулировать к чат-боту следующие критерии. Чат-бот должен быть адаптируемым под существующие корпоративные решения, обладать безопасным доступом к информационным ресурсам компании, иметь интуитивно понятный интерфейс пользователя. Создание платформы по обработке команд пользователей может быть реализовано на языке программирования Python или Java, в качестве системы управления базой данных могут быть использованы PostgreSQL, MongoDB или SQLite.

Для разработки чат-бота нами были выбраны следующие программные инструменты.

– Django, Javascript – разработка веб-интерфейса администратора. Административная панель позволяет разграничить права доступа пользователей, настроить периодичность создания архивов, восстановить историю диалогов, планировать и выполнять профилактические работы, отслеживать действия пользователей.

– PostgreSQL – свободная объектно-реляционная система управления базой данных для хранения истории диалогов и запросов.

– Rocket.chat – кроссплатформенное приложение с открытым исходным кодом для корпоративных чатов.

– Natural Language Toolkit (NLTK) библиотека на языке Python для предварительной обработки (токенизация, стемминг, удаление шума и стоп-слов), анализа и выделения ключевых слов пользовательских запросов [3]. На основе этой библиотеки можно проводить лингвистический анализ предложений, то есть выделять ключевые слова и делать предположения о том, какой запрос поступает от пользователя.

– ChatterBot – библиотека генерации ответов на основе машинного обучения [4]. В базу загружаются диалоги на естественном языке. На основе этих диалогов проводится анализ ответов на различные запросы. В последующем, в ходе общения с пользователем, ChatterBot использует образцы этих диалогов для формирования собственных ответов.

Алгоритм готовой системы выглядит следующим образом. Разработанные модули интегрируются в готовые корпоративные решения. В личный кабинет пользователя встраивается дополнительный раздел, где пользователь может получить секретный ключ для авторизации в Rocket.Chat. После регистрации появляется возможность использовать бота. К разработанной программе подключаются корпоративные базы данных, из которых пользователь может получать информацию. Для защищенности доступа к базам данных чат устанавливается на сервер компании.

Результаты. Разработан прототип чат-бота, который через интерфейс командной строки ведет диалог с пользователем на естественном языке. На рис. 1 приведен иллюстративный пример диалога, в ходе которого чат-бот отправил текстовое сообщение. Первая фраза пользователя содержит бытовую лексику с орфографическими ошибками. Для обработки текста были использованы функции `nltk.sent_tokenize()`, `nltk.word_tokenize()`. Для генерации ответов использована библиотека `chatterbot`.

Предварительная обработка текста позволила формализовать запрос пользователя, выделить ключевые слова, затем пользователю последовала команда, в ответ на которую пользователь указал адрес электронной почты. Указанный адрес был автоматически проверен и пользователь получил следующую команду. Текстовое сообщение было успешно отправлено с сохранением синтаксиса и пунктуации.

Тестирование разработанного чат-бота выявили проблемы с поддержкой русского языка: некорректно выделяются ключевые слова (до 80 %), в то время как при использовании английского языка ошибка составляет всего 10-20% в зависимости от сложности запроса. Вероятно, это связано с тем, что nltk не имеет официальной поддержки русского языка, а весь словарь собран сторонними разработчиками.

