

О РАСЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Г.Е. ПУХОВ, С.П. АМОСОВА

Ниже рассматривается вопрос о расчете электрических цепей с такими нелинейными элементами, присутствие которых не ведет к заметному отклонению режима работы цепи от синусоидального, и показывается, что при наличии вольт- и фазоамперных характеристик элементов расчет может быть произведен по методу итерации.

В отличие от способов расчета, предлагаемых в [1–5], метод итерации позволяет, в случае сходимости процесса, рассчитать цепь со сколь угодно сложной конфигурацией и содержащей любое число нелинейных элементов.

1. Пусть цепь содержит n нелинейных элементов, свойства каждого из которых заданы вольт- и фазоамперными характеристиками:

$$\begin{aligned} U_k &= U_k(I_k) \\ \varphi_k &= \varphi_k(I_k) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где U_k и I_k – действующие значения напряжения и тока, k -того нелинейного элемента, а φ_k – угол сдвига фаз между синусоидами u_k и i_k .

Характеристики (1.1) для данного значения тока $I_{k(s)}$ определяют комплекс сопротивления нелинейного элемента:

$$\begin{aligned} Z_{k(s)} &= Z_{k(s)} e^{j\varphi_{k(s)}}, \\ Z_{k(s)} &= \frac{U_{k(s)}}{I_{k(s)}} = Z_{k(s)}(I_{k(s)}), \\ \varphi_{k(s)} &= \varphi_{k(s)}(I_{k(s)}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Режим цепи, соответствующий токам $I_{k(s)}$, может быть описан системой уравнений.

$$I_{k(s)} = \sum_{l=1}^m Y_{kl(s)} \dot{\mathcal{E}}_l, \quad (1.3)$$

где m – число источников с э.д.с. $\dot{\mathcal{E}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Коэффициенты уравнений (1.3) зависят от токов $I_{k(s)}$, т.е.

$$Y_{kl(s)} = Y_{kl(s)}(Z_{1(s)}, Z_{2(s)}, \dots, Z_{n(s)}). \quad (1.4)$$

Поэтому определение токов I_k по методу итерации можно вести на основе расчётных уравнений:

$$\dot{I}_{k(s+1)} = \sum_{l=1}^m Y_{kl(s)} \dot{\mathcal{E}}_l, \quad \begin{aligned} &(k = 1, 2, \dots, n) \\ &(s = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Задаваясь абсолютными значениями токов $I_{k(0)}$, по характеристикам (1.1) и выражениям (1.2) находят комплексы сопротивлений $Z_{k(0)}$ нелинейных элементов. Подставляя последние в уравнения (1.5), находят токи $I_{k(1)}$. По абсолютным величинам этих токов определяют новые значения комплексов сопротивлений $Z_{k(1)}$ и т.д.

Расчет ведется до тех пор, пока токи $I_{k(s+1)}$ и $I_{k(s)}$ не окажутся почти одинаковыми, т.е. $I_{k(s+1)} \sim I_{k(s)}$. Как показывают расчёты, процесс итерации хорошо сходится для таких нелинейных элементов, сопротивления которых с увеличением проходящего через них тока уменьшаются. Когда же сопротивления увеличиваются, целесообразно выражения (1.5) преобразовать в уравнения

$$\dot{U}_{k(s+1)} = \sum_{l=1}^m a_{kl(s)} \dot{\mathcal{E}}_l, \quad \begin{aligned} &(k = 1, 2, \dots, n) \\ &(s = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которых U_k – напряжения на нелинейных элементах.

В тех случаях, когда часть элементов имеет характеристики первого рода, а другая второго, расчетные уравнения следует преобразовать к виду:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1(s+1)} \\ \dot{U}_{2(s+1)} \\ \vdots \\ \dot{U}_{q(s+1)} \\ \dot{I}_{q+1(s+1)} \\ \vdots \\ \dot{I}_{n(s+1)} \end{bmatrix} = \zeta_{(s)} \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 \\ \dot{\mathcal{E}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{E}}_m \end{bmatrix}$$

Первые q строк относятся к нелинейным элементам с увеличивающимися при возрастании токов сопротивлениями, а остальные $n-q$ строк – с уменьшающимися сопротивлениями.

Число расчетных уравнений, разумеется, можно уменьшить, если заданную цепь предварительно, преобразовать в более простую, как это указано в [5].

2. Приведем примеры расчетов некоторых цепей.

