Естественные науки

УДК 514.76

О ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ 2-ПЛОСКОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n (n > 4)

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В статье инвариантным аналитическим и геометрическим образом строится поле двумерных плоскостей L_2^2, ассоциированных с двумерным многообразием центрированных 2-плоскостей L_2^1, так, что каждой плоскости L_2^1 отвечает вполне определённая плоскость L_2^2, принадлежащая соответствующей нормальной (n–2)-плоскости L_2^1. Рассматриваются отображения плоскости L_2^1 в плоскость L_2^2, которые определяются двумя квадратичными функциями двух переменных или соответствующими квадратичными функциями с областью определения L_2^1 и областью значений L_2^2. Для изучения указанных отображений привлекаются известные условия Коши-Римана. Все рассмотрения носят локальный характер, а все функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология в данной статье соответствует принятым в [1–5].

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается n-мерное эвклидово пространство E_n, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\bar{A},\bar{e}_j\}$ $(j,k,l=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}=\varpi^j e_j,\quad d\bar{e}_j=\varpi_j^k\bar{e}_k,$$
$$D\varpi^j=\varpi^k\wedge\varpi_k^j,\quad D\varpi_k^j=\varpi_k^l\wedge\varpi_l^j. \tag{1.1}$$

Здесь 1-формы ϖ_k^j удовлетворяют соотношениям

$$\varpi_k^j+\varpi_j^k=0, \tag{1.2}$$

которые, с учётом (1.1), вытекают из условия ортонормальности репера R:

$$(\bar{e}_k,\bar{e}_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1,\ k=j,\\ 0, k\neq j;\end{cases} \tag{1.3}$$

где символом $(\bar{a},\bar{b})$ обозначается скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пространства E_n.

1.2. В пространстве E_n рассматривается многообразие $V_{2,2}^1$ – двумерное многообразие центрированных двумерных плоскостей (2-плоскостей) L_2^1, в каждой из которых задано по одной точке M, называемой центром. К многообразию $V_{2,2}^1$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$M=A,\ L_2^1=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2). \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_p=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_p)$ обозначается p-плоскость (p-мерное линейное подпространство), проходящее через точку A параллельно линейно независимым векторам $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_p$. Из (1.4) в силу (1.1) следует, что дифференциальные уравнения многообразия $V_{2,2}^1$ запишутся в виде:

$$\varpi^{\hat\alpha}=A_\alpha^{\hat\alpha}\varpi^\alpha,\ \varpi_\alpha^{\hat\alpha}=A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\varpi^\beta,$$
$$(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n}). \tag{1.5}$$

Здесь 1-формы ϖ^α приняты за базисные, а величины $A_\alpha^{\hat\alpha}$ и $A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_\alpha^{\hat\alpha}-A_\beta^{\hat\alpha}\varpi_\alpha^\beta+A_\alpha^{\hat\beta}\varpi_{\hat\beta}^{\hat\alpha}=\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\varpi^\beta;$$
$$dA_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}-A_{\gamma\beta}^{\hat\alpha}\varpi_\alpha^\gamma-A_{\alpha\gamma}^{\hat\alpha}\varpi_\beta^\gamma+A_{\alpha\beta}^{\hat\beta}\varpi_{\hat\beta}^{\hat\alpha}=\tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat\alpha}\varpi^\gamma. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Из (1.2), (1.4) и (1.5) следует, что

$$\varpi_{\hat\alpha}^\alpha=-\varpi_\alpha^{\hat\alpha}\Rightarrow\varpi_{\hat\alpha}^\alpha=A_{\hat\alpha\beta}^\alpha\varpi^\beta, A_{\hat\alpha\beta}^\alpha=-A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}. \tag{1.7}$$

Геометрически это означает, что с многообразием $V_{2,2}^1$ в E_n инвариантным образом ассоциируется двумерное многообразие $V_{2,n-2}^2$, элементом которого является нормальная $(n-2)$-плоскость

$$L_{n-2}^2=(\bar{A},\bar{e}_3,\bar{e}_4,\ldots,\bar{e}_n)\perp L_2^1. \tag{1.8}$$

1.3. Характеристический элемент и фокусная поверхность $(n-2)$-плоскости L_{n-2}^2.

