8. Коннова Т.В., Лазарева Л.А., Беликова О.В., Мунтян И.А. Особенности учебного процесса с использованием симуляторов в СГМУ // Известия СНЦ РАН. – 2014. – Т. 16. – №5(4). – С. 1507–1510.
9. Шевченко Н.Н., Шевченко В.И. Организация интерактивной среды вуза как императив современного профессионального образования // Казанский педагогический журнал. – 2018 – №2 – С. 64 – 69
10. Баяндин Д.В. Электронная информационно-образовательная среда по физике в ПНИПУ: методические рекомендации для преподавателей. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. − 45 с.
11. Ларионова В.А. Создание интерактивной среды обучения на примере симулятора «Управление девелоперским проектом» // XI международная научно-методическая конференция «Новые образовательные технологии в вузе» – УрФУ, 2014. − 7 с.
12. Абдрахманова Г. И. и др. Что такое цифровая экономика? Тренды, компетенции, измерение: докл. к XX Апр. междунар. науч. конф. по проблемам развития экономики и общества. – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019.
13. Власов В. А., Вергун А. П., Дорофеева Л. И., Орлов А.А., Мышкин В.Ф. Подготовка специалистов по разделению изотопов в условиях совместной инновационной работы с предприятием // Совершенствование содержания и технологии учебного процесса: сборник трудов научно-методической конференции. – Томск, 2010. – С. 92–93.
14. Власов В. А., Дорофеева Л. И., Вергун А. П. Особенности компетентностного подхода при разработке магистерской программы по физике кинетических явлений / // Совершенствование содержания и технологии учебного процесса: сборник трудов научно-методической конференции. – Томск, 2010. – С. 179–181.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО С РАДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

А.Е. Кулагин, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

SEMICLASSICAL TRAJECTORY-COHERENT STATES OF THE NONLOCAL GROSS-PITAESVKII EQUATION WITH RADIAL SYMMETRY

A.E. Kulagin, A.Yu. Trifonov, A.V. Shapovalov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Annotation. *We construct the trajectory concentrated solutions of the nonlocal Gross-Pitaevskii equation with radial symmetry using the semiclassical formalism. In the polar coordinates, the applied method has some features, which are shown. The semiclassical trajectory-coherent states, concentrated on the ring, are obtained. The countable set of asymptotic solutions (semiclassical trajectory-coherent states) is obtained and its properties are discussed.*

Рассматривается нелокальное уравнение Гросса-Питаевского вида

$$\left\{-i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\hat{p}_\varphi, r, t) + \kappa\int_0^\infty\int_0^{2\pi} W(r,\rho,t)\left|\Psi(\rho,\phi,t)\right|^2 \rho d\rho d\phi\right\}\Psi(r,\varphi,t) = 0, \qquad (1)$$

где $\hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi$, $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\left(r\frac{\partial}{\partial_r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, κ – параметр нелинейности. Применительно к описанию Бозе-Эйнштейновского конденсата (БЭК) квадрат модуля волновой функции $|\Psi(r,\varphi,t)|^2$ имеет смысл плотности конденсата, оператор $V(\hat{p}_\varphi, r, t)$ описывает потенциальную энергию ловушки, в которой находятся БЭК, в заданной системе координат, а функция $W(r,\rho,t)$ отвечает потенциалу взаимодействия атомов БЭК (см. [1] и ссылки в нем). Из физической интерпретации функции $W(r,\rho,t)$ вытекает условие $W(r,\rho,t) = F(|r-\rho|,\rho,t)$, поэтому в дальнейшем ограничимся только такими функциями.

После отделения циклической переменной φ система Гамильтона-Эренфеста первого порядка, отвечающая классической траектории уравнения (1) принимает вид

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{m}P_r(t), \quad \dot{P}_r(t) = -V_r\left(P_\varphi, R(t), t\right), \quad P_\varphi = \mathrm{const}.$$