Пример 1. Цепь, представленная на фиг. 1 и включенная на переменное напряжение $U = 120$ в, состоит из активного сопротивления $R = 25$ ом, катушки индуктивности с $Z_0 = 20 + j45$ ом и нелинейного элемента R_n , вольтамперная характеристика которого изображена на фиг. 2.¹⁾

Требуется определить ток в нелинейном элементе I_n . Так как сопротивление нелинейного элемента с увеличением тока растет, целесообразно находить напряжение на нем. Это напряжение, очевидно, равно:

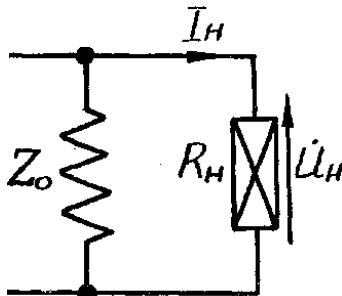
$$\dot{U}_n = \frac{U Z_0 R_n}{R_n R + R Z_0 + R_n Z_0}. \quad (2.1)$$

Следовательно, расчетное уравнение для U_n имеет вид:

$$\dot{U}_{n(s+1)} = \frac{\dot{U} Z_0 R_{n(s)}}{R R_{n(s)} + R Z_0 + R_{n(s)} Z_0}. \quad (2.2)$$

Подставляя численные значения величин, получаем:²⁾

$$\dot{U}_{n(s+1)} = \frac{120(20 + j45)R_{n(s)}}{25R_{n(s)} + 25(20 + j45) + R_{n(s)}(20 + j45)} \text{ в.} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

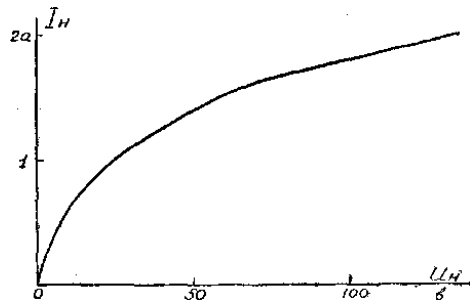
Расчет по этой формуле приведен в табл. 1.

Таблица 1.

№ приближения s	$U_n(s)$	$I_n(s)$	$Z_{sh}(s)$	$U_n(s+1)$
	в	а	ом	в
0	50	1,4	35,7	61,25/13°40'
1	61,25	1,53	40,1	63,7/14°12'
2	63,7	1,55	41,15	64,3/14°20'
3	64,3	1,555	41,3	64,3/14°20'

Таким образом, в результате получены

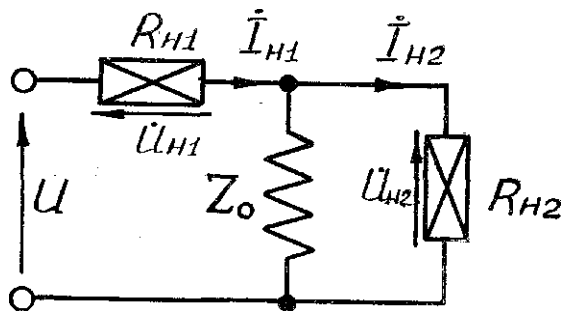
$$\begin{aligned} \dot{U}_n &= 64,3 / 14^\circ 20' \text{ в,} \\ \dot{I}_n &= 1,555 / 14^\circ 20' \text{ а.} \end{aligned}$$



Фиг. 2

Пример 2. Рассмотрим расчёт цепи, содержащей два нелинейных элемента (фиг. 3) ¹⁾.

Оба нелинейных элемента имеют одинаковые вольтамперные характеристики (фиг. 2). Напряжение сети $U = 120$ в, сопротивление $Z_0 = 20 + j45$ ом.



Фиг. 3

Определим токи I_1 и I_2 .

Полагая, $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ и $R_2 = \frac{U_2}{I_2}$ получим выражения для напряжений на нелинейных элементах:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}(R_2 + Z_0)R_1}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}, \quad (2.4)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}R_2Z_0}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}. \quad (2.5)$$

Расчетными уравнениями служат следующие выражения:

$$\dot{U}_{1(s+1)} = \frac{120[R_{2(s)} + (20 + j45)]R_{1(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \quad (2.6)$$

$$\dot{U}_{2(s+1)} = \frac{120(20 + j45)R_{2(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \quad (2.7)$$

Расчет по этим формулам приведен в табл. 2.

