ВЛИЯНИЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ВИХРЕВУЮ РЕШЕТКУ В МОДЕЛИ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

EFFECT OF THE INTERACTION NONLOCALITY ON THE VORTEX LATTICE IN THE GROSS-PITAEVSKII MODEL

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Abstract*. In this paper the triangular vortex lattice in the nonlocal Gross-Pitaevskii model with the phenomenological dissipation is studied. The numerical solutions in the rotating frame of reference are obtained for the delta-like interaction potential with different coefficients of nonlocality. The strongly nonlocal interaction results in the packing of vortices for the rotating frequency lower than in the local model. Also, the larger the coefficient of nonlocality, the larger size of the density holes of vortices while keeping their number constant.*

Введение. Множество теоретических и экспериментальных работ по бозе-эйнштейновскому конденсату (БЭК) в слабовзаимодействующих газах посвящены изучению вихревой решетки во вращающемся конденсате. Актуальность таких работ связана с тем, что подобный механизм образования вихрей присутствует и в сверхпроводниках второго рода (вихри Абрикосова). С физической точки зрения отличие заключается в том, что в сверхпроводниках мы наблюдаем вихревой ток куперовских пар, а в газах – вращение самого газа в состоянии сверхтекучести. Поэтому БЭК в газах представляет собой модельную систему для изучения вихревых свойств в сверхпроводниках (этот тезис был выдвинут в экспериментальной работе [1]). Математическое описание конденсированного состояния слабовзаимодействующего газа основано на модели Гросса-Питаевского. Формирование и свойства треугольной вихревой решетки в газах изучалось как на основе локальной модели (см., например, [2]), так и с учетом нелокального взаимодействия (см., например, [3]). Однако среди многочисленных работ по моделированию БЭК в газах остался неосвещенным вопрос о том, как именно нелокальность взаимодействия влияет на структуру вихрей. Этот вопрос представляет интерес не только с физической точки зрения, но и с математической. Данная работа посвящена поиску ответа на него.

Математическая модель вихревой решетки в бозе-конденсированном газе. Мы будем работать с нелокальным безразмерным уравнением Гросса-Питаевского вида

$$\left\{-i\partial_t - \Delta + V(\boldsymbol{r}) - \mu - \omega\hat{L}_z + \kappa \int_{\mathbb{R}^2} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho})\,|\Psi(\boldsymbol{\rho},t)|^2\, d\boldsymbol{\rho}\right\}\Psi(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1}$$

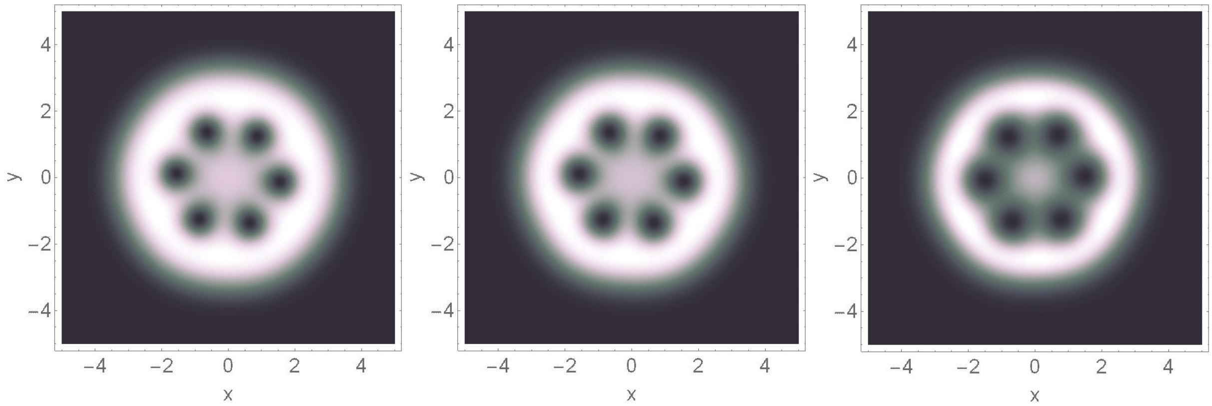
где Δ – символ Лапласа, κ – параметр нелинейности, $\boldsymbol{r}=(x,y)$ – радиус вектор, $\hat{L}_z$ – оператор момента импульса вдоль оси z, ω – скорость вращения системы координат, μ – химический потенциал. Квадрат модуля волновой функции $\left|\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2$ имеет смысл плотности газа. В качестве потенциала ловушки мы будем использовать $V(\boldsymbol{r})=r^2/4+r^4/16$ [4]. Слагаемое четвертой степени в потенциале ловушки было добавлено с целью наблюдения эффекта упаковки вихрей при достаточно больших скоростях вращения. В качестве потенциала взаимодействия мы возьмем дельта-образную функцию $W(\boldsymbol{R})=\dfrac{1}{\gamma^2\pi}\exp\left[\dfrac{-R^2}{\gamma^2}\right]$, которая при стремлении к нулю коэффициента нелокальности $\gamma\to 0$ переходит в дельта-функцию Дирака, а уравнение (1) вырождается в локальное:

$$\left\{-i\partial_t-\Delta+V(\boldsymbol{r})-\mu-\omega\hat{L}_z+\kappa\left|\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2\right\}\Psi(\boldsymbol{r},t)=0. \tag{2}$$

