Заслуга Монжа троякая. Во-первых, он решил вопрос о построении изображения на одной плоскости, вторая плоскость с нанесенной на ней проекцией поворачивается на 90° вокруг линии пересечения обеих плоскостей (линии земли). Получаемые таким образом в горизонтальной плоскости две проекции образуют так называемый «эпюр», по которому уже можно с точностью воспроизвести изображаемый объект. Учение о построении и «чтении» эпюра и составляет содержание начертательной геометрии Монжа. Во-вторых, Монж свел весь материал, собранный в применении к многообразным отдельным объектам, в стройную систему. В-третьих, он попытался использовать эти графические методы для целей общегеометрического исследования: так как изображаемый объект вполне определяется эпюром, то геометрическое исследование этого объекта может быть сведено к изучению эпюра.

Таким образом, к концу XVIII в. оформились и получили завершенное выражение те течения геометрической мысли, которые возникли в эпоху Возрождения и постепенно развивались в течение шести веков. Существенные черты новой геометрии этой второй (после эллинской) эпохи расцвета заключались в исследовании тех же вопросов, которые занимали греческих геометров, но при помощи совершенно новых методов. Принцип «geometria geometrice» отпадает; напротив, в геометрии находят широкое приложение две новые математические науки - алгебра и исчисление бесконечно малых. Новые методы геометрического исследования носят гораздо более абстрактный характер, они дальше от непосредственной интуиции. Вместе с тем, они дают более общие средства для решения конкретных задач. От геометризации алгебры делается переход к алгебраизации геометрии, и только изобразительная геометрия строится старыми, чисто геометрическими методами. Чем шире развиваются эти методы, тем глубже становятся их практические применения.

Литература.

1. Юшкевич А.П. История математики (том 1) с древнейших времен до начала Нового времени. - М.: Наука, 1970.- 352 с.
2. Шафаревич И. Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия, — Физматлит, Москва, 2009.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРКОНУСОВ ПОРЯДКА r > 2 В МНОГОМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.С. Березовская, студент гр. 1208, научный руководитель: Ивлев Е.Т., профессор*
КемГМА, 650029, г. Кемерово, ул. Ворошилова, 22а, тел. 8-9236116055
**Национальный исследовательский Томский политехнический университет*
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822)-56-36-98

Распределения на дифференцируемых многообразиях занимает видное место в дифференциально-геометрических структурах на этих многообразиях. Наряду с распределениями линейных элементов на многообразиях в однородном пространстве представляет интерес изучение распределения алгебраических гиперконусов в однородных пространствах. Последние входят в общую схему исследования многообразий преимущественно в проективных пространствах, элементами которых являются алгебраические поверхности. Кроме того при детальном изучении геометрических свойств многообразий алгебраических гиперповерхностей часто возникают семейства алгебраических гиперконусов порядка r. Поэтому возникает необходимость изучения распределений алгебраических гиперконусов порядка r в многомерном аффинном пространстве, их связи с распределениями линейных подпространств и инвариантных аффинных связностей на них.

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а все встречающиеся функции предполагаются аналитическими.

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному аффинному реперу $\left\{\overline{A},\overline{e_i}\right\}\left(i,j,k,l=\overline{1,n}\right)$ с деривационными формулами

$$d\overline{A}=\omega^i\overline{e_i}, d\overline{e_i}=\omega_i^j\overline{e_j}$$

и структурными уравнениями

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, D\omega_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i$$

Если пространство A_n эквиаффинное, то из

$$\left(\overline{e_1},\overline{e_2}\cdots\overline{e_n}\right)=1$$

получаем

$$\omega_i^i = 0 \text{ (по i суммировать).}$$

Обозначим $A_{n,N}$, где

$$N = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!},$$

(n +N) – мерное расслоенное пространство, базой которого является пространство A_n, а слоем, соответствующим каждой точке $M \in A_n$, служит G_N - множество всех алгебраических гиперконусов порядка r пространства A_n с точечными вершинами. В расслоенном пространстве $A_{n,N}$ зададим гладкое сечение: каждой точке $A \in A_n$ поставим в соответствие вполне определенный невырожденный гиперконус K_{n-1}^r порядка r > 2 с вершиной A, который в локальных аффинных координатах репера R определяется уравнением:

$$g_{i_1 i_2 \cdots i_r} x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_r} = 0 \left(i_i, \cdots, i_r = \overline{1,n} \right)$$

Здесь компоненты симметрического тензора $g_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} \nabla g_{i_1 i_2 \cdots i_r} = g_{i_1 i_2 \cdots i_r j} \omega^j, \nabla g_{i_1 i_2 \cdots i_r j} = g_{i_1 i_2 \cdots i_r jk} \omega^k \\ g_{[i_1 i_2 \cdots i_r]} = 0, g_{[i_1 i_2 \cdots i_r] i} = 0, g_{[i_1 i_2 \cdots i_r] jk} = 0, g_{i_1 i_2 \cdots i_r [jk]} = 0 \end{gathered} . \quad (1)$$

Символ ∇, примененный, например к тензору $a_{i_1 i_2 \cdots i_s}$, означает следующее:

$$\nabla g_{i_1 i_2 \cdots i_s} = dg_{i_1 i_2 \cdots i_s} - a_{j i_2 \cdots i_s} \omega_{i_1}^j - a_{i_1 j i_3 \cdots i_s} \omega_{i_2}^j - \cdots - a_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} j} \omega_{i_n}^j .$$

Дифференциальные уравнения (1) являются дифференциальными уравнениями n-мерной секущей поверхности $V_{n,r}$ расслоения $A_{n,N}$. Эта секущая поверхность представляет собой распределение алгебраических гиперконусов порядка r в аффинном пространстве.