Из таблицы видим, что искомые напряжения и токи могут быть приняты равными:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 84,8 \angle -7^\circ 20' \text{ в}, & \dot{I}_1 &= 1,72 \angle -7^\circ 20' \text{ а} \\ \dot{U}_2 &= 37,6 \angle 16^\circ 40' \text{ в}, & \dot{I}_2 &= 1,26 \angle 16^\circ 40' \text{ а} \end{aligned}$$

Пример 3. Схема, показанная на фиг. 4, содержит источник переменного напряжения $\mathcal{E}_0 = 140$ в, активные сопротивления $r_3 = 191$ ом, $r_4 = 224$ ом, $r_5 = 490$ ом и два нелинейных элемента, вольт- и фазовоамперные характеристики, которых представлены на фиг. 5 и 6. Характеристики сняты при синусоидальных напряжениях.

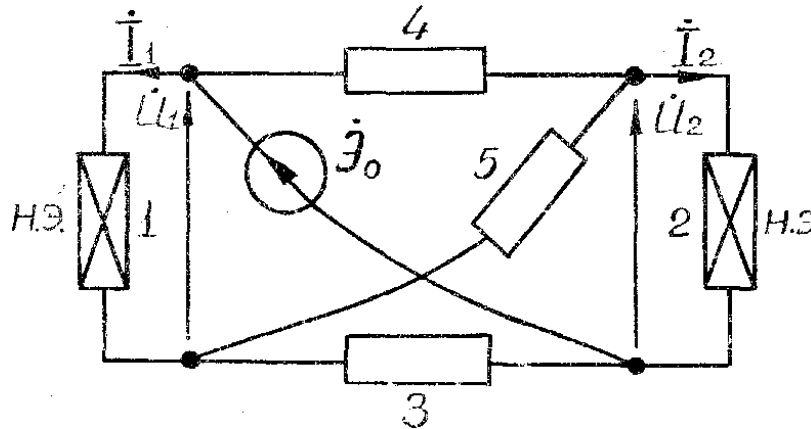
Состояние цепи может быть описано системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 + Y_{10}, \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 + Y_{20}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹⁾ Данные примера заимствованы из работы Р. А. Воронова [3].

Таблица 2

№ прил. S	$U_{1(s)}$	$I_{1(s)}$	$R_{1(s)}$	$U_{2(s)}$	$I_{2(s)}$	$R_{2(s)}$	$U_{1(s+1)}$	$U_{2(s+1)}$
	В	а	ОМ	В	а	ОМ	В	В
0	75	1,64	45,7	45	1,35	33,35	81,2 / -8°40'	41,65 / 24°50'
1	81,2	1,68	48,4	41,65	1,3	32,1	83 / -8°	39,3 / 21°10'
2	83	1,7	49	39,3	1,28	30,7	84,3 / -7°30'	38 / 16°40'
3	84,3	1,71	49,3	38	1,27	29,9	84,8 / -7°20'	37,6 / 16°40'
4	84,8	1,72	49,35	37,6	1,26	29,85	84,8 / -7°20'	37,6 / 16°40'



Фиг. 4

Для линейной части цепи обычным путем определяются коэффициенты:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -0,00651 \text{ ом}^{-1}, & Y_{21} &= -0,00204 \text{ ом}^{-1}, \\ Y_{12} &= -0,0021 \text{ ом}^{-1}, & Y_{22} &= -0,00729 \text{ ом}^{-1}, \\ Y_{10} &= -0,00655 \text{ а}, & Y_{20} &= 0,00729 \text{ а} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя выражения:

$$U_1 = Z_1 I_1$$

$$U_2 = Z_2 I_2$$

решаем систему уравнений (2.8) относительно токов I_1 и I_2

$$I_1 = \frac{(1 - Y_{22}Z_2)Y_{10} + Y_{12}Z_2Y_{20}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}, \quad (2.11)$$

$$I_2 = \frac{(1 - Y_{11}Z_1)Y_{20} + Y_{21}Z_1Y_{10}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}. \quad (2.12)$$

Расчетными являются уравнения (2.13, 2.14)

$$I_{1(s+1)} = \frac{140(0,00655 + Z_{2(s)} \cdot 3,24 \cdot 10^{-5})}{1 + 0,00729Z_{2(s)} + 0,00651Z_{1(s)} + 4,312 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)}} \text{ а} \quad (2.13)$$

$$I_{2(s+1)} = \frac{140(0,00729 + 3,404 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)})}{1 + 0,00729Z_{2(s)} + 0,00651Z_{1(s)} + 4,312 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)}} \text{ а}. \quad (2.14)$$