Каждой точке $A \in E_n$ сопоставим точку $X \in L_{n-2}^2$ с радиус-вектором

$$\overline{X} = \overline{A} + x^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha}. \qquad (1.9)$$

Из (1.9) с учётом (1.1), (1.5) и (1.7) находим

$$d\overline{X} = (\delta_\alpha^\beta + x^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha\alpha}^\beta)\varpi^\alpha\overline{e}_\beta + (\cdots)^{\hat\gamma}\overline{e}_{\hat\gamma}, \quad (1.10)$$

где символом $(\cdots)^{\hat\gamma}$ обозначены несущественные выражения. Из (1.10) следует, что $d\overline{X}$ будет линейно выражаться через линейно независимые векторы $\overline{e}_{\hat\gamma}$ $(\hat\gamma = \overline{3,n})$ тогда и только тогда, когда

$$(\delta_\alpha^\beta + x^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha\alpha}^\beta)\varpi^\alpha = 0. \qquad (1.11)$$

Если соотношения (1.11) выполняются при любых ϖ^α, то точка X будет описывать характеристический элемент Γ_{n-6} $(n-2)$-плоскости L_{n-2}^2, определяемый в локальных точечных координатах репера R системой четырёх линейных неоднородных уравнений с $(n-2)$-неизвестными

$$\Gamma_{n-6} : x^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha\alpha}^\beta = -\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, \alpha = \beta, \\ 0, \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$$x^\alpha = 0 \ (\alpha, \beta = 1,2;\ \hat\alpha = \overline{3,n}). \qquad (1.12)$$

Из (1.12) замечаем, что характеристический элемент $\Gamma_{n-6} \subset L_{n-2}^2$ существует в общем случае при

$$n-2 \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Если же соотношения (1.11) выполняются при некоторых ϖ^α, то

$$\det\left[\delta_\alpha^\beta + x^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha\alpha}^\beta\right] = 0, \qquad (1.13)$$

и в данном случае точка $X \in L_{n-2}^2$ будет являться фокусом [4] $(n-2)$-плоскости L_{n-2}^2 вдоль соответствующего фокального направления. Из (1.13) замечаем, что совокупность всех фокусов $X \in L_{n-2}^2$ представляет собой при $n \geq 6$ конус K_{n-3}^2 второго порядка с вершиной Γ_{n-6}, который определяется уравнениями:

$$K_{n-3}^2 : A_{\hat\alpha\hat\beta}x^{\hat\alpha}x^{\hat\beta} + A_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha} + 1 = 0, x^\alpha = 0, \quad (1.14)$$

где величины $A_{\hat\alpha\hat\beta}$ и $A_{\hat\alpha}$ определяются по формулам

$$A_{\hat\alpha} = A_{\hat\alpha\alpha}^\alpha,\ A_{\hat\alpha\hat\beta} = \frac{1}{2}(A_{(\hat\alpha|1|}^1 A_{\hat\beta)2}^2 - A_{(\hat\alpha|2|}^1 A_{\hat\beta)1}^2) \quad (1.15)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_{\hat\alpha} - A_{\hat\beta}\varpi_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = \overset{*}{A}_{\hat\beta\alpha}\varpi^\alpha,$$

$$dA_{\hat\alpha\hat\beta} - A_{\hat\gamma\hat\beta}\varpi_{\hat\alpha}^{\hat\gamma} - A_{\hat\alpha\hat\gamma}\varpi_{\hat\beta}^{\hat\gamma} = A_{\hat\alpha\hat\beta\gamma}\varpi^\gamma,$$

где явный вид величин, стоящих при ϖ^β, для нас несущественный.

Из (1.12) в силу (1.13–1.15) следует, что характеристический элемент Γ_{n-6} подпространства L_{n-2}^2 при $n \geq 6$ будет, как и следовало ожидать, вершиной конуса K_{n-3}^2.

