

Очевидно, что с возникновением местной пластической деформации указанная зависимость нарушается. Вследствие этого для рассматриваемого общего случая примем соотношение:

$$P(\delta) = Z\delta^{n_n}. \quad (7)$$

Соотношение (7), по своей структуре, аналогично формуле (6), но отличается от нее смыслом и значениями коэффициента  $Z$  и показателя  $n_n$ . При этом полагается, что на протяжении всего периода  $t^*$  постоянные  $Z$  и  $n_n$  остаются неизменными, зависящими от диаметра сферы и являются функциями упругих свойств материалов сферы и контртела, а также твердости последнего. С увеличением твердости значения  $Z$  и  $n_n$  возрастают. В пределе, для чисто упругого контакта  $n_n = 3/2$ , что соответствует решению Герца.

Решая дифференциальное уравнение (5) с учетом формулы (7) можно расчетным путем опреде-

лить максимальную силу удара, максимальное полное, остаточное и упругое сближения в контакте, а также продолжительность активной стадии соударения  $t^*$  при варьировании различных параметров (начальной скорости, твердости материала контртела, диаметра сферы и т.д.).

Таким образом, основные параметры динамического упругопластического контакта сферы с плоскостью могут быть определены расчетным путем с использованием, наряду с параметрами чисто упругого контакта, значений твердости материала, как при ударе, так и статическом нагружении.

Предлагаемая теоретическая модель расчета может быть использована не только для контакта гладкой упругой сферы с упругопластическим полупространством, но и для более широкого спектра контактных взаимодействий.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гурьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 567 с.
2. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидяхин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. – М.: Машиностроение, 1986. – 220 с.
3. Орлов А.В., Пинегин С.В. Остаточные деформации при контактном нагружении. – М.: Наука. 1971. – 62 с.
4. Ланков А.А., Миронов В.А. Упругость, упругопластичность и пластичность в конструкционных средах. – Калинин: ТГТУ, 1997.
5. Бульчев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием. – М.: Машиностроение, 1990. – 280 с.
6. Дрозд М.С. Определение механических свойств металла без разрушения. – М.: Металлургия, 1965. – 171 с.

УДК 622.24.05

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОУДАРЕНИЯ БОЙКА С ХВОСТОВИКОМ УДАРНОГО ИНСТРУМЕНТА

А.П. Слестин, Л.А. Саруев

Юргинский технологический институт Томского политехнического университета  
E-mail: yftpu@mail.ru

*Предложена математическая модель, описывающая ударное взаимодействие бойка (ударника) переменного поперечного сечения с хвостовиком ударного инструмента. Получены параметры этого взаимодействия: продольная сила, скорость частиц материала, поток мощности и другие характеристики, имеющие хорошее совпадение с экспериментальными данными.*

Опыт применения машин ударного действия вызвал необходимость решения ряда проблем, понимание которых невозможно без анализа ударного воздействия на ударный инструмент. Изучение влияния конструктивных параметров бойка на формирование продольных волн в ударном инструменте представляет интерес и для практики конструирования машин ударного действия.

Удар бойком по торцу хвостовика ударного инструмента приводит к формированию продольных волн, как в хвостовике, так и в бойке [1–3]. Волновое поле бойка в свою очередь оказывает влияние на формирование волны в хвостовике. В данной работе рассмотрена задача об инициировании волн в бойке торцевым продольным ударом бойка по ударному инструменту.

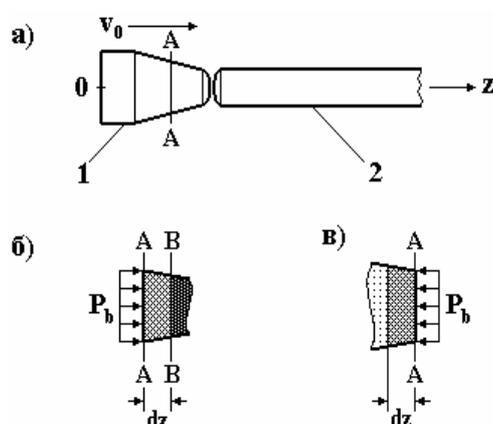


Рис. 1. Схема удара бойка по хвостовику ударного инструмента: 1) боек; 2) хвостовик