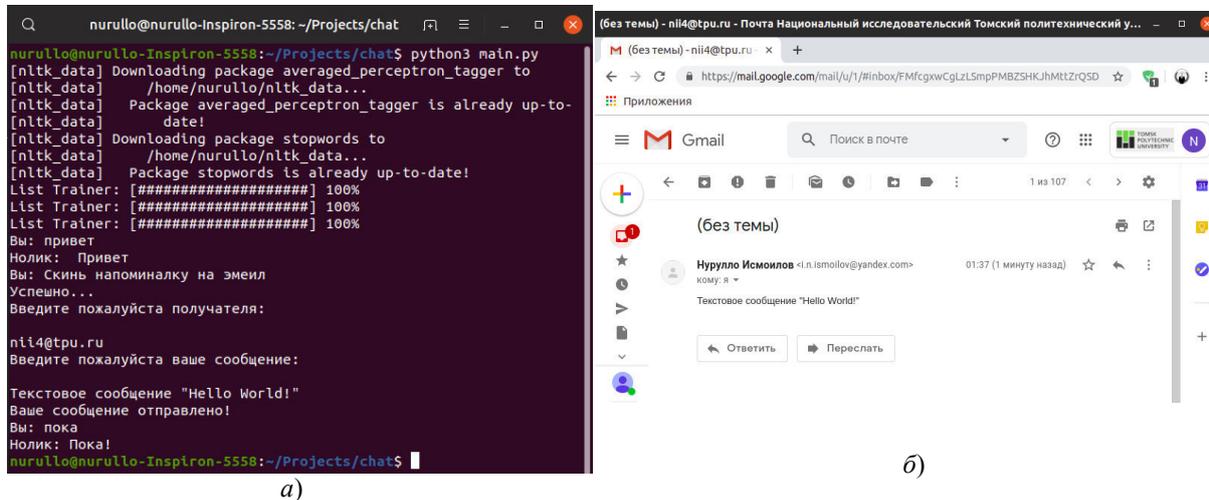


Рис. 1. Диалог с чат-ботом (а), результат отправки текстового сообщения (б)

Заключение. В ходе работы был разработан прототип чат-бота, который способен воспринимать запросы на естественном языке, выделять ключевые слова для выполнения требуемых операций. Выявлено узкое место – обработка запросов на русском языке, потому дополнительно к библиотеке nltk для лемматизации фраз мы использовали библиотеку rymorphy2. В дальнейшем мы планируем подключить к прототипу чат-бота платформу Rocket.Chat, что позволит существенно расширить функционал чат-бота и предоставить пользователю графический интерфейс для обработки как формализованных (справочная информация, юридические запросы), так и неформализованных (восстановление пароля, изменение контактной информации) запросов пользователей, повысить производительность труда и лояльность клиентов. Для генерации релевантных ответов планируется использовать математический аппарат Марковских цепей, что позволит генерировать уникальный текст при сохранении лексики исходного образца [5]. Кроме этого мы планируем реализовать подсистему резервного копирования и защиты от сбоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеева Н.Ю., Золотарюк А.В. Технологии создания и применения чат-ботов [Электронный ресурс]. // Научные записки молодых исследователей. – 2018. – №1. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologii-sozdaniya-i-primeneniya-chat-botov>
2. Чат-боты и искусственный интеллект в обучении // Журнал EduTech. – 2018. – № 6 (18).
3. NLTK. Официальная документация [Электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://github.com/nltk/nltk/wiki/FAQ>. Дата доступа 20.04.2019.
4. Chatterbot. Официальная документация [Электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://chatterbot.readthedocs.io/en/stable/index.html>. Дата доступа 20.04.2019.
5. Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В. Введение в общие цепи Маркова. Учебно-методическое пособие // Нижегородский госуниверситет – Нижний Новгород, 2013. – 51 с.

ПРОГРАММА ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

[САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#) Национального исследовательского Томского государственного университета приглашает дипломированных специалистов пройти программу повышения квалификации

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ПОЛУЧЕНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Направление 04.00.00 «Химия», 72 ч.

Модульная структура обучения:

Модуль 1: Новые подходы в получении и исследовании функциональных материалов

Модуль 2: Методы исследования структуры, состава и физико-химических свойств функциональных материалов

Профессиональные компетенции, формируемые в результате обучения:

- способность проводить научные исследования по сформулированной тематике, самостоятельно составлять план исследования и получать новые научные и прикладные результаты (ПК-1);
- владение теорией и навыками практической работы в избранной области химии (ПК-2);
- готовность использовать современную аппаратуру при проведении научных исследований (ПК-3);
- способность участвовать в научных дискуссиях и представлять полученные в исследованиях результаты в виде отчетов и научных публикаций (стендовые доклады, рефераты и статьи в периодической научной печати) (ПК-4).

Обучение в рамках образовательной программы реализуют ученые с высокой научной квалификацией из ведущих научных организаций РФ и зарубежья. Практическая часть курса проводится с использованием современного аналитического и исследовательского оборудования Томского регионального центра коллективного пользования и на базе структурных подразделений [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#).

КОНТАКТЫ

Руководитель программы: Курзина Ирина Александровна, д.ф.м.н., профессор кафедры физической и коллоидной химии ХФ, директор [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#), e-mail kurzina99@mail.ru.

Координатор программы: Мицкевич Юлия Сергеевна, менеджер учебного офиса [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#), e-mail yanson1@mail.ru.

АДРЕС

Россия, Томская обл., 634028, г. Томск, ул. А. Иванова, 49 (химический факультет ТГУ).
Запись по [ссылке](#).

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Сборник научных трудов
XVI Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

Том 3. Математика

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *С. А. Поробова*

Зарегистрировано в Издательстве ТПУ
Размещено на корпоративном портале ТПУ



Издательство

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