Из (1.13) замечаем, что $(n-3)$-плоскость Γ_{n-3}, определяемая системой:

$$\Gamma_{n-3} : A_{\hat\alpha}x^{\hat\alpha} + 1 = 0,$$
$$x^\alpha = 0, (\alpha = 1,2;\ \hat\alpha = \overline{3,n}), \qquad (1.16)$$

является полярой точки A относительно K_{n-3}^2.

Заметим, что $\Gamma_{n-6} \subset \Gamma_{n-3} \subset L_{n-2}^2$.

2. Поле инвариантных двумерных плоскостей $L_2^2 \subset L_{n-2}^2$

2.1. Случай n=5.

В этом случае индексы $\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma$ изменяются в пределах

$$\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma = 3,4,5.$$

Из (1.12) и (1.14) следует, что 3-плоскость L_3^2 в общем случае при n=5 не имеет характеристического элемента, а K_3^2 будет являться не конусом, а фокусной квадрикой.

Проведём такую канонизацию ортонормального репера R в E_5, при которой

$$A_3 \equiv A_{31}^1 + A_{32}^2 = 0, A_4 \equiv A_{41}^1 +$$
$$+ A_{42}^2 = 0, A_5 \equiv A_{51}^1 + A_{52}^2. \qquad (2.1)$$

Из (1.5) с учётом (1.7) и (2.1) получаем, что 1-формы

$$\varpi_3^5 = A_{3\alpha}^5\varpi^\alpha,\ \varpi_4^5 = A_{4\alpha}^5\varpi^\alpha \qquad (2.2)$$

являются главными, причём величины $A_{a\alpha}^5 (a,b = 3,4)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_{a\alpha}^5 - A_{b\alpha}^5\varpi_a^b - A_{a\beta}^5\varpi_\alpha^\beta = A_{a\alpha\beta}^5\varpi^\beta, \qquad (2.3)$$

где явный вид величин $A_{a\alpha\beta}^5$ для нас несущественен.

Заметим с учётом (2.1–2.3), что указанная канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [5]. Из (1.16) следует, что при фиксации (2.2) плоскость

$$L_2^2 = (\overline{A}, \overline{e}_3, \overline{e}_4) \qquad (2.4)$$

проходит через точку A параллельно плоскости Γ_2 – поляре точки A относительно квадрики K_{n-3}^2. При этом из рассмотрения исключается случай $A_{\hat\alpha} = 0$, когда плоскость Γ_2 является несобственной. Из (2.4) следует, что прямая $l_1^5 = (\overline{A}, \overline{e}_5) \perp L_2^2$.

2.2. Случай n=6.

В этом случае индексы $\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma$ изменяются в пределах: $\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma = \overline{3,6}$.

Из (1.12) следует, что характеристическим элементом Γ_0 4-плоскости

$$L_4^2 = (\overline{A}, \overline{e}_3, \overline{e}_4, \overline{e}_5, \overline{e}_6)$$

является точка, координаты $x^{\hat\alpha}$ которой удовлетворяют системе четырёх линейных неоднородных уравнений с четырьмя неизвестными. Поэтому радиус-вектор этой точки имеет вид:

$$\Gamma_0 = \overline{A} + G^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha},\ (\hat\alpha = \overline{3,6}), \qquad (2.5)$$

где

$$G^{\hat\alpha} = \frac{g^{\hat\alpha}}{g}, g \neq 0. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$g = \det\left[A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\right], \tag{2.7}$$

где $\hat{\alpha}$ – номера столбцов, а пара $(\alpha\beta) = (11), (12), (22), (21)$ указывают на номера строк, причём $g^{\hat{\alpha}}$ – определитель четвёртого порядка матрицы $\left[g^{\hat{\alpha}}\right]$, которая получается из матрицы $[g]$ определителя g заменой столбца под номером $\hat{\alpha}$ столбцом

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обычным путём с использованием (1.1), (1.6) и (2.4–2.6) найдём, что величины $G^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dG^{\hat{\alpha}} - G^{\hat{\beta}}\varpi^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} = G^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\varpi^{\alpha}, \tag{2.8}$$

где явный вид величин $G^{\hat{\alpha}}_{\alpha}$ для нас несущественен.