Квазиклассически приближенное с точностью $O(\hbar^{3/2})$ решение уравнения (1) имеет вид $\Psi(r,\varphi,t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}P_\varphi\varphi + \int_0^t \frac{1}{2m}\frac{P_r(\tau)}{R(\tau)}d\tau\right]\cdot\Phi(r,t)$, где $\Phi(r,t)$ принадлежит классу траекторно-сосредоточенных в точке $(p_r, r) = (P_r(t), R(t))$ фазового пространства функций [2] и является решением следующего линейного уравнения

$$\left\{-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2m}\left[P_r^2(t) + 2P_r(t)\cdot\Delta\hat{p}_r + (\Delta\hat{p}_r)^2\right] + \frac{P_\varphi^2}{2m}\left[\frac{1}{R^2(t)} - \frac{2}{R^3(t)}\cdot\Delta r + \frac{6}{R^4(t)}\cdot(\Delta r)^2\right] + \right.$$

$$+V(P_\varphi, R(t), t) + V_r(P_\varphi, R(t), t)\cdot\Delta r + \frac{1}{2}V_{rr}(P_\varphi, R(t), t)\cdot(\Delta r)^2 + \tag{2}$$

$$\left. +\tilde{\kappa}\left[\mathrm{W}(R(t), R(t), t) + \frac{1}{2}W_{\rho\rho}(R(t), R(t), t)\cdot\alpha^{0,2}(t) + \frac{1}{2}W_{rr}(R(t), R(t), t)\cdot(\Delta r)^2\right]\right\}\Phi(r,t,\varsigma) = 0,$$

$$\Delta r = r - R(t), \quad \Delta\hat{p}_r = -i\hbar\partial_r - P_r(t), \quad \tilde{\kappa} = \kappa\cdot\|\Psi\|^2, \quad \varsigma = \varsigma[\Psi] = \left(\alpha^{0,2}(0)\right).$$

Здесь $\|\Psi\|^2 = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Psi(r,\varphi,t)\,r\,dr\,d\varphi = \mathrm{const}$, а $\alpha^{0,2}(t)$ – дисперсия величины r, которая в квазиклассическом приближении определяется решением системы Гамильтона-Эренфеста второго порядка [3].

Уравнение (2) является линейным уравнением Шредингера, квадратичным по импульсу и координате. Его вакуумное состояние может быть найдено в виде $\Phi_0(r,t,\varsigma) = \frac{N_0}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(t,\varsigma) + P_r(t)\cdot\Delta r + \frac{1}{2}Q(t)\cdot(\Delta r)^2\right]\right\}$, где $\mathrm{Im}(S(t,\varsigma)) = 0$, $\mathrm{Im}(Q(t)) > 0$, а возбужденные состояния определяются формулой $\Phi_n(r,t,\varsigma) = N_n\cdot(W(t))^{n/2}\cdot H_n\left(\Delta r\sqrt{\frac{\mathrm{Im}Q}{\hbar}}\right)\cdot\Phi_0(r,t,\varsigma)$, где $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а $W(t)$ – импульсная часть решения системы в вариациях. Тогда для счетного набора функций $\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}P_\varphi\varphi+\int\limits_0^t\frac{1}{2m}\frac{P_r(\tau)}{R(\tau)}d\tau\right]\cdot\Phi_n(r,t,\varsigma_n)$, где $\varsigma_n=\varsigma[\Psi_n]$, выполняется соотношение

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)\Psi_k\left(r,\varphi,t\right)rdrd\varphi=\begin{cases}\left\|\Psi_n\right\|^2,\ n=k,\\ O\left(\sqrt{\hbar}\right),\ n\neq k.\end{cases}$$

Функции $\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)$ называются квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями уравнения (1).

Так как n-ый полином Эрмита имеют n нулей, то для n-ого квазиклассического траекторно-когеретного состояния характерно наличие $(n+1)$ колец в $O\left(\sqrt{\hbar}\right)$-окрестности окружности $r=R(t)$, на которых функция $\left|\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)\right|^2$ достигает локального максимума. Также в фазе волновых функций $\arg\left(\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)\right)$ присутствуют n колец, на которых происходит скачок фазы на π.

Построенный счетный набор асимптотических решений $\Psi_n\left(r,\varphi,t\right)$ непрерывно зависит от параметра нелинейности κ. Поэтому при $\kappa=0$ мы получаем набор асимптотических решений линейного уравнения. Однако в рамках рассмотренного формализма нельзя перейти к пределу $\gamma\to 0$, который соответствует локальному уравнению Гросса-Питаевского.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-700004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lewin M., Sabin J. The Hartree Equation for Infinitely Many Particles I. Well-Posedness Theory. // Comm. in Mathematical Physics. – 2014. – vol. 334. – no. 1. – Pp. 117–170.
2. Кулагин А.Е., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазичастицы, описываемые уравнением Гросса-Питаевского в квазиклассическом приближении. // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 5. – С. 20–29.
3. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. The evolution operator of the Hartree-type equation with a quadratic potential. // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2004. – vol. 37. – no. 16. – C. 4535–4556.