Несмотря на то, что вихревая решетка является точным решением уравнений (1), (2), перейти от невихревого начального состояния к вихревому, решая эти уравнения, мы не сможем. Для этого, во-первых, нужно нарушить цилиндрическую симметрию. Это можно сделать, задав несимметричное начальное условие, но так как нам хочется в начальный момент времени задать функцию $\Psi(\boldsymbol{r},0)$, являющуюся решением стационарного уравнения, мы поступим иначе. Зададим небольшую анизотропию в гармонической ловушке, взяв вместо $V_{harm}(\boldsymbol{r})=r^2/4$ функцию $V_{harm}(\boldsymbol{r})=\left(\varepsilon_x x^2+\varepsilon_y y^2\right)/4$, где числа $\varepsilon_x,\varepsilon_x$ – числа, на несколько сотых отличающиеся от единицы. Вторая загвоздка связана с тем, что переход от невихревого состояния к вихревому требует рассеяние энергии. В экспериментах по БЭК оно появляется естественным образом за счет столкновений конденсированных атомов с неконденсированными. Математически это рассеяние можно задать, введя феноменологическое затухание с малым параметром η, т.е. заменив в уравнениях (1), (2) слагаемое $-i\partial_t$ на $-(i-\eta)\partial_t$. Значение $\eta=0,03$ возьмем исходя из оценок [5], которые делались на основе сравнения с экспериментальными данными. Стоит отметить, что процесс образования вихревой решетки является термодинамически неравновесным, поэтому химический потенциал $\mu=\mu(t)$ меняется, пока система не достигнет установившегося режима. Закон изменения $\mu(t)$ определяется из условия сохранения нормы волновой функции $\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2 d\boldsymbol{r}$.

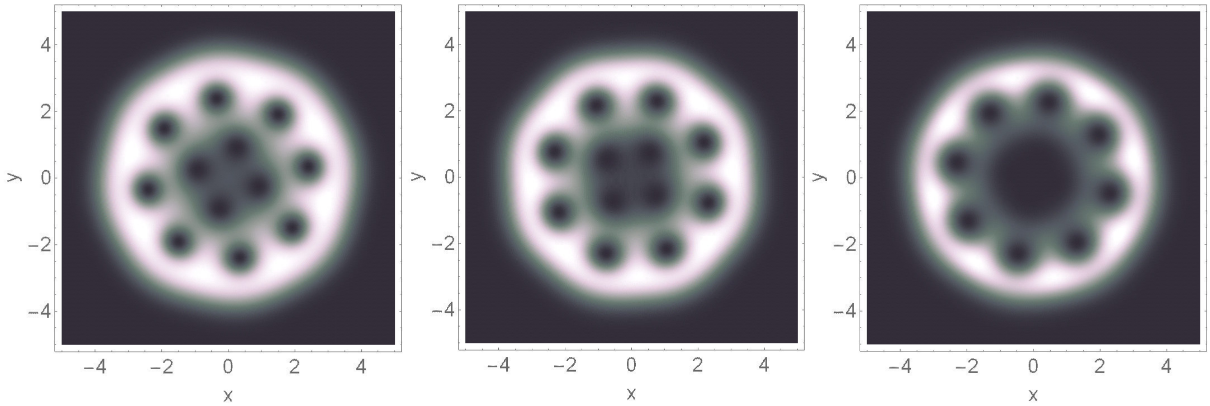
Уравнения (1), (2) решались численно с помощью метода операторного расщепления Странга-Марчука и разностной схемы Кранка-Никольсона. Коэффициент нелинейности принимался $\kappa=250$, а волновая функция нормировалась на единицу. На рис. 1, 2 представлены решения уравнений (1), (2) в установившемся режиме для разных скоростей вращения ω.

Обсуждение результатов. Рис. 1 демонстрирует, что увеличение коэффициента нелокальности приводит к увеличению размеров ямы плотности конденсата. При этом количество вихрей не меняется при увеличении нелокальности. На основании результатов, представленных на рис. 2, видно, что увеличение степени нелокальности взаимодействия приводит к упаковыванию нескольких вихрей. Такой эффект наблюдается и для локальной модели при увеличении скорости вращения БЭК (и, как следствия, увеличения количества вихрей), но наступает он при более высоких скоростях, чем для модели с сильной нелокальностью. Стоит отметить, что количество вихрей на рис. 2а–2в тоже остается равным. Упакованные вихри можно различить по наличию дефектов фазы волновой функции.



а) $\gamma \to 0$ б) $\gamma = 0,5$ в) $\gamma = 1$

Рис. 1. Зависимость плотности $\left|\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2$ *от* x, y *для* $\omega = 2$



а) $\gamma \to 0$ б) $\gamma = 0,5$ в) $\gamma = 1$

Рис. 2. Зависимость плотности $\left|\Psi(\boldsymbol{r},t)\right|^2$ *от* x, y *для* $\omega = 2,4$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abo-Shaeer J.R., Raman C., Vogels J.M., Ketterle W. Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates. Science. – 2001. – V.292., no. 5516. – pp. 476–479.
2. Tsubota M., Kasamatsu K., Ueda M. Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate // Physical Review A. – 2002. – V. 65., no. 2. – pp. 023603/1–023603/4.
3. Lashkin V.M., Yakimenko A., Zaliznyak Y. Stable three-dimensional vortex solitons in Bose–Einstein condensates with nonlocal dipole–dipole interaction. Physica Scripta. – 2009. – V. 79, no. 3. – pp. 035305/1–035305/5.
4. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate. Physical Review A. – 2002. – V. 66, no. 5. – pp. 053606/1–053606/4.
5. Choi S., Morgan S.A., Burnett K. Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensate. Physical Review A. – 2002. – V. 57., no. 5. – pp. 4057–4060.