Проведём в E_n канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$G^3 = G^4 = G^5 = 0, G^6 \neq 0, \tag{2.9}$$

в силу чего из (2.8) получаем

$$\varpi^6_{\tilde{a}} = A^6_{\tilde{a}\alpha}\varpi^{\alpha}, dA^6_{\tilde{a}\alpha} -$$
$$-A^6_{\tilde{b}\alpha}\varpi^{\tilde{b}}_{\tilde{a}} - A^6_{\tilde{a}\beta}\varpi^{\beta}_{\alpha} = A^6_{\tilde{a}\alpha\beta}\varpi^{\beta}, \tag{2.10}$$

$\tilde{a}, \tilde{b} = 3, 4, 5; \alpha, \beta = 1, 2.$

Из (2.4) следует, что при указанной канонизации репера R вектор $\bar{e}_6$ является направляющим вектором прямой $A\Gamma_0$. Поэтому прямая

$$l^6_1 = (\bar{A}, \bar{e}_6)$$

проходит через точку A параллельно вектору $\bar{e}_6$, а 3-плоскость

$$L_3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5) \perp l^6_1. \tag{2.11}$$

Проведём, наконец, такую дальнейшую канонизацию репера R, при которой имеют место соотношения (2.1), а, следовательно, и дифференциальные уравнения типа (2.2) и (2.3). Поэтому из (1.16) в силу (2.11) следует, что двумерная плоскость (1.8) проходит через точку A параллельно пересечению 3-плоскостей Γ_{n-3} и L_3. Заметим, с учётом (2.1–2.3) и (2.9–2.10), что указанные канонизации репера R существуют в соответствии с [5]. Отметим также, что при фиксации (2.9) из рассмотрения исключаются случаи: $a) g = 0$, когда точка Γ_0 либо не существует, либо она определяется не единственным образом; $b) G^6 = 0$, когда точка Γ_0 является бесконечно удалённой точкой.

2.3. Случай n>6.

Из (1.12) следует, что $(n-6)$-плоскость L_{n-6}, проходящая через точку A параллельно $(n-6)$-плоскости Γ_{n-6}, определяется системой четырёх линейных уравнений

$$L_{n-6} : x^{\hat{\alpha}} A^{\beta}_{\hat{\alpha}\alpha} = 0, x^{\alpha} = 0 \tag{2.12}$$

$(\hat{\alpha} = \overline{3,n}; \alpha, \beta = 1, 2)$, содержащей n–2 неизвестных $x^{\hat{\alpha}}$.

Проведём такую канонизацию ортонормального репера R в E_n (n>6), при которой

$$A^{\beta}_{\hat{\alpha}_2\alpha} = 0, g \neq 0 \ (\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1 = \overline{3,6}; \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2 = \overline{7,n}), \tag{2.13}$$

где определитель четвёртого порядка g определяется по формуле (2.7). Из (2.13) в силу (1.6) и (1.1) получаем

$$\varpi^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\alpha}_2} = A^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\alpha}_2\beta}\varpi^{\beta}, \varpi^{\beta}_{\hat{\alpha}_2} = 0, \tag{2.14}$$

причём величины $A^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\alpha}_2\beta}$ удовлетворяют конечным соотношениям:

$$A^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1 1}A^{\beta}_{\hat{\beta}_1 2} - A^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_2 2}A^{\beta}_{\hat{\beta}_1 1} = 0 \tag{2.15}$$

и внешним квадратичным уравнениям

$$(dA^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}_2\beta} - A^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\beta}_2\beta}\varpi^{\hat{\beta}_2}_{\hat{\alpha}_2} - A^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\alpha}_2\alpha}\varpi^{\alpha}_{\beta} + A^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_2\beta}\varpi^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\beta}_1}) \wedge \varpi^{\beta} = 0.$$

Из (2.12) следует, что канонизация репера R, осуществлённая по формулам (2.13) с учётом (2.14–2.15), существует в соответствии с [5] и геометрически характеризуется тем, что

$$L_{n-6} = (\bar{A}, \bar{e}_7, \ldots, \bar{e}_n). \tag{2.16}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A^{\beta}_{\hat{\alpha}\alpha} = 0, g = 0$, когда $\dim L_{n-6} \geq n - 6$.