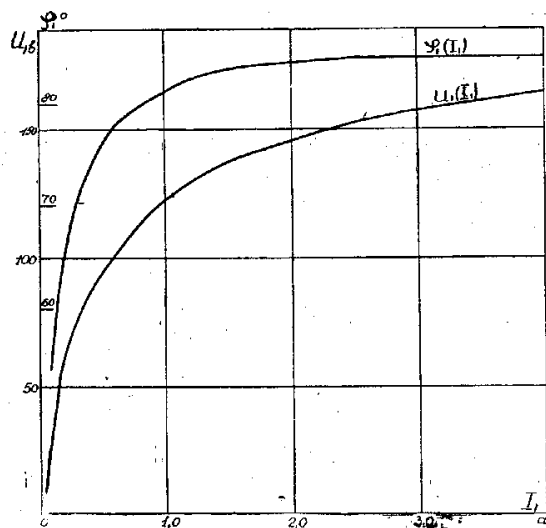
Расчет по этим формулам приведен в табл. 3.

Сходимость процесса наглядно иллюстрирует график зависимости токов I_1 и I_2 от числа приближений s , представленный на фиг. 7.

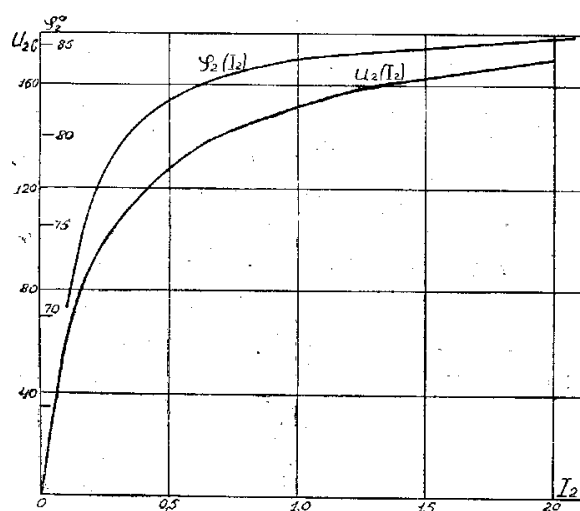
Можно принять, что токи равны: $I = 0,344, < -49^\circ$ а и $I_2 = 0,288 < -64^\circ$

Эти результаты были проверены опытным путем. Данные опыта:

$$I_1 = 0,33 \text{ а}; I_2 = 0,28 \text{ а}.$$



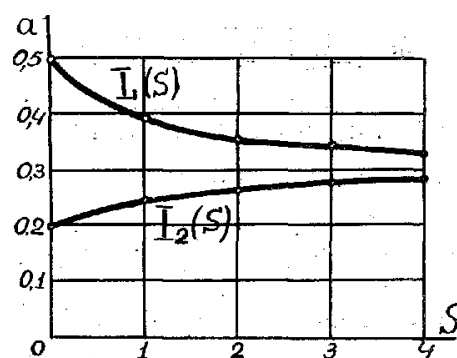
Фиг. 5



Фиг. 6

Таблица 3

№ приб.	$I_{1(s)}$	$U_{1(s)}$	$\Phi_{1(s)}$	$Z_{1(s)}$	$I_{2(s)}$
	а	в	гр	ом	а
0	0,5	94	76°1'	188 / 76	0,2
1	0,394	84,5	73°40'	214,5 / 73°40'	0,247
2	0,36	81,5	72°40'	226,6 / 72°40'20"	0,269
4	0,348	80,5	72°25'	231,5 / 72°25'	0,2805
№ приб.	$U_{2(s)}$	$\Phi_{2(s)}$	$Z_{2(s)}$	$I_{1(s+1)}$	$I_{2(s+1)}$
s	в	гр	ом	а	а
0	89,5	76°20'	447,5 / 76°20'	0,394 / -45°50'	0,247 / -65°18'
1	99	78°10'	401 / 78°10'	0,36 / -48°	0,269 / -65°10'
2	102	78°40'	379,3 / 78°40'	0,348 / -48°40'	0,2805 / -64°35'
4	103	78°50'	367,5 / 78°50'	0,3445 / -49°	0,288 / -64°



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

- Воронов Р.А., Пономарева Г.Ф. Круговые диаграммы при исследовании нелинейных цепей. Электричество, № 12, 1951.
- Воронов Р.А. Графоаналитический метод построения характеристик нелинейных цепей переменного и постоянного токов. Труды ТЭМИИТа, вып. XVI, 1950.
- Воронов Р.А. Расчет цепей с нелинейными элементами методом поправок. Электричество, № 11, 1952.
- Пухов Г.Е. К вопросу расчета электрической цепи с одним нелинейным элементом при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.
- Пухов Г.Е., Амосова С.П. Преобразования нелинейных цепей при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.