Введем систему координат  $0z$ , выбирая начало оси на свободном (левом) торце бойка и направляя ее к ударному инструменту (рис. 1). Допустим, известны длина бойка  $l_b$  и его площадь поперечного сечения  $S_b=S_b(z)$ . Пусть также задана скорость бойка  $v_0$  в момент соударения, принимаемый далее за  $t=0$ . Считаем, что закон распространения продольных волн, как бойке, так и ударном инструменте, носит линейный характер. В данном случае это означает, что распространяющиеся волны будут проходить сквозь друг друга не взаимодействуя. Предположим, что боек изготовлен из материала с параметрами:  $\rho$  – плотность,  $E$  – модуль Юнга. Тогда скорость распространения продольных волн в бойке будет равна  $c_0=\sqrt{E/\rho}$ .

Рассмотрим фронт волны сжатия, распространяющейся внутри бойка. Разобьем боек сечениями на участки бесконечно малой длины  $dz$  (пластины). Будем рассматривать формирование волны внутри бойка как следствие взаимодействия этих участков. Предположим, что фронт волны достиг некоторого сечения с координатой  $z$ . Обозначим это сечение через А-А (рис. 1, а).

Слева от сечения А-А движется участок бойка, длиной  $dz$ , имеющий скорость  $v_0$ , направленную вправо, и являющийся ненагруженным (внутренняя сила равна нулю). Участок бойка, расположенный справа от сечения А-А, имеет в общем случае другие значения скорости и силы. Происходит взаимодействие участков, расположенных слева и справа от сечения А-А (соударение). Обозначим внутреннюю силу этого взаимодействия через  $P_b$ . Определим параметры эффектов, возникающих вследствие воздействия силы  $P_b$  в течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$ .

За время  $dt$  волна, расположенная правее сечения А-А, сместится вправо на расстояние  $dz=c_0dt$ , и ее задний фронт займет положение В-В (рис. 1, б). Действие силы  $P_b \neq 0$  формирует волну сжатия.

Аналогично, рассматривая участок, расположенный левее сечения А-А (рис. 1, в), найдем (закон равенства действия и противодействия), что волна сжатия сформируется и в нем и распространится на тоже расстояние  $dz=c_0dt$ .

Таким образом, участок бойка длиной  $dz$ , имеющий скорость  $v_0$ , инициирует волну как слева, так и справа от сечения А-А суммарной длиной  $2dz$ . То есть каждый участок длиной  $dz$  присоединяет к ранее сформированной волне новый участок длиной  $2dz$  и эта более длинная волна распространяется в положительном направлении оси  $0z$ . Так как указанное замечание справедливо для каждого участка, то общая длина сформированной волны будет равна  $2l_b$ .

Далее будем обозначать параметры волны на участке, расположенном слева от сечения А-А индексом 1, а на расположенном справа от сечения А-А – индексом 2. Для определения скоростей  $v_{b1}$ ,  $v_{b2}$  элементарных пластин после соударения применим теорему о сохранении количества движения

$$\rho \cdot S_{b1} \cdot dz \cdot v_0 = \rho \cdot S_{b1} \cdot dz \cdot v_{b1} + \rho \cdot S_{b2} \cdot dz \cdot v_{b2}. \quad (1)$$

Обозначим через  $S_b(z=0)S_{b1}$ ,  $S_b(z+0)=S_{b2}$  соответствующие предельные значения площади  $S_b(z)$ . После несложных преобразований (1) можно представить в виде

$$S_b(z-0) \cdot v_0 = S_b(z-0) \cdot v_{b1} + S_b(z+0) \cdot v_{b2}. \quad (2)$$