Из (2.16) с учётом (1.3) заключаем, что определяется линейное подпространство

$$L^*_4 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6) \perp L_{n-6}. \tag{2.17}$$

Из (2.17) и (1.16) следует, что 4-плоскость L^*_4 пересекает $(n-3)$-плоскость Γ_{n-3} в точке с радиус-вектором (2.5). Поэтому дальнейшие рассуждения, связанные с определением 2-плоскости (2.4) такие же, как и в пункте 2.2 в случае n=6.

Итак, двумерная плоскость (2.4) в E_n при n>4 определена во всех случаях n=5, n=6 и $n \geq 7$. В случаях n=6 и n>7 с учётом (2.17) и (2.4) геометрически определяется двумерная плоскость

$$L^3_2 = (\bar{A}, \bar{e}_5, \bar{e}_6) \perp L^2_2.$$

3. Отображения $f, \varphi : L^1_2 \to L^2_2$

3.1. Отображения $f, \varphi : L^1_2 \to L^2_2$.

Каждой точке $A \in E_n$ сопоставим отображения f и φ плоскости L^1_2 в плоскость L^2_2, которые каждую точку $X \in L^1_2$ с радиус-вектором

$$\bar{X} = \bar{A} + x^{\alpha}\bar{e}_{\alpha} \tag{3.1}$$

переводит в новую точку $Y \in L^2_2$ с радиус-вектором

$$\bar{Y} = \bar{A} + y^{\hat{\alpha}_1}\bar{e}_{\hat{\alpha}_1}$$

$(\hat{\alpha}_1 = 3,4)$. Эти отображения определяются по формулам:

$$f: L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y^{\hat{\alpha}_1} = A_\alpha^{\hat{\alpha}_1} x^\alpha + B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} x^\alpha x^\beta,$$

$$\varphi: L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y^{\hat{\alpha}_1} = A_1^{\hat{\alpha}_1} x^2 - A_2^{\hat{\alpha}_1} x^1 +$$

$$+ B_{12}^{\hat{\alpha}_1} \left\{ \left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2 \right\} + \left(B_{11}^{\hat{\alpha}_1} - B_{22}^{\hat{\alpha}_1}\right) x^1 x^2, \quad (3.2)$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}_1} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}_1} + A_{\beta\alpha}^{\hat{\alpha}_1}\right). \quad (3.3)$$

Заметим, что каждое из отображений f и φ плоскостей L_2^1 и L_2^2, отвечающих точке $A \in \mathrm{E}_n$, определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому в соответствии с [3. С. 43–44] получаем, что каждое из указанных отображений определяется соответствующей комплекснозначной функцией с областью определения в комплексной плоскости $(z) \Leftrightarrow L_2^1\ (z = x^1 + ix^2)$ и с областью значений в комплексной плоскости $(w) \Leftrightarrow L_2^2\ (w = y^3 + iy^4)$:

$$f: L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow w = f(z) =$$

$$= G_{01} z + G_{02} \bar{z} + 2G_{12} z\bar{z} + G_{11} z^2 + G_{22} \bar{z}^2,$$

$$\varphi: L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow w = \varphi(z) = -iG_{01} z -$$

$$-iG_{02}\bar{z} + i\left(G_{11}\bar{z}^2 - G_{22} z^2\right), \quad (3.4)$$

где

$$G_{0\alpha} = g_{0\alpha} + ih_{0\alpha}, G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + ih_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha},$$

$$2g_{01} = A_1^3 + A_2^4, 2h_{01} = A_1^4 - A_2^3, 2g_{02} =$$

$$= A_1^3 - A_2^4, 2h_{02} = A_2^4 + A_1^4,$$

$$4g_{11} = B_{11}^3 - B_{22}^3 + 2B_{12}^4, 4g_{22} =$$

$$= B_{11}^3 - B_{22}^3 - 2B_{12}^4,\ 4h_{11} = -2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4,$$

$$4h_{22} = 2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4,\ 4g_{12} =$$

$$= B_{11}^3 + B_{22}^3,\ 4h_{12} = B_{11}^4 + B_{22}^4. \quad (3.5)$$

3.2. Геометрический смысл отображений $f, \varphi: L_2^1 \to L_2^2$.

