ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ХЕСТОНА

О.Л. Крицкий, к.ф.-м.н., доц.
Д.В. Степанян, студент гр.0ВМ91
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
E-mail: dar.stepanyan@yandex.ru

Введение

Сейчас торговля на финансовом рынке является довольно популярным источником дохода. Чтобы получить прибыль игроки пытаются предугадать ситуацию на рынке. Одним из способов для решения этой задачи является использование математических моделей. В данном случае речь пойдет о модели Хестона описывающей поведение волатильности базового актива.

Для определения риска покупки того или иного актива рассматривают волатильность, как одну из важнейших характеристик доходности любого финансового инструмента.

Модель Хестона является обобщением модели Блэка–Шоулса, так как рассматривает не постоянную волатильность, которая не соответствует реальным данным, а стохастическую. Стохастическая волатильность предполагает, что изменчивость цены изменяется случайно, и это позволяет лучше описывать реальные данные.

Согласно модели Хестона, динамика квадрата волатильности базового актива случайно изменяется пропорционально корню из дисперсии. Модель также учитывает то, что цена и волатильность коррелируют между собой.

Описание модели

Хестон предложил использовать в качестве модели базового актива систему следующих уравнений:

$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1$

$dV_t = k(\gamma - V_t)dt + \bar{\sigma}\sqrt{V_t} dW_t^2$

$Corr(dW_t^1, dW_t^2) = \rho$, где

S_t, V_t – цена и волатильность базового актива соответственно,

W_t^1, W_t^2 – случайные броуновские процессы с корреляцией ρ.

V_t– это квадратичный процесс с возвратом к среднему (mean reverting) со средним значением γ и интенсивностью k.

$\bar{\sigma}$ – среднеквадратичное отклонение волатильности,

r – безрисковая ставка.

Пусть выполнено условие Феллера регулярности модели стохастической волатильности: $\sigma^2 \le 2k\gamma$

Параметры $k, \gamma, \bar{\sigma}, \rho$ ненаблюдаемы и подлежат оценке методом максимального правдоподобия (ММП) на исторических данных котировок. Известно, что асимптотическая (с точностью до лага данных Δ) логарифмическая функция правдоподобия для модели Хестона есть [2]:

$$l_x = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\Delta)\, n - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\ln((1-\rho^2)\bar{\sigma}V_t) + \frac{C_X^{(-1)}}{\Delta} + C_X^{(0)} + C_X^{(1)}\Delta\right) + O(\Delta^2)$$

$$C_X^{(-1)} = -\frac{(x_2-1)^2 - 2\rho\bar{\sigma}(x_2-1)(x_1-S_0) + \bar{\sigma}^2(x_1-S_0)^2}{2(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} + \frac{(x_2-1)^3}{4(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} - \frac{\rho(x_2-1)^2(x_1-S_0)}{2(1-\rho^2)\bar{\sigma}} + \frac{(x_2-1)(x_1-S_0)^2}{4(1-\rho^2)} + \frac{(7\rho-8\rho^3)(x_2-1)^3(x_1-S_0)}{24(1-\rho^2)^2\bar{\sigma}} - \frac{(7-10\rho^2)(x_2-1)^2(x_1-S_0)^2}{48(1-\rho^2)^2} - \frac{\rho\bar{\sigma}(x_2-1)(x_1-S_0)^3}{24(1-\rho^2)^2} + \frac{\bar{\sigma}^2(x_1-S_0)^4}{96(1-\rho^2)^2} - \frac{(15-16\rho^2)(x_2-1)^4}{96(1-\rho^2)^2\bar{\sigma}^2}$$

$$C_X^{(0)} = \frac{(x_2-1)(b_2-\rho\bar{\sigma}b_1-\rho\bar{\sigma}a_1+a_2)}{(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} - \frac{(x_1-S_0)(\rho b_2-\bar{\sigma}b_1-\bar{\sigma}a_1+\rho a_2)}{(1-\rho^2)\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}^2(x_1-S_0)^2}{24(1-\rho^2)} - \frac{(x_2-1)^2(\bar{\sigma}(\bar{\sigma}-12\rho a_1))}{24(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} + \frac{(x_2-1)(x_1-S_0)(\rho\bar{\sigma}^2-6\bar{\sigma}a_1+6\rho a_2)}{12\bar{\sigma}(1-\rho^2)}$$

$$C_X^{(1)} = \frac{\rho\bar{\sigma}a_2b_1 + \rho\bar{\sigma}a_1b_1 - \bar{\sigma}^2a_1b_1 - a_2b_2}{(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} + \frac{2\rho\bar{\sigma}b_1b_2 - \bar{\sigma}^2b_1^2 - b_2^2}{2(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2} - \frac{\bar{\sigma}^4 - \rho^2\bar{\sigma}^4 + 6\bar{\sigma}^2a_1^2 - 6\bar{\sigma}^2a_2 + 6\rho^2\bar{\sigma}^2a_2 - 12\rho\bar{\sigma}a_1a_2 + 6a_2^2}{12(1-\rho^2)\bar{\sigma}^2}$$

$a_1 = r - d$, $a_2 = k\gamma$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = -k$, $x_1 -$ значение котировки, $x_2 -$ значение дисперсии котировок, $\rho -$ корреляция винеровских шумов.

После нахождения максимума функции правдоподобия и оценки коэффициентов на исторических данных мы сможем вычислить цены опционов для любого страйка и периода до экспирации.

Заключение

Модель Хестона отражает реальное статистическое распределение приращений цены базового актива значительно лучше, чем модель Блэка–Шоулса. Однако у нее есть один существенный недостаток, состоящий в том, что, если до исполнения опциона остается небольшой срок (около недели для российского рынка), то цены крайних страйков модель определяет неверно.

Список использованных источников

1. Mikhailov S., Nögel U. Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions // Wilmott magazine. – 2003 – P. 74–79.
2. Ait Zahalia Y., Kimmel R., Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models, J. of Financial Economics, 2007, 83, p. 413–452