Требование неразрывности материала бойка вдоль оси  $z$  приводит к соотношению  $v_{b1}=v_{b2}$  (абсолютно неупругий удар). Тогда из (2) следует

$$v_{b1} = v_{b2} = \frac{S_b(z-0)}{S_b(z-0) + S_b(z+0)} \cdot v_0. \quad (3)$$

При непрерывной функции  $S_b(z)$  выполняется равенство  $S_b(z=0)=S_b(z+0)$  и (3) примет вид

$$v_b = v_{b1} = v_{b2} = \frac{v_0}{2}. \quad (4)$$

Сделаем следующее замечание. Равенство (4) следует из (3) при непрерывной функции  $S_b(z)$ . Если это условие не выполняется, то функция  $v_b(z)$  будет разрывной в соответствующих сечениях. При этом предельные значения в точках разрыва, как справа, так и слева будут иметь значения  $v_0/2$ . Такая функция отличается от непрерывной на так называемую нулевую функцию  $n(z)$ , то есть на функцию, обладающую свойством

$$\int_0^z n(z) dz \equiv 0 \quad \text{при всех } z \geq 0.$$

Такие функции в математике обычно рассматриваются как совпадающие. Поэтому, доопределяя в точках разрыва функцию  $v_b(z)$  значением  $v_0/2$ , получим непрерывную функцию. В дальнейшем будем предполагать, что эта операция проделана, и функция  $v_b(z)$  является непрерывной.

Определим внутреннюю силу  $P_b$ . Энергия на начало взаимодействия участков равна кинетической энергии левого участка

$$U_k = \frac{\rho S_b(z) dz \cdot v_0^2}{2}.$$

Энергия в конце взаимодействия будет складываться из кинетической энергии частиц материала, захваченных волной сжатия длиной  $2dz$ , и потенциальной энергии сжатых участков по обе стороны сечения А-А

$$U = \frac{\rho S_b(z) 2 dz \cdot v_b^2}{2} + \frac{P_b^2 \cdot 2 dz}{2 E S_b(z)}.$$

На основе закона о сохранении энергии

$$\frac{\rho S_b(z) \cdot v_0^2}{2} = \frac{\rho S_b(z) \cdot v_b^2}{4} + \frac{P_b^2}{E S_b(z)}. \quad (5)$$

При выводе равенства (5) учтено соотношение (4). После несложных преобразований из (5) следует

$$P_b = - \frac{\sqrt{\rho E} \cdot S_b(z) \cdot v_0}{2}. \quad (6)$$

Знак минус в формуле (6) учитывает, что удар бойком формирует волну сжатия.

Отметим, что абсолютно неупругий удар подразумевает поглощение энергии в зоне контакта. Это явление действительно происходит, но поглощенная энергия в данном случае уходит на формирование волн.

Как уже было замечено, удар бойком длиной  $l_b$  инициирует в бойке волну длиной  $2l_b$ . Кажущееся несоответствие объясняется просто. За время иницирования волны  $T_j=2l_b/c_0$  половина волны уже уйдет в ударный инструмент (или отразится от него), а оставшаяся половина займет весь боек.

С целью упрощения расчетов данный процесс можно смоделировать следующим образом. "Растянем" боек до длины  $2l_b$  оставляя координату  $z=l_b$  контакта боек-хвостовик постоянной. Введем переменную

$$z_c = 2z - l_b.$$

Тогда формулы (4), (6) примут вид

$$v_b(z_c) = \frac{v_0}{2}, \quad (7)$$

$$P_b(z_c) = -\frac{E \cdot S_b(z_c) \cdot v_0}{2c_0}, \quad (8)$$

где  $-l_b \leq z_c \leq l_b$  и учтено, что  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ . Легко заметить, что найденные значения  $P_b$ ,  $v_b$  связаны соотношением

$$P_b(z_c) = -\frac{E \cdot S_b(z_c)}{c_0} \cdot v_b(z_c), \quad (9)$$

которое всегда выполняется для значений силы и скорости в волне [3].

Сформированная волна с параметрами (7, 8) начинает распространяться в прямом направлении (к хвостовику ударного инструмента). В дальнейшем будут представлять интерес параметры волны, падающей на ударный торец бойка ("волна на торце"). Обозначим площадь поперечного сечения бойка на ударном торце через  $S_{bc}$ . Вследствие малой длины бойка пренебрежем потерями энергии за счет внутреннего трения при пробеге волны до ударного сечения.