Рассмотрим кривую $K_0(t)$, описываемую точкой $A \in \mathrm{E}_n$ и определяемую дифференциальными уравнениями:

$$K_0(t): \varpi^\alpha = t^\alpha \Theta, D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1. \quad (3.6)$$

Из (1.1) в силу (1.5) следует, что прямая

$$t = (\bar{A}, (\bar{e}_\alpha + A_\alpha^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}}) t^\alpha) = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha + A_\alpha^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}}) t^\alpha \quad (3.7)$$

$(\hat{\alpha} = \overline{3,n})$ касается кривой (3.6) в точке A.

В силу (1.4), (1.8), (2.4) и (3.7) заключаем, что прямая

$$\hat{t} = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha) t^\alpha \quad (3.8)$$

является проекцией прямой t на плоскость L_2^1 в направлении $(n-2)$-плоскости L_{n-2}^2.

Определение 3.1. Точка $X \in L_2^1$ с радиус-вектором (3.1), отвечающая точке $A \in \mathrm{E}_n$, и кривая $K_0(t)$ называются;

a) соответствующими, если прямая AX параллельна прямой $\hat{t}$,

b) ассоциированными, если прямая AX перпендикулярна прямой $\hat{t}$.

Из (3.6–3.8) и определения 3.1 замечаем, что точка $X \in L_2^1$ и кривая $K_0(t)$ будут соответствующими и ассоциированными тогда и только тогда, когда

$$\frac{\varpi^1}{x^1} = \frac{\varpi^2}{x^2} \Leftrightarrow t^\alpha = \lambda x^\alpha,\ (\lambda \neq 0), \quad (3.9)$$

$$\frac{\varpi^1}{x^2} = -\frac{\varpi^2}{x^1} \Leftrightarrow t^1 = \lambda x^2, t^2 = -\lambda x^1,\ (\lambda \neq 0) \quad (3.10)$$

соответственно.

Из (3.1) в силу (1.1) и (1.5) получаем

$$d\bar{X} = (\cdots)^\alpha \bar{e}_\alpha + \left(A_\beta^{\hat{\alpha}} + x^\alpha A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\right) \varpi^\beta \bar{e}_{\hat{\alpha}}.$$

Поэтому в силу (3.3) и (3.6–3.10) прямая, определяемая векторным параметрическим уравнением

$$\bar{Y} = \bar{A} + \lambda y^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}, (\hat{\alpha}_1 = 3,4),$$

где $y^{\hat{\alpha}_1}$ определяются по формулам (3.2), есть пересечение плоскости L_2^2 с линейным подпространством, проходящим через L_2^1, L_{n-6} и касательную к линии, описываемой точкой $X \in L_2^1$ вдоль соответствующей (ассоциированной) в смысле определения 3.1 кривой.

Заметим, что в случае n=5 роль L_{n-6} играет прямая l_1^5, а в случае n=6 роль L_{n-6} играет плоскость (2.17). Заметим также, что точка $X \in L_2^1$ не является фокусом плоскости L_2^1 в смысле [4], а кривая $K_0(t)$ не является соответствующей фокальной кривой.

В соответствии с [3. С. 75–76] и с учётом (3.3–3.5) получаем, что каждая из комплекснозначных функций будет дифференцируемой в соответствующей точке $F_d, \Phi_d \in L_2^1$ тогда и только тогда, когда координаты $(x^1; x^2) \Leftrightarrow z = x^1 + ix^2, i^2 = -1$, удовлетворяют системам, соответственно:

$$F_d: \begin{cases} \left(B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3\right) x^\beta = g_{02}, \\ \left(B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4\right) x^\beta = -h_{02}, \end{cases} x^{\hat{\beta}} = 0;$$

$$\Phi_d: \begin{cases} h_{22} x^1 - g_{22} x^2 = -\frac{1}{2} h_{02}, \\ g_{22} x^1 + h_{22} x^2 = -\frac{1}{2} g_{02}, \end{cases} x^{\hat{\beta}} = 0. \quad (3.11)$$

Определение 3.2. Отображения $f, \varphi: L_2^1 \to L_2^2$, у которых определяющие их функции $y^{\hat{\alpha}_1}$ являются гармоническими, называются гармоническими и обозначаются f_Γ, φ_Γ соответственно.