Определение 1. Прямые l_1^i, проходящие через точку A и не принадлежащие гиперконусу K_{n-1}^r, называются основными относительно этого гиперконуса, если каждая из них является линейной полярой соответствующей гиперплоскости

$$\widetilde{A}_{n-1,i} = l_1^1 \cup l_1^2 \cup \cdots \cup l_1^{i-1} \cup l_1^{i+1} \cup \cdots \cup l_1^n$$

относительно указанного гиперконуса.

Теорема 1. Каждой точке A пространства A_n в общем случае отвечает конечное число основных прямых $l_1^i \left(i = \overline{1,n} \right)$ относительно гиперконуса K_{n-1}^r (r > 2).

Доказательство.

Если прямые

$$l_1^i = \left(\overline{Al_j} \right) x_i^j$$

являются основными относительно K_{n-1}^r (r > 2), то величины x_i^j удовлетворяют условиям**:**

$$g_{i_1 i_2 \cdots i_r} x_i^{i_1} \underbrace{x_i^{i_2} \cdots x_i^{i_{r-1}}}_{r-1} x_j^{i_r} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \neq 0, i = j \end{cases}$$

Проведем такую канонизацию аффинного репера R, при которой

$$g_{\underbrace{i \cdots i}_{r}} = 1, g_{i \cdots ij} = 0, (i \neq j)$$

При этом определитель порядка r(r-1) отличен от нуля:

$$g_{sk}^{il} = (r-1) g_{\underbrace{i \cdots i}_{r-2}} \delta_i^l \delta_s^j + \delta_s^i \delta_k^l$$

$$\left(i, j, k, l, s = \overline{1,n}, s \neq l, i \neq j \neq k \right)$$

Здесь значения пар чисел $\binom{i}{k}$ указывают на номера строк, а $\binom{l}{s}$ – на номера столбцов.

Из дифференциальных уравнений (1) замечаем, что все 1-формы ω_i^j являются главными:

$$\omega_i^j = A_{ik}^j \omega^k, \nabla A_{ik}^j = A_{ikl}^j \omega^l$$

Поэтому аффинный репер R распределения $V_{n,r}$ в A_n становится каноническим и существует. Геометрически при фиксации указанного канонического репера прямые

$$l_1^i = (\overline{Al_i})$$

являются основными относительно K_{n-1}^r .При этом из рассмотрения исключаются случаи:

1) $a_{\underbrace{i\cdots j}_{r}} = 0$, когда $l_1^i \in K_{n-1}^r$,

2) g=0, когда основные прямые l_1^i относительно K_{n-1}^r определяются бесчисленным числом способов.

Теорема 2. С распределением $V_{n,r}$ в A_n инвариантным образом определяется конечное число, равное числу основных прямых l_1^i относительно K_{n-1}^r ,распределений $V_{n,2}$ квадратичных гиперконусов $Q_{n-1,2}^i$ с вершиной в точке A .

Доказательство. Квадратичная поляра прямой l_1^i (*i*- фиксировано) относительно гиперконуса K_{n-1}^r определяется уравнением, соответственно

$$\left(x^i\right)^2 + \overset{(i)}{g}_{kl} x^k x^l = 0, (k, l \neq i)$$

где

$$\overset{(i)}{g}_{kl} = g_{\underbrace{i\cdots j}_{r-2}}kl \quad \left(i, j, k, l = \overline{1,n}, k, l \neq i\right)$$

Квадратичная поляра прямой l_1^i относительно K_{n-1}^r представляет собой гиерконус K_{n-1}^2 второго порядка с вершиной A, который, в общем случае является невырожденным, поэтому определитель из его коэффициентов в общем случае не равен нулю:

$$\overset{(i)}{g} = \det\left[\overset{(i)}{g}_{kl}\right] \neq 0$$

Поэтому каждый из этих гиперконусов определяет инвариантные аффинные связности**.** Теорема доказана.

Замечание 1. Если p – нечетное число, то с распределением $V_{n,r}$ в A_n каждой точке $A \in A_n$ в общем случае отвечает по крайней мере одна совокупность из n вещественных основных прямых l_1^i относительно гиперконуса K_n^r (r > 2). В случае p=3, n=3 каждой точке $A \in A_3$ отвечает в общем случае только одна совокупность из трех основных вещественных прямых l_1^i , относительно K_3^3 .

Литература.

1. Евтушик Л. Е., Остиану Н. М., Лумисте Ю. Г., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР, 1979, с. 7-246.
2. Малаховский В. С. Дифференциальная геометрия фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР,т. 2, М., 1969, с. 179-206.
3. Малаховский В. С. Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР,т. 5, 1973, с. 319-334.
4. Малаховский В. С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3(труды Томского университета,192), 1963,с. 28-42.
5. Норден А. П. Пространства аффинной связности. “ Наука”, физматгиз, М., 1976, с.432.
6. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л., ГИТТЛ, 1948.
7. Ивлев Е. Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой науч. конф. по матем. и мех. за 1970год, 1. Изд-во Томского ун-та, 1970, с. 121-123.
8. Ивлев Е. Т. О многообразии E(o,n-m,m) в n-мерном проективном пространстве $P_n(m > 2, n | < m(m+1))$. Сиб. Матем. Журнал, 1967, т.8, №5, 1143-1156.