Для нахождения параметров волны, проходящей через сечение площадью  $S_{bc}$ , воспользуемся равенством потоков мощности, создаваемыми сформированной волной (7, 8) и "волной на торце". С целью упрощения пересчитаем параметры сформированной волны при ее "старте" предполагая, что в дальнейшем она движется по участку площадью  $S_{bc}$  без искажения.

Поток мощности, создаваемый сформированной в бойке волной равен

$$N_b = -P_b \cdot v_b = \frac{E S_b(z_c) \cdot v_0^2}{4c_0}. \quad (10)$$

Обозначим параметры "волны на торце" через  $P_c$ ,  $v_c$ . Эти параметры связаны соотношением типа (9). Тогда

$$v_c = -\frac{c_0 P_c}{E S_{bc}}. \quad (11)$$

Поток мощности в "волне на торце"

$$N_c = -P_c \cdot v_c = \frac{c_0}{E S_{bc}} P_c^2. \quad (12)$$

Равенство потоков мощности (10) и (12) приводит к соотношению

$$\frac{c_0}{E S_{bc}} P_c^2 = \frac{E S_b(z_c)}{c_0} \cdot \frac{v_0^2}{4}.$$

Откуда

$$P_c(z_c) = -\frac{E}{c_0} \cdot \sqrt{S_{bc} \cdot S_b(z_c)} \cdot \frac{v_0}{2}. \quad (13)$$

Скорости сечений в "волне на торце" найдутся по формуле (11), которая в данном случае примет вид:

$$v_c(z_c) = \sqrt{\frac{S_b(z_c)}{S_{bc}}} \cdot \frac{v_0}{2}. \quad (14)$$

Значения, определяемые по формулам (13, 14), являются начальными (стартовыми) значениями для волн. Так, например, значения скорости сечений в волне будут равны

$$v_c(z_c - c_0 t) = \sqrt{\frac{S_b(z_c - c_0 t)}{S_{bc}}} \cdot \frac{v_0}{2}, \quad (15)$$

а значения силы – равны

$$P_c(z_c - c_0 t) = -\frac{E}{c_0} \cdot \sqrt{S_{bc} \cdot S_b(z_c - c_0 t)} \cdot \frac{v_0}{2}. \quad (16)$$

Распределение смещений можно получить интегрированием зависимости

$$v_c(z_c, t) = \frac{\partial u_c(z_c, t)}{\partial t}.$$

Дальнейшее поведение волны, сформированной в бойке с параметрами (15, 16), зависит от условий на контакте боек-хвостовик. Так, например, если площадь ударного торца хвостовика равна  $S_{bc}$  и соударяющиеся торцы плоские, то в ударном инструменте будет распространяться волна с теми же параметрами. Поведение волны с другими условиями контакта рассмотрено в [2].

Следует отметить, что предложенная в данном разделе модель ударного взаимодействия тел (бойка с ударным инструментом) несколько отличается от общепринятой в настоящее время модели соударения [1–3]. Рассмотрим эти различия на примере соударения прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения с абсолютно жесткой преградой, считая, что скорость стержня направлена вдоль его оси и равна  $v_0$  (рис. 2).

По существующей модели процесс формирования волны в бойке складывается из двух этапов. На первом этапе в бойке при ударе начинает распространяться со скоростью  $c_0$  "волна сжатия". После того как эта волна охватит всю длину стержня, на втором этапе, начнется разгрузка сечений – от свободного торца к ударному, пока не исчезнут напряжения во всех сечениях ("волна разгрузки"), после этого произойдет отскок стержня.