Из (3.2) с учётом (3.5) следует, что гармонические отображения f_Γ и φ_Γ определяются соотношениями:

$$f_r: L_2^1 \to L_2^2: B_{11}^{\hat{\alpha}_1} + B_{22}^{\hat{\alpha}_1} = 0, (\hat{\alpha}_1 = 3,4),$$

$$\varphi_r: L_2^1 \to L_2^2: h_{22} = 0, g_{22} = 0. \quad (3.12)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.1. Точки F_d и Φ_d плоскости L_2^1 отвечающие точке $A \in E_n$, совпадают.

Доказательство. Прежде всего заметим, что во всех случаях n=5, n=6 и $n \geq 7$ выполняются соотношения типа (2.1):

$$A^1_{\hat{\alpha}_1 1} + A^2_{\hat{\alpha}_1 2} = 0, (\hat{\alpha}_1 = 3,4),$$

которые в силу (3.4) и (1.6) приводят к соотношениям

$$B^{\hat{\alpha}_1}_{11} + B^{\hat{\alpha}_1}_{22} = 0. \quad (3.13)$$

Из (3.11) в силу (3.3), (3.5) и (3.13) получаем, что координаты x^1 и x^2 точек F_d и Φ_d определяются одной и той же системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \left(B^3_{12} + B^4_{11}\right)x^1 + \left(B^3_{22} + B^4_{12}\right)x^2 = A^3_2 + A^4_1 \\ \left(B^3_{22} + B^4_{12}\right)x^1 - \left(B^3_{12} + B^4_{11}\right)x^2 = A^3_1 - A^4_2 \end{cases}, \quad (3.14)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. Отображение $f : L_2^1 \to L_2^2$, отвечающее точке $A \in E_n$, является отображением f_Γ.

Доказательство этой теоремы вытекает из (3.12) и (3.13).

Теорема 3.3. Отображение $\varphi : L_2^1 \to L_2^2$, отвечающее точке $A \in E_n$, будет отображением φ_Γ тогда и только тогда, когда точка $F_d \in L_2^1$ (или $\Phi_d \in L_2^1$) является бесконечно удалённой точкой.

Доказательство этой теоремы вытекает из (3.12–3.14) в силу (3.5).

Замечание. Случай n=4 будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
2. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
3. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.
4. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга *r* // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

УДК 530.12:531.51

ИЗЛУЧЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО АТОМА

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-415-877

Разработан гравитационный аналог нестационарной теории возмущений и на этой основе исследован процесс рождения массивных квантов скалярного поля гравитационным атомом.

В инфляционной космологии считается, что вся остальная материя во Вселенной порождается переменным скалярным полем подобно тому, как переменное электрическое поле может рождать электрон-позитронные пары [1, 2].

В данной работе исследуется альтернативный механизм рождения материи, подобный спонтанному излучению гравитационного атома.

1. Нестационарная теория возмущений

Согласно [3] стационарное квантовое уравнение, описывающее гравитационный атом без учета спина эффективных частиц, имеет вид

$$\hat{H}_0 \Psi_n(a) = M_p a E_n \Psi_n(a), \quad (1)$$

где

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hat{\pi}^2}{2M_p} + M_p a V U_0,$$

$$U_0 < 0, \quad V = \frac{4\pi a^3}{3},$$

$$E_n = -4\omega\left[n + \frac{1}{3}\right], \quad \hat{\pi} = -i\frac{\partial}{\partial a},$$

$$\Psi_n = N\exp\left(-\frac{x}{2}\right) n! L_n^{(\nu)}(x),$$

$$x = 2\alpha\xi, \quad \xi = \frac{a^3}{6},$$