Если воспользоваться принятыми в данной работе обозначениями, продольные усилия и скорость в "волне сжатия" определяются из соотношений

$$P_b = \rho c_0 S_b v_0, v_b = 0. \quad (17)$$

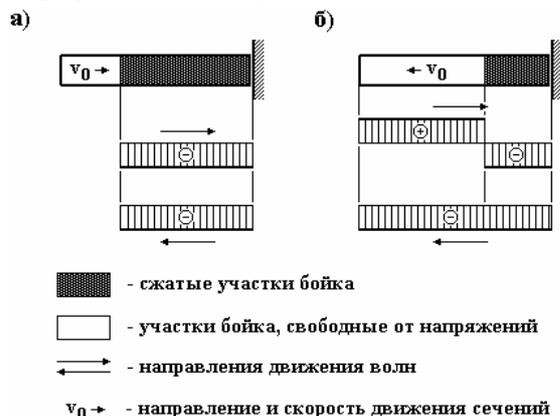
В “волне разгрузки” продольная сила и скорость равны

$$P_b = 0, v_b = -v_0, \quad (18)$$

(скорость направлена от препятствия).

Заметим, что указанные в (17) и (18) параметры не удовлетворяют основному соотношению (9) для параметров волн общего вида. Исключением является первое равенство из (17), но оно связывает параметры разных сечений бойка: до фронта “волны сжатия” и после него.

Рассмотрим инициирование волны согласно рассмотренной в данной работе модели соударения. Удар бойка о преграду инициирует в бойке волну сжатия. Эта волна распространяется к преграде, увеличивая свою длину за счет присоединения новых участков. Каждый новый присоединяемый участок длиной  $dz$  увеличивает длину волны на  $2dz$ , а волна за время присоединения смещается к преграде на величину  $dz$ .



**Рис. 2.** Схема соударения бойка постоянного поперечного сечения с абсолютно жесткой преградой. Показаны эпюры продольной силы в распространяющихся волнах

Иницированная волна взаимодействует с преградой и отражается от нее также волной сжатия, при этом скорости сечений будут равны по величине и противоположно направлены. Так как процессы инициирования волны и формирования отраженной начинаются одновременно, то эти волны будут одинаковой длины и занимать один и тот же участок бойка (рис. 2, а).

Формулы (13, 14) при примут вид

$$P_b = -\frac{E S_b}{c_0} \cdot \frac{v_0}{2}, v_b = \frac{v_0}{2}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
- Иванов К.И., Латышев В.А., Андреев В.Д. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 272 с.

Отраженная волна имеет параметры

$$P_b = -\frac{E S_b}{c_0} \cdot \frac{v_0}{2}, v_b = -\frac{v_0}{2}. \quad (19)$$

Суммарное волновое поле для сжатого участка бойка определится параметрами

$$P_b^\Sigma = -\frac{E S_b}{c_0} \cdot v_0, v_b^\Sigma = 0. \quad (20)$$

С учетом равенства  $E/c_0 = \rho c_0$  легко заметить, что формулы (17) совпадают с формулами (20).

Область сжатия в бойке увеличивает свою длину за счет присоединения новых участков (“волна сжатия”) пока не будет равна длине бойка. Далее волна, распространяющаяся влево, отразится от свободного торца волной растяжения, (рис. 2, б) и будет распространяться к ударному торцу бойка, занимая область, освобождающуюся при движении волны сжатия в том же направлении. Параметры этой дважды отраженной волны (вначале от ударного торца бойка, а затем свободного от торца) будут равны

$$P_b = \frac{E S_b}{c_0} \cdot \frac{v_0}{2}, v_b = -\frac{v_0}{2}. \quad (21)$$

Суммарное волновое поле, образованное дважды отраженной волной с параметрами (19) и волной, движущейся влево, с параметрами (21), будет иметь следующие значения

$$P_b^\Sigma = 0, v_b^\Sigma = -v_0. \quad (22)$$

При достижении дважды отраженной волны ударного торца бойка произойдет отскок стержня от преграды. Легко заметить, что формулы (18) совпадают с формулами (22).

Таким образом, сравнение существующего метода расчета инициализации волн в бойке и метода, предложенного в данной работе, показывает, что предложенный метод уточняет механизм образования и распространения волн.

### Выводы

- Предложена уточненная волновая модель, описывающая ударное взаимодействие тел.
- Получены параметры волны, сформированной ударом: продольная сила, скорость частиц материала, поток мощности и другие характеристики.
- Отмечены различия между предложенной в работе моделью и существующей в настоящее время на примере удара стержня о жесткую преграду.

- Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.